

ОЦЕНКИ ЛЯПУНОВСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ АТТРАКТОРОВ ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ РЕССЛЕРА

Г. А. Леонов, Т. А. Алексеева

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Российская Федерация, 190008, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, 16

Рассмотрены обобщения одной из классических систем Ресслера. Показана эффективность построения функций Ляпунова для оценок размерности аттракторов этих систем. С их помощью получены оценки ляпуновских размерностей аттракторов обобщенных систем Ресслера. Для локальных ляпуновских размерностей аттракторов указанных систем приведены точные формулы. В предельном случае получено совпадение топологической, хаусдорфовой, фрактальной и ляпуновской размерностей аттракторов. Показано, что при стандартных значениях параметров Ресслера, формулы локальных ляпуновских размерностей в нулевой точке совпадают со значениями, полученными в численных экспериментах. Библиогр. 16 назв. Ил. 2.

Ключевые слова: функции Ляпунова, система Ресслера, ляпуновская размерность, аттрактор.

Эффективность построения функций Ляпунова [1–12] для оценки размерностей аттракторов динамических систем была продемонстрирована, когда с их помощью были получены формулы ляпуновской размерности для аттракторов Хенона, Чирикова и Лоренца [11, 12].

В настоящей статье мы рассмотрим другое свидетельство эффективности построения функций Ляпунова в теории размерностей аттракторов. Здесь также будут представлены точные формулы локальной ляпуновской размерности в точке (0,0,0).

В настоящее время хорошо известна следующая цепочка неравенств [7–9]:

$$\dim_T K \leq \dim_H K \leq \dim_F K \leq \dim_L K, \quad (1)$$

где $\dim_T K$, $\dim_H K$, $\dim_F K$, $\dim_L K$ — соответственно топологическая, хаусдорфова, фрактальная и ляпуновская размерности аттрактора K .

Здесь мы рассмотрим следующие обобщения системы Ресслера:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -cy - cz, \\ \dot{y} &= u, \\ \dot{z} &= -bz + a(y - y^2), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -y - z, \\ \dot{y} &= cu, \\ \dot{z} &= -bz + a(y - y^2), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -cy - cz, \\ \dot{y} &= cu, \\ \dot{z} &= -bz + a(y - y^2), \end{aligned} \quad (4)$$

где a, b, c — положительные параметры. При $c = 1$ эти системы являются одной из классических систем Ресслера [13–16]. Из полученных здесь оценок ляпуновской размерности следует, что при $c \rightarrow 0$ все неравенства (1) переходят в равенство, и в пределе

$$2 = \dim_T K = \dim_L K.$$

Заметим, что без введения функций Ляпунова ($v(u, y, z) \equiv 0$ в теореме 3) здесь имеет место только оценка $\dim_L K < 3$.

Теорема 1. Пусть K — ограниченное инвариантное множество систем (2), (3) и (4). Тогда для (2) и (3) имеет место оценка

$$\dim_L K \leq 3 - \frac{2b}{b + \sqrt{b^2 + 2\sqrt{c}(a + 2b)}}, \quad (5)$$

а для (4) — оценка

$$\dim_L K \leq 3 - \frac{2b}{b + \sqrt{b^2 + 2c(a + 2b)}}, \quad (6)$$

где $\dim_L K$ — ляпуновская размерность множества K .

Теорема 2. Для локальной ляпуновской размерности в точке $(0, 0, 0)$ для систем (2) и (3) имеет место равенство

$$\dim_L(0, 0, 0) = 3 - \frac{6bR}{12c - 4b^2 + 2bR - R^2}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} R &= R(a, b, c) = \sqrt[3]{-36c(3a + 2b) - 8b^3 + 12\sqrt{P}}, \\ P &= P(a, b, c) = c[9c(3a + 2b)^2 + 12c(c - b^2) + 12b^3(a + b)], \end{aligned} \quad (8)$$

а для системы (4) — равенство

$$\dim_L(0, 0, 0) = 3 - \frac{6bR}{12c^2 - 4b^2 + 2bR - R^2}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} R &= R(a, b, c) = \sqrt[3]{-36c^2(3a + 2b) - 8b^3 + 12\sqrt{P}}, \\ P &= P(a, b, c) = c^2[9c^2(3a + 2b)^2 + 12c^2(c^2 - b^2) + 12b^3(a + b)], \end{aligned} \quad (10)$$

Для стандартных значений параметров $a = 0.386$, $b = 0.2$, изменяя параметр c на множестве $(0, 1]$, получим оценки ляпуновских размерностей аттракторов обобщенной системы Ресслера (2), изображенные на рис. 1.

Аналогичные оценки для системы (4) изображены на рис. 2.

При $c = 1$ значение локальной ляпуновской размерности, определенное по формуле (7), с точностью до заданной погрешности вычислений совпадает с соответствующим значением, полученным в численных экспериментах [16].

При $c \rightarrow 0$ получим, что

$$\dim_L K - \dim_L(0, 0, 0) \rightarrow 0.$$

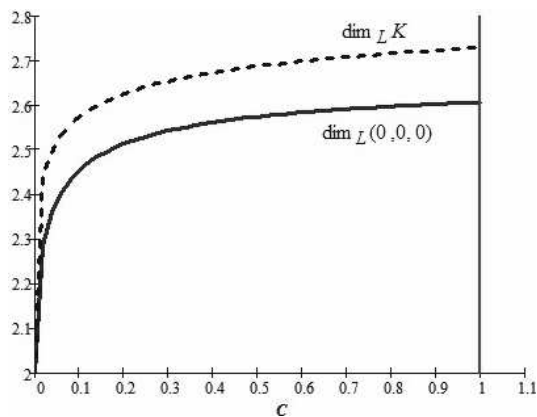


Рис. 1. Оценки размерностей аттракторов обобщенной системы Ресслера (2) ($a = 0.386, b = 0.2$).

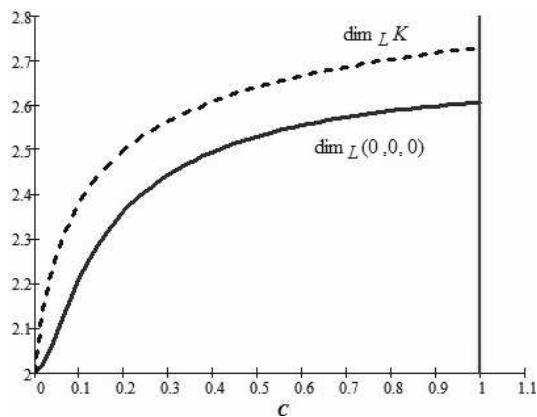


Рис. 2. Оценки размерностей аттракторов обобщенной системы Ресслера (4) ($a = 0.386, b = 0.2$).

Легко видеть, что при $c = 0$ системы (2)–(4) имеют инвариантную двумерную поверхность. Поэтому при $c = 0$

$$\dim_T K = \dim_L K = 2.$$

Для доказательства теорем 1 и 2 напомним необходимые основные факты о ляпуновской размерности. Рассмотрим непрерывно дифференцируемое отображение F открытого множества $U \subset \mathbf{R}^n$. Обозначим через $T_x F$ матрицу Якоби отображения F в точке x . Пусть $K \subset U$ — ограниченное инвариантное множество: $FK = K$.

Обозначим через $\alpha_j(A)$ сингулярные числа ($n \times n$)-матрицы A , так что $\alpha_1(A) \geq \alpha_2(A) \geq \dots \geq \alpha_n(A)$.

Определение 1. Локальной ляпуновской размерностью отображения F в точке $x \in K$ назовем число

$$\dim_L(F, x) = j + s,$$

где j — наибольшее целое число из $[0, n]$ такое, что

$$\alpha_1(T_x F) \alpha_2(T_x F) \dots \alpha_j(T_x F) \geq 1,$$

и такое число $s \in [0, 1]$, что

$$\alpha_1(T_x F) \alpha_2(T_x F) \dots \alpha_j(T_x F) \alpha_{j+1}^s(T_x F) = 1.$$

По определению $\dim_L(F, x) = 0$, если $\alpha_1(T_x F) < 1$, и $\dim_L(F, x) = n$, если $\alpha_1(T_x F) \alpha_2(T_x F) \dots \alpha_n(T_x F) \geq 1$.

Определение 2. Ляпуновская размерность отображения F на множестве K — число

$$\dim_L(F, K) = \sup_K \dim_L(F, x).$$

Определение 3. Локальная ляпуновская размерность однопараметрической группы отображений F^t в точке $x \in K$ — число

$$\dim_L x = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \dim_L(F^t, x).$$

Определение 4. Ляпуновская размерность отображений F^t на множестве K — число

$$\dim_L K = \sup_K \dim_L x.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (11)$$

с непрерывно дифференцируемой вектор-функцией $f(x)$. Будем предполагать, что для любого начального данного x_0 существует решение (11) $x(t, x_0)$, определенное на $t \in [0, +\infty)$. Здесь $x(0, x_0) = x_0$.

Обозначим через $F^t(x_0) = x(t, x_0)$ оператор сдвига вдоль решений уравнения (11) и предположим, что множество $K \subset \mathbf{R}^n$ ограничено и инвариантно: $F^t K = K$, $\forall t \in \mathbf{R}^1$.

Сформулируем утверждения, которые будут использованы в дальнейшем.

Пусть $J(x)$ — матрица Якоби вектор-функции $f(x)$,

$$J(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}.$$

Рассмотрим также невырожденную $(n \times n)$ -матрицу S .

Обозначим $\lambda_1(x, S) \geq \lambda_2(x, S) \geq \dots \geq \lambda_n(x, S)$ собственные значения матрицы

$$\frac{1}{2} \left(SJ(x)S^{-1} + (SJ(x)S^{-1})^* \right). \quad (12)$$

Здесь $*$ — знак транспонирования.

Теорема 3 [5, 11]. Пусть для целого $j \in [1, n]$ и $s \in [0, 1]$ существуют непрерывно дифференцируемая функция $v(x)$ и невырожденная матрица S такие, что

$$\lambda_1(x, S) + \lambda_2(x, S) + \dots + \lambda_j(x, S) + s\lambda_{j+1}(x, S) + \dot{v}(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n. \quad (13)$$

Тогда $\dim_L K \leq j + s$.

Здесь $\dot{v} = (\text{grad } v(x))^* f(x)$.

Лемма 1 [7]. Пусть $T_x F^t = \exp(At)$ и вещественная матрица A имеет простые собственные значения

$$\operatorname{Re} \mu_1 \geq \dots \geq \operatorname{Re} \mu_n.$$

Тогда локальная ляпуновская размерность отображения F^t в точке x равна $j + s$, причем числа j и s определяются из равенства

$$\operatorname{Re} \mu_1 + \dots + \operatorname{Re} \mu_j + s \operatorname{Re} \mu_{j+1} = 0.$$

Докажем теорему 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем справедливость утверждения теоремы для системы (2). Введем в рассмотрение невырожденную матрицу S :

$$S = \operatorname{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{c}}, 1, \nu \right).$$

Тогда выполняется равенство

$$SJS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{c} & -\frac{\sqrt{c}}{\nu} \\ \sqrt{c} & 0 & 0 \\ 0 & \nu a(1-2y) & -b \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -c & -c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & a(1-2y) & -b \end{pmatrix},$$

где J — матрица Якоби правой части системы (2), ν — ненулевой варьируемый параметр. Отсюда следует, что собственными значениями матрицы (12) являются числа

$$\lambda_2 = 0, \lambda_{1,3} = \frac{1}{2} \left(-b \pm \sqrt{\Delta(y)} \right),$$

где $\Delta(y) = b^2 + \frac{c}{\nu^2} + \nu^2 a^2 (1-2y)^2$. Очевидно, что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$.

Введем обозначения

$$\xi(y) = k[(a+b)y - ay^2], \quad \eta = ka - 4\nu^2 \theta^2 a^2, \quad \Delta_0 = \Delta(0).$$

Выберем функцию Ляпунова в виде

$$v(u, y, z) = \frac{k(1-s)}{2} \left(z - \frac{b}{c}u \right)$$

и запишем соотношение (13):

$$2(\lambda_1 + \lambda_2 + s\lambda_3 + \dot{v}) = -(1+s)b + (1-s) \left[\sqrt{\Delta(y)} + \xi(y) \right].$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta(y)} + \xi(y) &= - \left(\theta \sqrt{\Delta(y)} - \frac{1}{2\theta} \right)^2 + \theta^2 \Delta_0 + \\ &\quad + \frac{1}{4\theta^2} - \eta \left(y - \frac{\eta + kb}{2\eta} \right)^2 + \frac{(\eta + kb)^2}{4\eta} \leq \\ &\leq \theta^2 \Delta_0 + \frac{1}{4\theta^2} - \eta \left(y - \frac{\eta + kb}{2\eta} \right)^2 + \frac{(\eta + kb)^2}{4\eta} \leq \theta^2 \Delta_0 + \frac{1}{4\theta^2} + \frac{(\eta + kb)^2}{4\eta}. \end{aligned}$$

Выберем параметры k, θ, ν следующим образом:

$$k = \frac{4\theta^2 a \sqrt{c}}{a+b}, \quad \theta^2 = \frac{1}{2\sqrt{b^2 + 2\sqrt{c}(a+2b)}}, \quad \nu^2 = \frac{\sqrt{c}}{a+2b}.$$

В этом случае

$$\eta = 4\theta^2 \nu^2 a^2 \frac{b}{a+b} > 0,$$

$$\theta^2 \Delta_0 + \frac{1}{4\theta^2} + \frac{(\eta + kb)^2}{4\eta} = \sqrt{b^2 + 2\sqrt{c}(a+2b)}.$$

Отсюда и из теоремы 3 следует оценка (5).

Для систем (3) и (4) имеет место аналогичная схема доказательства. В случае системы (3) — $S = \text{diag}\left(1, \frac{1}{\sqrt{c}}, \nu\right)$, функция Ляпунова — $v(u, y, z) = \frac{k(1-s)}{2}(z - bu)$, оценка ляпуновской размерности — (5). В случае системы (4) — $S = \text{diag}(1, 1, \nu)$, функция Ляпунова — $v(u, y, z) = \frac{k(1-s)}{2}(cz - bu)$, оценка ляпуновской размерности — (6).

Теорема 1 доказана.

Докажем теорему 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим стационарное решение системы (2): $u = y = z = 0$. Линеаризация системы (2) в окрестности этой точки приводит к характеристическому полиному матрицы Якоби $\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + c(a+b)$. Корни этого полинома, которые соответствуют собственным значениям матрицы Якоби, находим в помощью пакета MAPLE 16. В результате получим собственные числа

$$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = \frac{12c - 4b^2 - 4bR - R^2}{12R},$$

$$\lambda_3 = \frac{2R^2 - 4bR + 8b^2 - 24c}{12R},$$

для которых выполняются неравенства $\text{Re}(\lambda_1) \geq \text{Re}(\lambda_2) \geq \text{Re}(\lambda_3)$. Здесь R и P вычисляются по формулам (8).

Используя лемму 1, получим формулу (7) для локальной ляпуновской размерности решения $u = y = z = 0$.

Таким образом, для системы (2) получена следующая оценка ляпуновской размерности аттрактора K :

$$3 - \frac{6bR}{12c - 4b^2 + 2bR - R^2} \leq \dim_L K \leq 3 - \frac{2b}{b + \sqrt{b^2 + 2\sqrt{c}(a+2b)}}.$$

Аналогично доказывается справедливость соотношений (7)–(8) для системы (3) и (9)–(10) для системы (4).

Литература

1. Леонов Г. А. Об оценках хаусдорфовой размерности аттракторов // Вестн. ЛГУ, 1991. Сер. 1. Вып. 3. С. 41–44.
2. Леонов Г. А. Об одном способе исследования глобальной устойчивости нелинейных систем // Вестн. ЛГУ, 1991. Сер. 1. Вып. 4. С. 11–14.
3. Leonov G. A., Boichenko V. A. Lyapunov's direct method in the estimation of the Hausdorff dimension of attractors // Acta appl. math., 1992. Vol. 26. P. 1–60.

4. *Boichenko V. A., Leonov G. A.* Lyapunov functions, Lozinskii norms and Hausdorff Measure in the qualitative theory of differential equations // Amer. Math. Soc. Trans, 1999. Vol. 193. Ser. 2. P. 1–27.
5. *Леонов Г. А.* Формулы ляпуновской размерности аттракторов Хенона и Лоренца // Алгебра и анализ, 2001. Т. 13. Вып. 3. С. 155–170.
6. *Леонов Г. А., Полтинникова М. С.* О ляпуновской размерности аттрактора диссипативного отображения Чирикова // Тр. СПбМО, 2002. Т. 10. С. 186–198.
7. *Leonov G. A.* Strange Attractors and Classical Stability Theory. St. Petersburg: St. Petersburg Univ. Press, 2008. 160 p.
8. *Leonov G. A.* Strange Attractors and Classical Stability Theory // Nonlin. Din. and Sist. Theory, 2008. Vol. 8. N 1. P. 49–96.
9. *Boichenko V. A., Leonov G. A., Reitmann V.* Dimension Theory for Ordinary Differential Equation. Stuttgart, Teubner, 2005.
10. *Leonov G. A., Pogromsky A. Y., Starkov K. E.* Erratum to “Dimension formula for the Lorenz attractor” [Phys. Lett. A 375 (8) (2011) 1179–1182] // Phys. Lett. A. Section A: General, Anatomic and Solid Stat. Phys, 2012. Vol. 376. P. 3472–3474.
11. *Леонов Г. А.* Функции Ляпунова в теории размерности аттракторов // ПММ, 2012. Т. 76. Вып. 2. С. 180–196.
12. *Леонов Г. А.* Формулы ляпуновской размерности аттракторов обобщенной системы Лоренца // Доклады Академии наук, 2013. Т. 450, № 1. С. 13–18.
13. *Rössler O. E.* Continuous chaos — four prototype equations // Ann. New York Acad. Sci, 1979. Vol. 316. P. 376–392.
14. *Rössler O. E.* An equation for continuous chaos. Phys Lett A, 1976. Vol. 57, N 5. P. 397–398.
15. *Alligood K. T., Sauer T. D., Yorke J. A.* Chaos: An Introduction to Dynamical Systems, Springer, 2000. 604 p.
16. *Kuznetsov N. V., Mokaev T. N., Vasilyev P. A.* Numerical justification of Leonov conjecture on Lyapunov dimension of Rossler attractor // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. Vol. 19, Issue 4. P. 1027–1034.

Статья поступила в редакцию 26 июня 2014 г.

Сведения об авторах

Леонов Геннадий Алексеевич — член-корреспондент РАН; leonov@math.spbu.ru

Алексеева Татьяна Анатольевна — кандидат физико-математических наук, доцент; tatyanalexeeva@gmail.com

THE ESTIMATES OF LYAPUNOV DIMENSION IN ATTRACTORS OF GENERALIZED RÖSSLER SYSTEMS

Gennadiy A. Leonov, Tatyana A. Alexeeva

St. Petersburg State University, Universitetskiy pr., 28,
St. Petersburg, Stariy Peterhof, 198504, Russian Federation
National Research University Higher School of Economics,
ul. Souza Pechatnikov, 16, St. Petersburg, 190008, Russian Federation
tatyanalexeeva@gmail.com, leonov@math.spbu.ru

Some generalization of one classical Rössler systems are reviewed and efficacy of Lyapunov functions plotting for the estimates of these systems attractors dimensions is demonstrated. The estimates of Lyapunov dimension of attractors for generalized Rössler systems are obtained with their help. For the local Lyapunov dimensions of attractors for the indicated systems the accurate formulas are cited. For the extreme occurrence the congruency of topological, Hausdorff, fractal and Lyapunov dimensions of attractors is obtained. It is also demonstrated, that under standard values of Rössler parameters, the formulas of local Lyapunov dimensions at zero point are congruent with the meanings obtained in numerical experiments. Refs 16. Figs 2.

Keywords: Lyapunov functions, Rössler system, Lyapunov dimension, attractor.