

ВЫЧИСЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С СИНХРОНИЗАЦИЕЙ СОБЫТИЙ*

Н. К. Кривулин, О. А. Нев

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Изучается модель стохастической динамической системы с синхронизацией событий. Динамика системы описывается обобщенным линейным уравнением с матрицей, у которой есть один случайный элемент на диагонали, а остальными элементами являются неотрицательные константы, связанные между собой некоторыми соотношениями. Рассматривается задача определения средней асимптотической скорости роста вектора состояний (показателя Ляпунова) системы. Решение включает замену переменных, в результате которой вместо случайных координат вектора состояний вводятся новые случайные величины. Показано, что во многих случаях подходящий выбор новых переменных позволяет свести задачу к исследованию только одной последовательности случайных величин, заданной рекуррентным уравнением определенного вида, которое зависит только от двух из трех констант в матрице системы. После построения такой последовательности случайных величин исследуется ее сходимости. Показатель Ляпунова системы находится как среднее значение предельного распределения последовательности. Библиогр. 10 назв. Ил. 1.

Ключевые слова: стохастическая динамическая система, показатель Ляпунова, сходимости распределений, синхронизация событий.

1. Введение. Алгоритмы, согласно которым функционируют многие системы в экономике, технике, управлении и других областях, нередко предполагают синхронизацию определенных событий, происходящих в системе. Динамика таких систем во времени во многих случаях может быть описана при помощи линейных в некотором идемпотентном полукольце [1, 2, 7] векторных уравнений со случайной матрицей переходов.

Особый интерес при анализе таких систем представляет исследование средней асимптотической скорости роста вектора состояний системы (показателя Ляпунова). Однако точное вычисление значения показателя Ляпунова часто является не совсем простой задачей. Большинство результатов в этой области получены для систем с матрицей второго порядка и экспоненциальным распределением ее случайных элементов (см., например, работы [3–8]). Некоторые результаты для таких систем с матрицами, у которых часть элементов являются случайными величинами, а на месте других стоят неотрицательные константы или нули, представлены в следующем разделе.

В настоящей работе рассматривается задача вычисления показателя Ляпунова для систем с матрицей второго порядка, недиагональными элементами которых являются неотрицательная случайная величина и положительная константа, а диагональными элементами — другие неотрицательные константы, связанные между собой некоторыми соотношениями. Такая модель системы является обобщением уже изученных моделей, для которых матрица имеет один случайный элемент и одну неотрицательную константу. Она возникает, например при исследовании эффективности

*Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (проект № 13-02-00338).

работы информационно поисковой системы, в которой обмен сообщениями между пользователем и сервером системы определенным образом синхронизирован.

Для решения задачи применяется подход, предложенный в работе [3] для системы с матрицей, у которой все элементы являются случайными величинами, а затем использованный в работах [5–7]. Этот подход предполагает замену переменных, в результате которой вместо случайных координат вектора состояний системы вводятся новые случайные величины, анализ которых оказывается более простым.

Для исследуемой системы оказывается, что при достаточно общих условиях вычисление показателя Ляпунова сводится к анализу одного и того же рекуррентного соотношения для случайных величин некоторой последовательности. Рассматривается соответствующая последовательность одномерных функций распределения вероятностей и исследуется ее сходимости для случая экспоненциального распределения. Показатель Ляпунова вычисляется как среднее значение предельного распределения.

2. Стохастическая динамическая система. В этом разделе сначала представлена актуальная практическая задача анализа эффективности некоторой информационно-поисковой системы, которая приводит к построению и изучению асимптотических характеристик исследуемой модели стохастической динамической системы с синхронизацией событий. Затем определяется показатель Ляпунова системы и формулируется общая задача его вычисления. В заключение представлены известные результаты вычисления показателя Ляпунова для других динамических систем с синхронизацией событий с матрицами второго порядка.

2.1. Информационно-поисковая система. Рассмотрим информационно-поисковую систему, состоящую из пользователя, который занят поиском информации, и сервера системы. Пользователь формулирует и отправляет запрос на сервер, который обрабатывает полученный запрос и отправляет назад найденную информацию. Время составления запроса и передачи его на сервер, а также время обработки запроса на сервере задаются константами. Время передачи результатов обработки от сервера к пользователю — величина случайная, поскольку объем передаваемой информации может существенно различаться для разных запросов. Предполагается, что используется сравнительно медленная линия связи, а потому передача запроса на сервер требует не меньше времени, чем его составление и обработка.

Работа системы представляет собой последовательность циклов, начало и конец которых совпадают (синхронизированы) с наступлением в системе определенных событий. Очередной цикл для пользователя завершается, когда составлен текущий запрос и получена информация от сервера в ответ на предыдущий запрос. По завершении цикла осуществляется отправка текущего запроса и начинается процесс составления нового.

Очередной цикл для сервера заканчивается, как только обработан текущий запрос и поступил новый запрос для обработки. После завершения цикла начинается передача информации по текущему запросу, а сервер приступает к обработке нового запроса.

По завершении своего цикла пользователь и сервер немедленно начинают следующий цикл. Цикл всей системы заканчивается, как только пользователь и сервер завершают свои циклы. Важной характеристикой системы, которая несет информацию о ее эффективности, является среднее асимптотическое время цикла работы системы.

Для каждого цикла $k = 1, 2, \dots$ введем следующие обозначения:

$x(k)$ — время завершения цикла пользователя,

$y(k)$ — время завершения цикла сервера,

a — время формирования запроса пользователем,

d — время обработки запроса сервером,

β_k — время передачи результатов обработки запроса от сервера к пользователю,

c — время передачи запроса от пользователя к серверу.

Предположим, что в начальный момент времени пользователь располагает информацией, поступившей от сервера, и сформулирован текущий запрос. На сервере есть готовая к отправке информация для пользователя, и поступил новый запрос на обработку. Задача состоит в определении среднего времени цикла всей системы.

С учетом условия $x(0) = y(0) = 0$ динамика системы для всех $k = 1, 2, \dots$ может быть описана с помощью уравнений

$$\begin{aligned} x(k) &= \max(x(k-1) + a, y(k-1) + \beta_k), \\ y(k) &= \max(x(k-1) + c, y(k-1) + d). \end{aligned}$$

Среднее асимптотическое время цикла системы, которое часто называют показателем Ляпунова системы, определяется как предел:

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \max(x(k), y(k)). \quad (1)$$

Введем матрицу переходов $A(k)$ и вектор состояний $z(k)$ системы:

$$A(k) = \begin{pmatrix} a & \beta_k \\ c & d \end{pmatrix}, \quad z(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix}, \quad z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где a, c, d — неотрицательные константы, причем $c \geq a$ и $c \geq d$, а случайные элементы матрицы образуют последовательность $\{\beta_k | k \geq 1\}$ одинаково распределенных независимых неотрицательных случайных величин с конечным математическим ожиданием.

Эволюцию динамической системы можно описать с помощью векторного уравнения

$$z(k) = A(k) \otimes z(k-1), \quad (2)$$

где знак $\otimes$ обозначает операцию умножения матрицы на вектор, которая выполняется по обычным правилам с заменой скалярных операций сложения на вычисление максимума и умножения на сложение [7].

2.2. Показатель Ляпунова системы. Рассмотрим стохастическую динамическую систему (2). С помощью эргодической теоремы из [7] можно показать, что для рассматриваемой системы предел (1) существует с вероятностью 1, и выполняется равенство

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \mathbf{E} \max(x(k), y(k)). \quad (3)$$

Из (4) следует, что для нахождения показателя Ляпунова от исследования сходимости максимумов случайных величин можно перейти к исследованию сходимости средних значений этих максимумов.

Ниже представлены некоторые результаты вычисления показателя Ляпунова для системы (2) с матрицами второго порядка. Символы $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ на месте элементов матриц обозначают независимые при любом k случайные величины, которые имеют экспоненциальные распределения с параметрами μ, ν, τ, σ соответственно.

Для систем с матрицами, которые имеют нулевые элементы, получены следующие результаты [6, 7]:

$$\begin{aligned} A(k) &= \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda &= \frac{1}{\mu}; \\ A(k) &= \begin{pmatrix} 0 & \beta_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda &= \frac{2}{3\nu}; \\ A(k) &= \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 0 & \delta_k \end{pmatrix}, & \lambda &= \frac{\mu^4 + \mu^4\tau + \mu^2\tau^2 + \mu\tau^3 + \tau^4}{\mu\tau(\mu + \tau)(\mu^2 + \tau^2)}; \\ A(k) &= \begin{pmatrix} 0 & \beta_k \\ \gamma_k & 0 \end{pmatrix}, & \lambda &= \frac{4\nu^2 + 7\nu\sigma + 4\sigma^2}{6\nu\sigma(\nu + \sigma)}; \\ A(k) &= \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda &= \frac{2\mu^4 + 7\mu^3\nu + 10\mu^2\nu^2 + 11\mu\nu^3 + 4\nu^4}{\mu\nu(\mu + \nu)^2(3\mu + 4\nu)}. \end{aligned}$$

Для случая матриц, среди элементов которых есть нули и неотрицательные константы, решения имеют вид [8, 9]

$$\begin{aligned} A(k) &= \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, & \lambda &= c + \frac{2e^{-3\mu c}}{\mu(2 - 4\mu c e^{-\mu c} + \mu^2 c^2 e^{-2\mu c})}; \\ A(k) &= \begin{pmatrix} c & \beta_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda &= c + \frac{2e^{-2\nu c}}{\nu(2 + e^{-2\nu c})}; \\ A(k) &= \begin{pmatrix} \alpha_k & c \\ c & c \end{pmatrix}, & \lambda &= c + \frac{2e^{-\mu c}}{\mu(2 + e^{-\mu c} - 2e^{-2\mu c} + e^{-3\mu c})}. \end{aligned}$$

Пусть $\{\alpha_k | k \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин, принимающих значения на интервале $[0, \infty)$, с общим распределением вероятностей с функцией распределения $F_\alpha(t)$ и конечным средним a . Известны следующие результаты [9, 10], общая форма которых не зависит от вида распределения случайной величины:

$$\begin{aligned} A(k) &= \begin{pmatrix} \alpha_k & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda &= a + \int_0^c \frac{F_\alpha(t)F_\alpha(c-t)(1-F_\alpha(t))}{1-F_\alpha(t)F_\alpha(c-t)} dt; \\ A(k) &= \begin{pmatrix} \alpha_k & c \\ c & 0 \end{pmatrix}, & \lambda &= a + \int_0^{2c} \frac{F_\alpha(t)F_\alpha(2c-t)(1-F_\alpha(t))}{1-F_\alpha(t)F_\alpha(2c-t)} dt. \end{aligned}$$

В частности, если случайная величина α_k распределена по экспоненциальному закону, имеем

$$\begin{aligned} A(k) &= \begin{pmatrix} \alpha_k & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda &= \frac{c}{2} + \frac{e^{-\mu c}}{\mu} + \frac{3 \arctg \sqrt{4e^{\mu c} - 1} - \pi}{\mu \sqrt{4e^{\mu c} - 1}}; \\ A(k) &= \begin{pmatrix} \alpha_k & c \\ c & 0 \end{pmatrix}, & \lambda &= c + \frac{e^{-2\mu c}}{\mu} + \frac{3 \arctg \sqrt{4e^{2\mu c} - 1} - \pi}{\mu \sqrt{4e^{2\mu c} - 1}}. \end{aligned}$$

3. Исследование динамического уравнения системы. Рассмотрим стохастическую динамическую систему (2) с матрицей

$$A(k) = \begin{pmatrix} a & \beta_k \\ c & d \end{pmatrix},$$

где $c \geq a$, $c \geq d$ — неотрицательные константы, $\{\beta_k | k \geq 1\}$ — последовательность независимых неотрицательных случайных величин с общим распределением вероятностей с функцией распределения $F_\beta(t)$ и конечным средним.

Покажем, что при достаточно общих условиях исследование такой системы может быть сведено к анализу одного рекуррентного уравнения для некоторой скалярной последовательности случайных величин.

Исследуем систему скалярных уравнений

$$\begin{aligned} x(k) &= \max(x(k-1) + a, y(k-1) + \beta_k), \\ y(k) &= \max(x(k-1) + c, y(k-1) + d). \end{aligned}$$

Имеется два случая соотношений между константами в матрице системы.

3.1. Случай $c \geq a \geq d$, $a > c/2$. Сначала выполним замену переменных

$$\begin{aligned} X(k) &= x(k) - x(k-1), \\ Y(k) &= y(k) - x(k). \end{aligned}$$

Запишем рекуррентные уравнения для новых переменных:

$$\begin{aligned} X(k) &= \max(a, Y(k-1) + \beta_k), \\ Y(k) &= \max(c, Y(k-1) + d) - \max(a, Y(k-1) + \beta_k). \end{aligned}$$

Покажем, что $Y(k) \leq c - a$ для всех k . Исходя из начальных условий, имеем $Y(0) = 0$. Тогда можно записать

$$Y(1) = \max(c, d) - \max(a, \beta_1) = c - \max(a, \beta_1) \leq c - a.$$

Предположим, что $Y(k-1) \leq c - a$. Учитывая, что $d \leq a$, имеем $Y(k-1) + d \leq c - a + d \leq c$. Тогда

$$Y(k) = c - \max(a, Y(k-1) + \beta_k) \leq c - a,$$

откуда по индукции следует выполнение неравенства $Y(k) \leq c - a$ при всех k .

Теперь запишем

$$Y(k) = \max(c, Y(k-1) + d) - X(k) = c - X(k).$$

Подстановка в уравнение для $X(k)$ приводит к рекуррентному уравнению

$$X(k) = \max(a, c + \beta_k - X(k-1)), \quad k \geq 1; \quad X(0) = c. \quad (4)$$

3.2. Случай $c \geq d > a$, $c \geq a + d$, $d > c/2$. Покажем, что при условиях $c \geq d > a$, $c \geq a + d$ и $d > c/2$ динамика системы также описывается рекуррентным уравнением в форме (4). Выполним замену переменных:

$$X(k) = y(k) - y(k-1),$$

$$Y(k) = x(k) - y(k).$$

Представим новые переменные в следующем виде:

$$\begin{aligned} X(k) &= \max(Y(k-1) + c, d), \\ Y(k) &= \max(Y(k-1) + a, \beta_k) - \max(Y(k-1) + c, d). \end{aligned}$$

Заметим, что выполняются неравенства $Y(k) \leq \max(a - c, \beta_k - d) \leq \beta_k$. Тогда, учитывая, что $a + d \leq c \leq \beta_k + c$, запишем

$$\begin{aligned} Y(k) + c &= \max(Y(k-1) + c, \beta_k + c - a) - X(k) + a = \\ &= \max(X(k), \beta_k + c - a) - X(k) + a = \max(a, \beta_k + c - X(k)). \end{aligned}$$

После подстановки в уравнение для переменной $X(k)$ при всех $k \geq 2$ получим

$$X(k) = \max(Y(k-1) + c, d) = \max(a, d, c + \beta_{k-1} - X(k-1)).$$

Поскольку $d > a$, приходим к уравнению

$$X(k) = \max(d, c + \beta_{k-1} - X(k-1)), \quad k \geq 2; \quad X(1) = c.$$

Сдвинем нумерацию случайных величин $X(k)$ на единицу вправо так, чтобы везде писать $X(k-1)$ вместо $X(k)$. Теперь последнее уравнение можно представить так:

$$X(k) = \max(d, c + \beta_k - X(k-1)), \quad k \geq 1; \quad X(0) = c.$$

Заметим, что полученное уравнение отличается от (4) только константой под знаком максимума. Общее уравнение для обоих случаев имеет вид

$$X(k) = \max(r, c + \beta_k - X(k-1)), \quad (5)$$

где r — некоторая константа, такая, что $c/2 < r \leq c$.

3.3. Наименьшее значение случайной величины. Из уравнения (5) следует, что для всех k выполняется неравенство $X(k) \geq r$, а значит, случайная величина $X(k)$ не принимает значения меньше, чем r .

Проверим, что вероятность $P\{X(k) = r\}$ отлична от нуля. Действительно, исходя из (5), можно записать

$$\begin{aligned} P\{X(k) = r\} &= P\{X(k-1) \geq \beta_k + c - r\} \geq \\ &\geq P\{X(k-1) \geq \beta_k + c - r, \beta_k + c - r < r\} = P\{\beta_k < 2r - c\} = F_\beta(2r - c). \end{aligned}$$

Учитывая, что $r > c/2$, окончательно получаем

$$P\{X(k) = r\} \geq F_\beta(2r - c) > 0.$$

4. Нахождение показателя Ляпунова. Сначала покажем, что формулу (3) для вычисления показателя Ляпунова можно представить в виде

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \mathbf{E} \sum_{i=1}^k X(i).$$

Рассмотрим первый случай, для которого $c \geq a \geq d$, $a > c/2$. Очевидно, что выполняется равенство

$$x(k) = X(1) + X(2) + \dots + X(k).$$

Теперь запишем

$$\max(x(k), y(k)) = \sum_{i=1}^k X(i) + \max(0, Y(k)).$$

Поскольку $Y(k) \leq c - a$, из формулы (3) получим

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left(\mathbb{E} \sum_{i=1}^k X(i) + \mathbb{E} \max(0, Y(k)) \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \mathbb{E} \sum_{i=1}^k X(i).$$

Случай, когда $c \geq d > a$, $c \geq a + d$ и $d > c/2$, рассматривается аналогично с учетом соотношений $y(k) = X(1) + X(2) + \dots + X(k)$ и $Y(k) \leq \beta_k$.

4.1. Экспоненциальное распределение. Пусть случайные величины β_k имеют одинаковое экспоненциальное распределение вероятностей с функциями распределения и плотности:

$$F_{\beta}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 0; \\ 1 - e^{-\nu t}, & \text{если } t > 0; \end{cases} \quad f_{\beta}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 0; \\ \nu e^{-\nu t}, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию распределения случайной величины $X(k)$. По формуле полной вероятности запишем

$$\Phi_k(t) = P\{X(k) < t\} = \int_0^{\infty} P\{X(k) < t | \beta_k = u\} f_{\beta}(u) du.$$

Используя рекуррентное уравнение (5), найдем условную вероятность

$$P\{X(k) < t | \beta_k = u\} = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq r; \\ 1 - \Phi_{k-1}(c + u - t), & \text{если } t > r. \end{cases}$$

Поскольку $X(k) \geq r$ и $P\{X(k) = r\} > 0$, функция распределения $\Phi_k(t)$ равна нулю, если $t \leq r$, и имеет разрыв при $t = r$. При $t > r$ функция $\Phi_k(t)$ имеет вид

$$\Phi_k(t) = \int_0^{\infty} (1 - \Phi_{k-1}(u + c - t)) f_{\beta}(u) du = 1 - \int_0^{\infty} \Phi_{k-1}(u + r) f_{\beta}(u + t + r - c) du.$$

С учетом экспоненциального закона функцию распределения можно записать следующим образом:

$$\Phi_k(t) = 1 - \nu e^{-\nu(t+r-c)} \int_0^{\infty} \Phi_{k-1}(u + r) e^{-\nu u} du.$$

Теперь для всех значений переменной t окончательно имеем

$$\Phi_k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq r; \\ 1 - \nu e^{-\nu(t+r-c)} \int_0^\infty \Phi_{k-1}(u+r) e^{-\nu u} du, & \text{если } t > r. \end{cases}$$

4.2. Сходимость последовательности распределений. Рассмотрим функцию распределения $\Phi_k(t)$ при $t > r$. Обозначим

$$a_k = \nu \int_0^\infty \Phi_k(u+r) e^{-\nu u} du.$$

Функцию Φ_k представим в следующем виде:

$$\Phi_k(t) = 1 - e^{-\nu(t+r-c)} a_{k-1}.$$

Из двух последних равенств получим рекуррентное уравнение для последовательности a_k :

$$a_k = 1 - \frac{1}{2} e^{-\nu(2r-c)} a_{k-1}. \quad (6)$$

Нетрудно заметить, что при $k = 0$ выполняется

$$a_0 = \nu \int_0^\infty \Phi_0(u+r) e^{-\nu u} du = \nu \int_0^\infty e^{-\nu u} du = 1.$$

Исследуем сходимость последовательности a_k . Обозначив $C = e^{-\nu(2r-c)}/2$, из рекуррентного уравнения (6) получим

$$a_k = 1 - C a_{k-1} = 1 - C + C^2 + \dots + (-1)^k C^k.$$

В правой части имеем сумму первых членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = -C = -e^{-\nu(2r-c)}/2$. Поскольку $r > c/2$, выполняется неравенство $|q| < 1$, откуда следует, что последовательность a_k при $k \rightarrow \infty$ сходится к величине

$$a = \frac{1}{1+C} = \frac{2}{2 + e^{-\nu(2r-c)}}.$$

Имеется взаимно однозначное соответствие между последовательностью функций Φ_k и числовой последовательностью a_k в силу того, что каждый переход от одной последовательности к другой обратим. Учитывая сходимость последовательности a_k , заключаем, что при $t > r$ последовательность функций $\Phi_k(t)$ тоже сходится к функции

$$\Phi(t) = 1 - \frac{2e^{-\nu(t+r-c)}}{2 + e^{-\nu(2r-c)}}.$$

Теперь для всех t окончательно имеем

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq r; \\ 1 - \frac{2e^{-\nu(t+r-c)}}{2 + e^{-\nu(2r-c)}}, & \text{если } t > r. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что полученная функция является функцией распределения некоторой случайной величины X .

4.3. Вычисление показателя Ляпунова. Сходимость случайных величин $X(k) \rightarrow X$ влечет за собой сходимость их средних $EX(k) \rightarrow EX$. Тогда можем записать

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} E \sum_{i=1}^k X(i) = EX.$$

Функция $\Phi(t)$ отлична от нуля при $t > r$ и имеет разрыв в точке $t = r$. Обозначив $p_r = P\{X = r\}$, показатель Ляпунова найдем следующим образом:

$$\lambda = EX = rp_r + \int_r^{\infty} t d\Phi(t).$$

Других разрывов функция не имеет, а значит, вероятность p_r можно вычислить, используя соотношение

$$p_r + \int_r^{\infty} d\Phi(t) = 1.$$

После вычисления соответствующих интегралов имеем

$$p_r = 1 - \frac{2e^{-\nu(2r-c)}}{2 + e^{-\nu(2r-c)}}, \quad \int_r^{\infty} t d\Phi(t) = \frac{2e^{-\nu(2r-c)}(1 + \nu r)}{\nu(2 + e^{-\nu(2r-c)})}.$$

Окончательно получим показатель Ляпунова в виде

$$\lambda = r + \frac{2e^{-\nu(2r-c)}}{\nu(2 + e^{-\nu(2r-c)})}.$$

В случае, когда $c \geq a \geq d$ и $a > c/2$, показатель Ляпунова равен

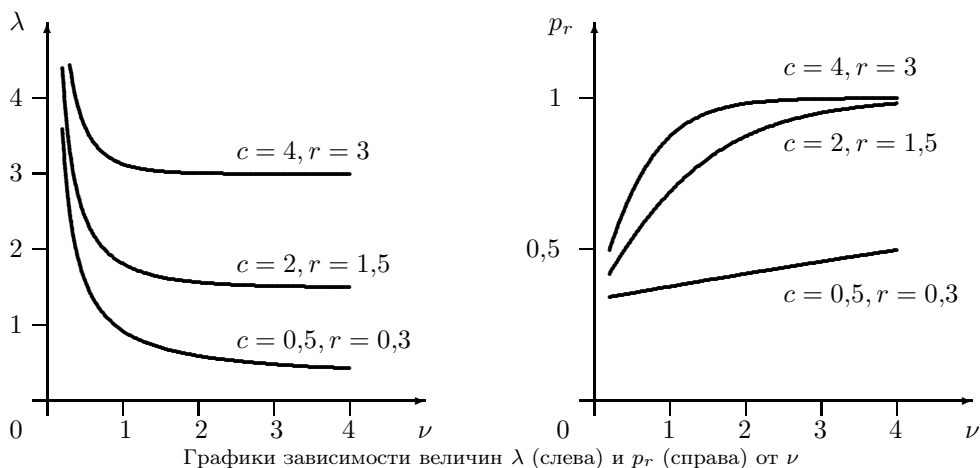
$$\lambda = a + \frac{2e^{-\nu(2a-c)}}{\nu(2 + e^{-\nu(2a-c)})}.$$

Если $c \geq d > a$, $c \geq a + d$ и $a > c/2$, то формула для расчета показателя Ляпунова принимает форму

$$\lambda = d + \frac{2e^{-\nu(2d-c)}}{\nu(2 + e^{-\nu(2d-c)})}.$$

Графики на рисунке показывают зависимость величин λ и p_r от параметра экспоненциального распределения ν при фиксированных значениях параметров системы c и r .

5. Заключение. В работе рассмотрена модель стохастической динамической системы с синхронизацией событий, которая возникает при анализе информационно-поисковых систем. Динамику в модели задает матрица второго порядка, у которой один недиагональный элемент является неотрицательной случайной величиной,



а остальные элементы — неотрицательные константы, связанные между собой некоторыми соотношениями.

Задача вычисления показателя Ляпунова для системы сводится к исследованию последовательности случайных величин, которая определяется рекуррентным уравнением одного вида при достаточно общих условиях. При этом оказывается, что полученное уравнение зависит только от двух из трех параметров, которые задают фиксированные элементы в матрице системы.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на расширение класса систем, динамика которых также может быть описана при помощи указанного рекуррентного уравнения. Кроме того, интересным представляется вопрос о том, как можно получить общее рекуррентное уравнение сразу по виду матрицы системы на основе анализа структуры и формы этой матрицы.

Авторы благодарят рецензентов за ряд важных замечаний и предложений, которые были учтены при подготовке окончательного варианта статьи.

Литература

1. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. Max-plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems. Princeton: Princeton University Press, 2006.
2. Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит. 1994.
3. Olsder G. J., Resing J. A. C., De Vries R. E., Keane M. S., Hooghiemstra G. Discrete event systems with stochastic processing times // IEEE Trans. Automat. Contr. 1990. Vol. 35. N3. P. 299–302.
4. Jean-Marie A. Analytical computation of Lyapunov exponents in stochastic event graphs // Performance Evaluation of Parallel and Distributed Systems. Solution Methods: Proc. 3rd QMIPS Workshop. Amsterdam: CWI, 1994. P. 309–341. (CWI Tracts, Vol. 106.)
5. Krivulin N. K. Evaluation of the growth rate of the state vector in a second-order generalized linear stochastic system // Vestnik St. Petersburg Univ. Math. 2008. Vol. 41, N 1. P. 28–38.
6. Krivulin N. K. Calculating the Lyapunov exponent for generalized linear systems with exponentially distributed elements of the transition matrix // Vestnik St. Petersburg Univ. Math. 2009. Vol. 42, N 2. P. 95–105.
7. Кривулин Н. К. Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2009.

8. *Krivulin N. K.* Calculating the mean growth rate of the vector of states of a stochastic system with synchronization of events // *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* 2011. Vol. 44, N 1. P. 79–86.

9. *Krivulin N. K.* Evaluation of the mean cycle time in stochastic discrete event dynamic systems // *Proc. 6th Intern. Conf. on Queueing Theory and Network Applications.* New York, ACM. 2011. P. 93–100.

10. *Кривулин Н. К., Нев О. А.* Асимптотические свойства вектора состояний обобщенной линейной стохастической динамической системы с симметричной матрицей // *Стохастическая оптимизация в информатике.* 2011. Т. 7. С. 232–239.

Статья поступила в редакцию 26 июня 2014 г.

Сведения об авторах

Кривулин Николай Кимович — доктор физико-математических наук, доцент;
nkk@math.spbu.ru

Нев Ольга Александровна — аспирант; nevolga@gmail.com

EVALUATION OF ASYMPTOTIC CHARACTERISTICS OF A STOCHASTIC DYNAMICAL SYSTEM WITH EVENT SYNCHRONIZATION

Nikolay K. Krivulin, Olga A. Nev

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation;
nkk@math.spbu.ru, nevolga@gmail.com

A model of a stochastic dynamical system with event synchronization is examined. The dynamics of the system is described by a generalized linear equation with a matrix which has one random entry on the diagonal and the other entries given by nonnegative constants related to each other by certain conditions. The problem of calculating the mean asymptotic growth rate of system state vector (the Lyapunov exponent) is considered. The solution includes change of variables resulting in new random variables instead of random state vector coordinates. It is shown that in many cases the appropriate choice of new variables reduces the problem to the study of only one sequence of random variables defined by a certain type of recurrence equation, which depends only on two of three constants in the system matrix. After constructing this sequence of random variables, the convergence of the sequence is investigated. The Lyapunov exponent is calculated as the mean value of the limiting distribution of the sequence. Refs 10.

Keywords: stochastic dynamical system, Lyapunov exponent, convergence of distributions, synchronization of events.