МАТЕМАТИКА

УДК 517.938

ЗАВИСИМОСТЬ МАКСИМАЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ*

Ю. Н. Бибиков, В. А. Плисс

С.-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

В работе доказывается, что правый конец максимального интервала существования решения дифференциального уравнения

$$\dot{x} = x^n + \sum_{k=1}^{n} p_k(t)x^{n-k}, \quad n > 1 \text{ — целое},$$

является непрерывноо дифференцируемой функцией начальных данных. Библиогр. 1 назв.

Ключевые слова: максимальный интервал существования.

§ 0. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{x} = f(t, x, \mu); \tag{0.1}$$

здесь f — непрерывная и непрерывно дифференцируемая по x, μ в области $G \times M$ функция, где $G \in \mathbb{R}^2$, а $M \subset \mathbb{R}^m$ — область изменения параметров. Обозначим через $x(t, \theta, x_0, \mu)$ решение уравнения (0.1) с начальными данными $t = \theta$, $x = x_0$. Функция $x(t, \theta, x_0, \mu)$ определена на множестве $D = \{(t, \theta, x_0, \mu), (\theta, x_0, \mu) \in G \times M, t \in I\}$, где $I(\theta, x_0, \mu)$ — максимальный интервал существования решения. Согласно классической теореме о дифференцируемости решения множество D открыто и связно, а x непрерывно дифференцируемо по всем аргументам в D (см. [1]).

Возникает вопрос о дифференцируемости концов максимального интервала существования решения как функции переменных θ, x_0, μ. В настоящей работе этот вопрос решается для уравнений вида

$$\dot{x} = x^n + \sum_{k=1}^{n} p_k(t, \mu)x^{n-k}, \quad n > 1 \text{ — целое}, \tag{0.2}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 13-01-00439, 13-01-00624) и тематического плана СПбГУ (6.0.112.2010).

у которых коэффициенты $p_k(t,\mu)$, $k=1,\ldots,n$, непрерывны и ограничены по t вместе с производными по координатам вектора μ при $t\in(t_1,t_2)$, $\mu\in M$. Частными случаями уравнения (0.2) являются уравнения Риккати ($n=2$) и Абеля ($n=3$).

Хорошо известно и легко доказывается, что при $t_2=+\infty$ существует число $h\geq 0$ и функция $\tau(\theta,x_0,\mu)$ такие, что $\tau(\theta,x_0,\mu)>\theta$ и решение $x(t,\theta,x_0,\mu)$ уравнения (0.2) при $x_0>h$, $\mu\in M$, $\theta\in(t_1,t_2)$ определено при $\theta\leq t<\tau$, возрастает на этом промежутке как функция t и $x(t,\theta,x_0,\mu)\to\infty$ при $t\to\tau(\theta,x_0,\mu)$.

Например $h=0$, $\tau=\theta+x_0^{-1}$ для уравнения $\dot{x}=x^2$. Для этого уравнения правый конец τ максимального интервала существования решения $x(t,\theta,x_0)$ — непрерывно дифференциремая функция при $x_0>0$. Вместе с тем для сужения этого уравнения на область $t<t_2$, $t_2>0$ имеем $\tau=\theta+x_0^{-1}$, если $\theta+x_0^{-1}\leq t_2$, и $\tau=t_2$, если $\theta+x_0^{-1}\geq t_2$. Эта функция непрерывна в области $\theta<t_2$, $x_0>0$, но ее частные производные терпят разрыв на линии $x_0=(t_2-\theta)^{-1}$.

Остальная часть работы посвящена доказательству следующего утверждения.

Рассматривается случай, когда $(t_1,t_2)=(-\infty,+\infty)$.

Теорема. *Правый конец τ максимального интервала существования решения $x(t,\theta,x_0,\mu)$ является непрерывно дифференцируемой функцией в области $\theta\in(-\infty,+\infty)$, $x_0>h$, $\mu\in M$.*

Мы ограничимся доказательством дифференцируемости по переменной θ, так как доказательство дифференцируемости по x_0 и μ проводится с помощью аналогичных рассуждений. Соответственно опускаются указания на зависимость функций от x_0, μ.

§ 1. Случай $n=2$ (уравнение Риккати). Начнем со случая $n=2$, т. е. рассмотрим уравнение Риккати

$$\dot{x}=x^2+p(t)x+q(t), \tag{1.1}$$

где p и q непрерывны и ограничены при $t\in(t_1,t_2)$, $|p|<H$, $|q|<H$.

Совершим в (1.1) замену переменной $x=\frac{1}{u}$, $u>0$.

Получаем

$$-\frac{\dot{u}}{u^2}=\frac{1}{u^2}+p(t)\frac{1}{u}+q(t). \tag{1.2}$$

Умножая это равенство на $-u^2$, получаем уравнение

$$\dot{u}=-1-p(t)u-q(t)u^2. \tag{1.3}$$

Уравнения (1.2) и (1.3) равносильны при $u\neq 0$.

Исследуем сначала уравнение (1.3). Выберем положительное число a столь малым, чтобы выполнялось

$$Ha+Ha^2<\frac{1}{2}. \tag{1.4}$$

Пусть $u(t,\theta)$ — решение уравнения (1.3) с начальными данными $t=0$, $u=a$, тогда, благодаря (1.4), до тех пор, пока $|u(t,\theta)|\leq a$, выполняются неравенства

$$-\frac{3}{2}<\dot{u}<-\frac{1}{2}. \tag{1.5}$$

Решение $u(t,\theta)$, таким образом, есть строго убывающая функция t при условии, что $|u(t,\theta)|\leq a$. Отсюда следует, что для каждого θ найдется $t'(\theta)$ такое, что

$u(t'(\theta),\theta)=-a$ и $a\geq u(t,\theta)>-a$ при $\theta\leq t<t'(\theta)$. На промежутке $(\theta,t'(\theta))$ существует единственная точка $\tau(\theta)$ такая, что

$$u(\tau(\theta),\theta)=0. \tag{1.6}$$

Покажем, что функция $\tau(\theta)$ непрерывно дифференцируема при $\theta\in(t_1,t_2)$.

Выберем произвольное число $\theta_0\in(t_1,t_2)$ и положим $t_0=\tau(\theta_0)$. По теореме о дифференцируемости решений по начальным данным существует $\delta>0$ такое, что при $-\delta\leq\theta-\theta_0\leq\delta$ решение $u(t,\theta)$ определено при $\theta\leq t\leq t_0+\delta$, непрерывно дифференцируемо по θ и t и удовлетворяет неравенству $|u(t,\theta)|\leq a$.

Имеем $u(t_0,\theta_0)=0$, кроме того, поскольку $u(t,\theta_0)$ есть решение уравнения (1.3), $\frac{\partial u(t_0,\theta_0)}{\partial t}=-1$; отсюда по теореме о неявных функциях существует $\varepsilon>0$ такое, что на промежутке $|\theta-\theta_0|\leq\varepsilon$ определена непрерывно дифференцируемая функция $\tau(\theta)$ такая, что

$$u(\tau(\theta),\theta)=0.$$

Эта функция совпадает с функцией, определяемой равенством (1.6). При $|\theta-\theta_0|\leq\varepsilon$ и $\theta\leq t<\tau(\theta)$ выполняются неравенства $0<u(t,\theta)\leq a$, следовательно, при таких t и θ $u(t,\theta)$ есть также решение уравнения (1.2) и $u(t,\theta)\to0$ при $t\to\tau(\theta)$.

Возвращаемся к переменной x. Решение $x(t,\theta)$ уравнения (1.1) с начальными данными $t=\theta$, $x=\frac{1}{a}$ задается формулой $x(t,\theta)=\frac{1}{u(t,\theta)}$ и поэтому $x(t,\theta)$ определено при $\theta\leq t<\tau(\theta)$, возрастает при таких t и $x(t)\to\infty$ при $t\to\tau(\theta)$. Это доказывает теорему при $n=2$.

§ 2. Общий случай. В уравнении (0.2) выполним замену

$$x=\frac{1}{u^{1/(n-1)}}\quad\text{при}\quad u>0.$$

Тогда

$$-\frac{1}{n-1}\frac{\dot u}{u^{n/(n-1)}}=\frac{1}{u^{n/(n-1)}}+\sum_{k=1}^{n}p_k(t)u^{-(n-k)/(n-1)}; \tag{2.1}$$

отсюда

$$\dot u=-(n-1)\left(1+\sum_{k=1}^{n}p_k(t)u^{k/(n-1)}\right). \tag{2.2}$$

Это уравнение определено при $u\geq0$, однако оно равносильно (2.1) только при $u>0$. Заметим, что при $n>2$ производная правой части (2.2) по u имеет особенность в нуле.

Выберем $a>0$ столь малым, чтобы было

$$H\sum_{k=1}^{n}a^{k/(n-1)}<\frac{1}{2}.$$

Тогда при $0<u\leq a$ будем иметь

$$-\frac{3(n-1)}{2}<\dot u<-\frac{n-1}{2}. \tag{2.3}$$

Пусть $u(t,\theta)$ — решение уравнения (2.2) с начальными данными $t=\theta$, $u=a$. Из неравенств (2.3) следует, что решение $u(t,\theta)$ есть строго убывающая функция при условии, что $a\geq u\geq0$.

Пусть $0 < \alpha < a$. Ввиду монотонности решения $u(t,\theta)$ существует единственная функция $\tau_\alpha(\theta)$ такая, что $u(\tau_\alpha(\theta),\theta) = \alpha$. Покажем, что эта функция непрерывно дифференцируема по θ. Выберем произвольное θ_0 и положим $t_0^\alpha = \tau_\alpha(\theta_0)$. По теореме о дифференцируемости решений по начальным данным существует $\delta > 0$ такое, что если $-\delta \le \theta - \theta_0 \le \delta$, то решение $u(t,\theta)$ определено при $\theta \le t \le t_0^\alpha + \delta$ непрерывно дифференцируемо по t и θ и удовлетворяет неравенству $0 < u(t,\theta) \le a$.

Рассмотрим уравнение

$$u(t,\theta) = \alpha. \tag{2.4}$$

По определению t_0^α имеем

$$u(t_0^\alpha, \theta_0) = \alpha.$$

Кроме того, как следует из (2.3), $\frac{\partial u(t_0^\alpha),\theta_0}{\partial t} < -\frac{n-1}{2}$.

По теореме о неявных функциях существует $\varepsilon > 0$ такое, что на промежутке $|\theta - \theta_0| \le \varepsilon$ определено непрерывно дифференцируемое решение $\tau_\alpha(\theta)$ уравнения (2.4). Это, ввиду единственности, и показывает, что $\tau_\alpha(\theta)$ непрерывно дифференцируемо при $\theta \in (t_1, t_2)$.

Функция $u(t,\theta)$ строго убывает по t. Отсюда следует, что $\tau_\alpha(\theta)$ строго убывает по α, откуда вытекает, что существует предел $\lim\limits_{\alpha\to 0} \tau_\alpha(\theta) = \tau(\theta)$.

Ввиду неравенства (2.3) предел этот достигается равномерно по θ.

Докажем, что $\tau(\theta)$ непрерывно дифференцируема.

Функция $\tau_\alpha(\theta)$ есть решение уравнения (2.4), значит

$$\frac{d\tau_\alpha(\theta)}{d\theta} = -\frac{\frac{\partial u(\tau_\alpha(\theta),\theta)}{\partial \theta}}{\frac{\partial u(\tau_\alpha(\theta),\theta)}{\partial t}}. \tag{2.5}$$

Знаменатель в этой формуле согласно (2.3) меньше $-\frac{n-1}{2}$.

Рассмотрим числитель. Известно, что $\frac{\partial u(t,\theta)}{\partial \theta}$ есть решение линеаризованного в окрестности $u(t,\theta)$ уравнения (2.2), т. е. уравнения

$$\dot z = -(n-1)\left(\sum_{k=1}^{n-2} p_k(t) u^{(k-n+1)/(n-1)} + p_{n-1}(t)u + p_n(t)u^{1/(n-1)}\right) z,$$

откуда

$$z = C\exp\left\{\sum_{k=1}^{n-2}\int\limits_\theta^t u^{(k-n+1)/(n-1)}dt + \int\limits_\theta^t p_{n-1}(t)u\,dt + \int\limits_\theta^t p_n(t)u^{1/(n-1)}dt\right\}.$$

Два последних интеграла особенностей при $t = \tau(\theta)$ не имеют.

Покажем, что все интегралы под знаком суммы сходятся равномерно при $t \to \tau(\theta)$.

Исследуем сходимость интеграла $\int\limits_\theta^{\tau(\theta)} \frac{dt}{u^r(t)}$, где $\tau(\theta)$ таково, что $u(\tau(\theta),\theta) = 0$, а $0 < r < 1$. Запишем (2.3) в виде

$$-b < \dot u < -c.$$

Вводим новую переменную s по формуле $t = s + \tau(\theta)$. Тогда $v(s) = u(s + \tau(\theta))$ и при $s = 0$ имеем $v(0) = u(\tau(0)) = 0$. Так как $\dot{u} = \frac{dv}{ds}$,

$$-b < \frac{dv}{ds} < -c.$$

Интегрируя эти неравенства от s до 0, находим

$$bs < -u(s+\tau) < cs, \text{ или } -bs > u(s+\tau) > -cs.$$

Отсюда

$$-\frac{1}{bs} < \frac{1}{u(s+\tau)} < -\frac{1}{cs}.$$

Возводим выражения в последних неравенствах в степень r:

$$\frac{1}{b^r(-s)^r} < \frac{1}{u^r(s+\tau)} < \frac{1}{c^r(-s)^r}.$$

Интегрируя второе неравенство от $\theta - \tau(\theta)$ до 0, получаем

$$\int\limits_{\theta-\tau(\theta)}^{0} \frac{ds}{u^r(s+\tau)} < \frac{1}{c^r} \int\limits_{\theta-\tau(\theta)}^{0} \frac{ds}{(-s)^r}. \tag{2.6}$$

Правый интеграл мажорирует левый. Выясняем сходимость правого интеграла в нуле. Положим $s = -\sigma$, тогда

$$\int\limits_{\theta-\tau(\theta)}^{0} \frac{ds}{(-s)^r} = -\int\limits_{\tau-\theta}^{0} \frac{d\sigma}{\sigma^r} = \int\limits_{0}^{\tau-\theta} \frac{d\sigma}{\sigma^r} = \frac{1}{1-r}\left(\sigma^{1-r}\right)\Big|_0^{\tau-\theta}.$$

Таким образом, интеграл справа в (2.6) сходится, так как $\tau(\theta)$ ограничено. Значит, интеграл слева сходится равномерно, а с ним и исходный интеграл.

Отсюда и из (2.5) следует, что функция $\frac{d\tau_\alpha(\theta)}{d\theta}$ сходится при $\alpha \to 0$ равномерно по θ. Откуда и следует, что $\tau(\theta)$ непрерывно дифференцируема.

Рассуждая, как в конце § 1, устанавливаем, что функция $\tau(\theta)$ и есть та функция, дифференцируемость которой требовалось доказать.

Теорема доказана.

Замечание. Утверждение теоремы справедливо и для левого конца максимального интервала существования.

Литература

1. *Бибиков Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. 2-е изд., стер. СПб.: Издательство «Лань», 2011. 304 с.

Статья поступила в редакцию 26 июня 2014 г.

Сведения об авторах

Бибиков Юрий Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор; bibicoff@yandex.ru

Плисс Виктор Александрович — доктор физико-математических наук, профессор; anna1918@mail.ru

ON THE DEPENDENCE OF INITIAL VALUES OF THE MAXIMAL INTERVAL OF EXISTENCE OF A SOLUTION OF A DIFFERENTIAL EQUATION

Yuri N. Bibikov, Victor A. Pliss

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; bibicoff@yandex.ru, anna1918@mail.ru

It is proved that the right-hand end of the maximal interval of existence of a solution of the differential equation

$$\dot{x} = x^n + \sum_{k=1}^{n} p_k(t) x^{n-k}, \quad n > 1 \text{ is an integer},$$

is a smooth function of initial values. Refs 1.

Keywords: maximal interval of existence.