УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 4

# СХЕМА БЕРНУЛЛИ И ОБОБЩЕНИЯ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

*О. А. Иванов*

С.-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Установлена связь задачи о последовательных успехах в схеме Бернулли и последовательностью обобщенных чисел Фибоначчи. Библиогр. 2 назв.

*Ключевые слова*: схема Бернулли, рекуррентные соотношения, числа Фибоначчи.

Рассмотрим следующую достаточно известную задачу: сколько раз «в среднем» придется подбросить монету, чтобы «орел» выпал два раза подряд? Решение этой задачи приведено, например, в [1, раздел 8.4]. Конечно, «бросать» можно не монету, а, к примеру, «игральный кубик» до первого появления заданного количества $k$ «шестерок» подряд. С формальной точки зрения постановка задачи состоит в следующем. Пусть в схеме Бернулли событие $h$ появляется с вероятностью $p$, а событие $t$ — с вероятностью $q = 1 - p$. Рассмотрим случайную величину $X$, значениями которой являются количества проведенных испытаний до первого появления подряд $k$ событий $h$. Производящая функция случайной величины $X$ хорошо известна (см. например, [2, глава XIII, § 7]).

Однако исходная задача «о монете» связана также с задачей о покрытии прямоугольника $2 \times n$ костяшками домино размера $2 \times 1$, при решении которой возникают числа Фибоначчи (см. [1, раздел 7.1]). Цель данной заметки состоит в том, чтобы связать функцию $G_X$ с производящей функцией $\varphi(t)$ числовой последовательности $x_n$, являющейся обобщением последовательности Фибоначчи. Поскольку производящая функция $\varphi(t)$ строится стандартным образом, мы, в частности, получаем новое доказательство формулы для производящей функции рассматриваемой случайной величины.

Будем рассматривать последовательности событий, в которых событие $h$ не происходит $k$ раз подряд. Каждая последовательность событий изображается словом двубуквенного алфавита. На языке слов сделанное предположение означает, что рассматриваются слова, в которых нет $k$ стоящих рядом букв $h$. Обозначим через $H_n^i$, где $i = 0, 1, \ldots, k - 1$, событие, состоящее в том, что в последовательности из $n$ испытаний последние $i$ раз произошло событие $h$. Ясно, что при $i = 0$ это означает, что в последнем испытании произошло событие $t$. Обозначим через $u_n^{(i)}$ вероятность события $H_n^i$.

При $i = 0, 1, \ldots, k - 2$ переход

$$\underbrace{\ldots t\overbrace{h\ldots h}^{i}}_{n} \mapsto \underbrace{\ldots t\overbrace{h\ldots hh}^{i+1}}_{n+1}$$

происходит с вероятностью $p$, откуда следует, что $u_{n+1}^{(i+1)} = p\, u_n^{(i)}$. Поскольку вероятность события $t$ равна $q = 1 - p$, получаем $u_{n+1}^{(0)} = (1-p)\big(u_n^{(0)} + u_n^{(1)} + \ldots + u_n^{(k-1)}\big)$.

Таким образом, мы приходим к следующей системе рекуррентных соотношений:

$$\begin{cases} u_{n+1}^{(0)} = (1-p)\big(u_n^{(0)} + u_n^{(1)} + \dots + u_n^{(k-1)}\big), \\ u_{n+1}^{(1)} = p\, u_n^{(0)}, \\ u_{n+1}^{(2)} = p\, u_n^{(1)}, \\ \dots \\ u_{n+1}^{(k-1)} = p\, u_n^{(k-2)}. \end{cases}$$

При $n \geq k-1$ положим $v_n = u_n^{(k-1)}$. Тогда

$$\begin{aligned} u_n^{(0)} &= \frac{1}{p}\, u_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{p^2}\, u_{n+2}^{(2)} = \dots = \frac{1}{p^{k-1}}\, u_{n+k-1}^{(k-1)} = \frac{1}{p^{k-1}}\, v_{n+k-1}, \\ u_n^{(1)} &= \frac{1}{p}\, u_{n+1}^{(2)} = \dots = \frac{1}{p^{n-2}}\, u_{n+k-2}^{(k-1)} = \frac{1}{p^{k-2}}\, v_{n+k-2}, \\ &\dots \\ u_n^{(k-1)} &= v_n, \\ u_{n+1}^{(0)} &= \frac{1}{p^{k-1}}\, v_{n+k}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\frac{v_{n+k}}{p^{k-1}} = (1-p)\left(\frac{v_{n+k-1}}{p^{k-1}} + \frac{v_{n+k-2}}{p^{k-2}} + \dots + v_n\right).$$

Поделив обе части полученного соотношения на $p^n$, получим соотношение

$$\frac{v_{n+k}}{p^{n+k-1}} = (1-p)\left(\frac{v_{n+k-1}}{p^{n+k-1}} + \frac{v_{n+k-2}}{p^{n+k-2}} + \dots + \frac{v_n}{p^n}\right).$$

Положив $x_n = v_n\, p^{-n}$, получим, что $px_{n+k} = (1-p)(x_{n+k-1} + x_{n+k-2} + \dots + x_n)$, или

$$x_{n+k} = \frac{1-p}{p}\,(x_{n+k-1} + x_{n+k-2} + \dots + x_n). \tag{1}$$

Если $p = 1/2$, то полученное соотношение имеет вид $x_{n+k} = x_{n+k-1} + x_{n+k-2} + \dots + x_n$, которое, в свою очередь, при $k = 2$ совпадает с рекуррентным соотношением для чисел Фибоначчи.

Подчеркнем, что соотношение (1) установлено для $n \geq k-1$. При $n = 0, 1, \dots, k-2$ положим $x_n = 0$ и вычислим значения $x_n$ при $n = k-1, k, \dots, 2k-1$.

По определению $x_n = v_n p^{-n} = u_n^{(k-1)} p^{-n} = P\big(H_n^{k-1}\big)p^{-n}$. Событие $H_{k-1}^{k-1}$ состоит из одного слова $h \dots h$ длины $k-1$, поэтому его вероятность равна $p^{k-1}$, следовательно, $x_{k-1} = 1$. Если $k \leq n \leq 2k-1$, то событие $H_n^{k-1}$ состоит из слов вида $\underbrace{\dots t\overbrace{h \dots h}^{k}}_{n}$. На месте многоточий в начале этих слов могут находиться любые буквы, следовательно $P\big(H_n^{k-1}\big) = (1-p)p^{k-1}$, таким образом, $x_n = (1-p)p^{k-n-1}$ при $n = k, k+1, \dots, 2k-1$.

**Лемма 1.** *Соотношение* (1) *справедливо при всех целых* $n \geq 0$.

Доказательство. При $n = 0$ соотношение приобретает вид $x_k = (1-p)/p\, x_{k-1}$. Оно верно, так как $x_k = (1-p)/p$, а $x_{k-1} = 1$. Если $1 \leq n \leq k-1$, то $k+1 \leq n+k \leq$

$2k-1$, поэтому $x_{n+k}=(1-p)p^{-n-1}$. Вычислим теперь правую часть равенства (1). Имеем

$$x_{n+k-1}+x_{n+k-2}+\dots+x_n=\frac{1-p}{p^n}+\frac{1-p}{p^{n-1}}+\dots+\frac{1-p}{p}+1+0+\ldots+0=$$
$$=\frac{1-p+p-p^2+\dots+p^{n-1}-p^n+p^n}{p^n}=\frac{1}{p^n}\,,$$

поэтому правая часть этого равенства равна $(1-p)p^{-1}p^{-n}=(1-p)p^{-n-1}=x_{n+k}$.

**Лемма 2.** *Производящая функция последовательности $x_n$ определяется формулой*

$$\varphi(t)=\frac{t^{k-1}}{1-\frac{1-p}{p}\,(t+t^2+\dots+t^k)}=\frac{p(t^{k-1}-t^k)}{(1-p)t^{k+1}-t+p}\,. \tag{2}$$

Доказательство. По определению $\varphi(t)=\sum_{n=k-1}^{\infty}x_nt^n$. Раскрыв скобки в произведении

$$\left(x_{k-1}t^{k-1}+x_kt^k+\cdots\right)\Big(1-\frac{1-p}{p}(t+t^2+\dots+t^k)\Big),$$

мы получим, что

$$x_{k-1}t^{k-1}+\Big(x_k-\frac{1-p}{p}\,x_{k-1}\Big)t^k+\Big(x_{k+1}-\frac{1-p}{p}\,(x_k+x_{k-1})\Big)t^{k+1}+\dots+$$
$$+\Big(x_{2k-2}-\frac{1-p}{p}\,(x_{2k-3}+\dots+x_{k-1})\Big)t^{2k-2}+\dots+$$
$$+\Big(x_{n+k}-\frac{1-p}{p}\,(x_{n+k-1}+\dots+x_n)\Big)t^{n+k}+\dots=t^{k-1}$$

в силу соотношения (1), откуда и следует равенство (2).

**Лемма 3.** *Справедливо равенство $G_X(t)=pt\varphi(pt)$, где $\varphi(t)$ — производящая функция последовательности $x_n$.*

Доказательство. Заметим, что вероятность того, что после $n$-го испытания в схеме Бернулли в первый раз произошли $k$ событий $h$ раз подряд, равна произведению $p$ и вероятности события $H_{n-1}^{k-1}$, таким образом,

$$P(X=n)=pP\big(H_{n-1}^{k-1}\big)=pu_{n-1}^{k-1}=pv_{n-1}=p^nx_{n-1}.$$

Поэтому

$$G_X(t)=\sum_{n=k}^{\infty}P(X=n)t^n=\sum_{n=k}^{\infty}p^nx_{n-1}t^n=pt\sum_{n=k-1}^{\infty}x_n(pt)^n=pt\varphi(pt).$$

В заключение автор выражает свою признательность О. В. Русакову, обратившему его внимание на эту задачу.

**Литература**

1. *Грехем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основания информатики / пер. с англ. М.: Мир, 1998. 703 с.

2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1 / пер. с англ. М.: Мир, 1984. 529 с.

Статья поступила в редакцию 26 июня 2014 г.

Сведения об авторе

*Иванов Олег Александрович* — доктор педагогических наук, профессор; oleg_ivanov2002@mail.ru

**BERNOULLY TRIAL AND GENERALIZATIONS OF FIBONACCI NUMBERS**

*Oleg A. Ivanov*

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; oleg_ivanov2002@mail.ru

The occurence of a success run of length $k$ in a sequence of Bernoulli trials is connected with a sequence of generalized Fibonacci numbers. Refs 2.

*Keywords*: Bernoully trial, recurrence relations, Fibonacci numbers.