УДК 534 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 3

КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ДВУМЯ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯМИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

И. Е. Лопатухина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

В статье рассматривается электромеханическая система (ЭМС), колебания которой возбуждаются двумя электродвигателями постоянного тока. Составлены уравнения движения ЭМС в форме Лагранжа—Максвелла. Проведено численное интегрирование системы уравнений для конкретных параметров. Построены графики зависимости колебаний платформы от подводимого напряжения. Получены условия колебаний платформы с малыми амплитудами. Библиогр. 9 назв. Ил. 5.

Ключевые слова: электромеханическая система, колебания, численное решение, уравнения Лагранжа—Максвелла.

1. Введение. Накопленные экспериментальные данные свидетельствуют о том, что колебательная система при вынужденных колебаниях может проявлять особенности характера движения. Одним из таких экспериментов является классический опыт немецкого учёного Арнольда Зоммерфельда [1]. Вопросы взаимодействия колебательной системы и источника энергии получили развитие в работах В. О. Кононенко [2]. А. Ю. Львович и Ф. Ф. Родюков использовали в своих работах при составлении уравнений движения аппарат Лагранжа—Максвелла [3–6].

В статье рассматривается задача по исследованию динамических режимов колебательной системы, когда взаимодействия с источниками энергии осуществляются одновременно и упругими силами, и силами инерции. В этих случаях следует учитывать не только воздействие колебательной системы и источника энергии друг на друга, но и взаимное влияние источников энергии друг на друга и на колебательную систему.

Исследование движения такой системы в случае синхронизации были проведены в работе [7], а в работе [8] рассматривались колебания электромеханической системы (ЭМС), возбуждаемые электродвигателями переменного тока. В данной работе в качестве источников энергии взяты электродвигатели постоянного тока. В работе [9] было проведено интегрирование системы уравнений методом малого параметра. В предлагаемой работе проводится численное интегрирование системы уравнений. Получены некоторые условия эксплуатации для конкретной колебательной системы.

2. Постановка задачи. Рассмотрим колебательную систему, изображенную на рис. 1 и состоящую из двух источников энергии, один из которых находится на неподвижном основании и соединен упругой связью с подвижным основанием (платформой) другого источника энергии с неуравновешенным эксцентриком. При совместной работе двух источников энергии наблюдаются на практике некоторые области неустойчивости (срыв колебаний, остановки).

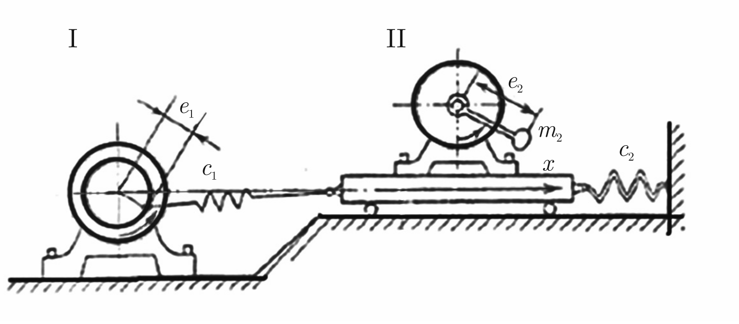

Рис. 1. Эскиз колебательной системы.

Составим выражения механических и электрических составляющих кинетической, потенциальной энергий и диссипативной функции рассматриваемой системы:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2 + 2\dot{\varphi}_2\dot{x}e_2\cos\varphi_2 + e_2\dot{\varphi}_2^2\right) + \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\varphi}_2^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2}L_1\dot{i}_1^2 + \frac{1}{2}L_2\dot{i}_2^2 + \Psi_1 i_1 + \Psi_2 i_2, \\
\Pi &= \frac{1}{2}c_0x^2 + \frac{1}{2}c_1(x - e_1\sin\varphi_1)^2 + m_2e_2g(1-\cos\varphi_2), \\
D &= \frac{1}{2}r\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\rho_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\rho_2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}R_1{i_1}^2 + \frac{1}{2}R_2{i_2}^2,
\end{aligned}
$$

где использованы следующие обозначения: x — координата поступательного движения платформы, φ_1, φ_2 — углы поворотов роторов источников энергии, m_1 — масса, совершающая поступательное перемещение, m_2 — масса неуравновешенного эксцентрика, I_1, I_2 — моменты инерции роторов соответственно первого и второго источников энергии, L_1, L_2 — индуктивность обмотки якорей источников энергии, Ψ_1, Ψ_2 — потокосцепления обмотки со стационарным магнитным полем возбуждения, R_1, R_2 — активные сопротивления обмотки якорей источников энергии, r — коэффициент сил сопротивления, возникающих при поступательном перемещении массы, ρ_1, ρ_2 — коэффициенты моментов сил сопротивления, возникающих при вращении роторов. В качестве источников энергии использована модель источника энергии постоянного тока с независимым возбуждением [2].

Наибольшее распространение для получения уравнений движения таких колебательных систем получили уравнения Лагранжа II рода с обобщением для электромеханических систем, предложенных Максвелом [3, 4]:

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,
$$

поэтому уравнения получили названия уравнения Лагранжа—Максвелла.

Таким образом, уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид [3, 4]

$$\begin{aligned}
&m\ddot{x} + r\dot{x} + cx = c_1 e_1 \sin\varphi_1 - m_2 e_2 \ddot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 + m_2 e_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin\varphi_2,\\
&I_1\ddot{\varphi}_1 + \rho_1\dot{\varphi}_1 = \kappa_1 i_1 + c_1 e_1 x \cos\varphi_1 - c_1 e_2^2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1,\\
&I_2\ddot{\varphi}_2 + \rho_2\dot{\varphi}_2 = \kappa_2 i_2 - m_2 e_2 \ddot{x} \cos\varphi_2 - m_2 e_2 g \sin\varphi_2,\\
&L_1\dot{i}_1 + R_1 i_1 + \kappa_1\dot{\varphi}_1 = u_1,\\
&L_2\dot{i}_2 + R_2 i_2 + \kappa_2\dot{\varphi}_2 = u_2,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $m = m_1 + m_2$, $c = c_1 + c_2$, $I_2 = I + m_2 e_2^2$, l_1, l_2 — эксцентриситеты роторов.

Перейдем теперь к исследованию сложного взаимодействия двух объектов, образующих колебательную систему, когда они порождаются источниками энергии, обладающими мощностью одного порядка. Наиболее важный вид колебаний удается выделить, рассматривая совместно спектры частот в области главного резонанса, то есть когда совпадают угловые скорости вращения роторов источников энергии. Такой случай подробно рассмотрен в [7]. В [9] были получены аналитические результаты при интегрировании системы (1) методом малого параметра.

3. Численное исследование и анализ результатов. Проведем численное интегрирование этой системы уравнений для конкретной колебательной системы, которая служит иллюстрацией качественного характера переходных и установившихся режимов полной математической модели рассматриваемой ЭМС. Пусть параметры этой электромеханической системы имеют следующие значения: $m = 5.8$ кг, $m_2 = 0.29$ кг, $c = 78.04$ Н/м, $c_1 = 25.51$ Н/м, $e_1 = 0.005$ м, $e_2 = 0.0075$ м, $I_1 = 1$ кг·м^2, $I_2 = 1$ кг·м^2, $R_1 = 0.01$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $L_1 = 0.02$ Гн, $L_2 = 0.04$ Гн, $\kappa_1 = 0.01$ Дж/А, $\kappa_2 = 0.02$ Дж/А, $\rho_1 = 0.01$ Дж/с, $\rho_1 = 0.02$ Дж/с, $r = 0.33$ Н·с/м.

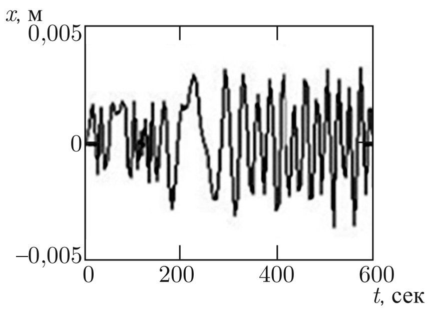

Рис. 2. Колебания платформы при $u = 12$ В.

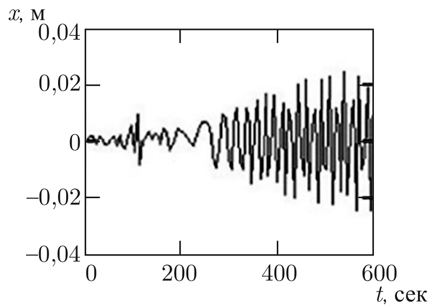

Рис. 3. Колебания платформы при $u = 18$ В.

Проинтегрируем систему уравнений (1) методом Рунге—Кутты и представим результаты интегрирования графически (рис. 2–6). Будем проводить анализ системы в зависимости от величины подводимого напряжения ($u_1 = u_2 = u$). В расчетах выбраны те значения напряжения ($u = 12$, 18, 110, 220, 380 В), которые чаще всего используются в промышленности.

Из рис. 2 и рис. 3 видно, что наибольшая амплитуда колебаний платформы (а нас интересуют режимы малых амплитуд) реализуется при подводимом напряжении $u = 12$, $u = 18$ В, а из рис. 4–6 при значениях $u = 110$, 220, 380 В система начинает колебаться с малыми амплитудами достаточно быстро, что хорошо для промышленных установок. Следовательно, при равномерном увеличении напряжения, надо быстрее пройти малые значения напряжения.

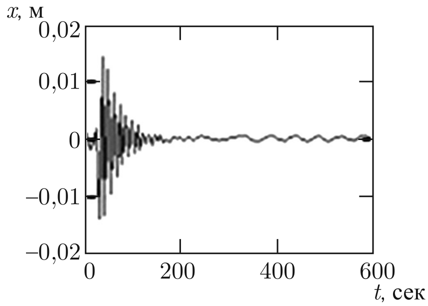

Рис. 4. Колебания платформы при $u = 110$ В.

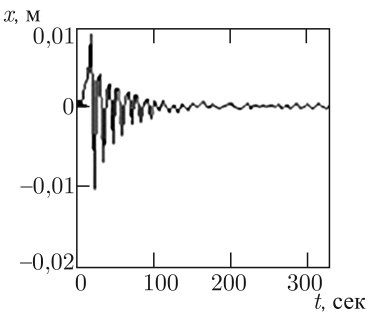

Рис. 5. Колебания платформы при напряжении $u = 220$ В.

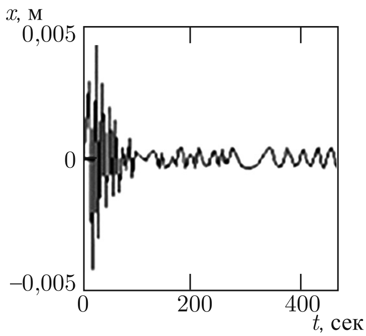

Рис. 6. Колебания платформы при напряжении $u = 380$ В.

4. Заключение. Полученный результат позволяет сделать вывод, что для рассмотренной конкретной колебательной системы и конкретных источников энергии при выбранных параметрах их совместная работа оказывает положительное воздействие, так как в процессе эксплуатации реальных систем как раз и стараются добиться эффекта малости амплитуды колебаний. В данном случае использованный подход позволяет оценить возможность уменьшения вибрации и тем самым способствует улучшению качественных возможностей эксплуатации электромеханических систем.

Литература

1. *Sommerfeld A.* Naturwissenschaftliche Ergebnisse der neueren technischen Mechanik. (Vorgetragen in der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Kassel 1903.) Sitzung der naturwissenschaftlichen Hauptgruppe am 24. Sept. 1903. Erschienen 30. April 1904. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, Bd 48, 1904, S. 631–636.

2. *Кононенко В. О.* Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М., 1964, 256 с.

3. *Львович А. Ю.* Механические колебания, возбуждаемые электродвигателем // Вестн. ЛГУ, 1968, № 7. С. 45–58.

4. *Львович А. Ю., Родюков Ф. Ф.* Уравнения электрических машин. СПб., 1997. 270 с.

5. *Родюков Ф. Ф.* Уравнения Лагранжа в форме Ньютона в электромеханике // Вестн. Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. № 4. Часть 2. Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2011. С. 299–301.

6. *Родюков Ф. Ф.* Четыре шага вперёд в теории электромагнитного поля и в электромеханике. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 116 с.

7. *Колпакова Л. В.* Синхронизация в колебательной системе с ограниченным возбуждением // Вестн. ЛГУ, 1971, № 19. С. 97–103.

8. *Лопатухина И. Е., Федосеева М. В.* Колебания электромеханической системы, возбуждаемые двумя электродвигателями // Вторые Окуневские чтения: тезисы докладов. СПб., 2008. С. 145.

9. *Лопатухина И. Е.* О взаимодействии двух возбуждений в одной электромеханической системе // Прикладная механика. Л., 1995. Вып. 9. С. 79–83.

Статья поступила в редакцию 27 марта 2014 г.

Сведения об авторах

Лопатухина Ирина Евгеньевна — кандидат физико-математических наук, доцент; irevlo@gmail.com

VIBRATIONS OF ELECTROMECHANICAL SYSTEM EXCITED BY TWO DC MOTORS

Irina E. Lopatukhina

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; irevlo@gmail.com

In the article, an electromechanical system (EMS) whose vibrations are excited by two DC motors is considered. EMS motion equations in Lagrange—Maxwell form are provided. Numerical integration of systems of equations for specific examples is done. Diagrams for dependence of platform vibrations on supplied voltage are plotted. Conditions for platform vibration with small amplitudes are obtained. Refs 9. Figs 5.

Keywords: electromechanical system (EMS), equations in Lagrange—Maxwell form, Numerical integration, vibrations.