ВЕСТНИК

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1
Том 1 (59)
Выпуск 4

2014
Декабрь

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
АСТРОНОМИЯ

ЖУРНАЛ ИЗДАЕТСЯ С АВГУСТА 1946 ГОДА

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бибиков Ю. Н., Плисс В. А. Зависимость максимального интервала существования решения дифференциального уравнения от начальных данных ......

Дмитриев А. В., Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и асинхронные итерации

Иванов О. А. Схема Бернулли и обобщения чисел Фибоначчи ....

Кривулин Н. К., Нев О. А. Вычисление асимптотических характеристик стохастической динамической системы с синхронизацией событий................

Леонов Г. А., Алексеева Т. А. Оценки ляпуновской размерности аттракторов обобщенных системРесслера..

Некруткин В. В., Советкин Е. А. О погрешностях стохастического решения уравнений больцмановского типа: точные верхние оценки..................

Пономарева А. Ю., Чирков М. К. Оптимизация обобщенных конечно-нестационарных минимаксных нечетких автоматов..................................

Романовский И. В. Поиск контура с наименьшим средним значением в графе с переменными длинами дуг. Простейший случай ....

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ Санкт-Петербургского государственного университета 1824

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ОСНОВАН В 1724 ГОДУ
1824 – ГОД ВЫХОДА В СВЕТ ПЕРВОГО ИЗДАНИЯ УНИВЕРСИТЕТА

МЕХАНИКА

Быков В. Г., Ковачев А. С. Динамика ротора с эксцентрическим шаровым автобалансировочным устройством . . . .

Ермаков А. М. Устойчивость трансверсально-изотропного сегмента сферической оболочки под действием груза с плоским основанием . . . .

Товстик П. Е., Товстик Т. П. Свободные колебания анизотропной балки . . . .

Юшков М. П., Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х. О связи теории управления с неголономной механикой . . . .

Шатров Е. А. Использование главных координат в задаче о гашении колебаний тележки с двумя маятниками . . . .

Кулешов А. С., Черняков Г. А. О качении параболоида вращения по неподвижной абсолютно шероховатой плоскости . . . .

АСТРОНОМИЯ

Грачев С. И. Образование поляризованных линий: факторизация фазовой матрицы Ханле и закон $\sqrt{\epsilon}$ в общем виде . . . .

Малкин З. М. О взвешивании астрометрических РСДБ-наблюдений . . . .

Сивков-Енин И. А. Использование графических процессоров для моделирования самогравитирующих систем . . . .

Широков С. И., Теханович Д. И., Барышев Ю. В. Флуктуации пространственного распределения галактик в глубоком обзоре COSMOS на масштабах в гигапарсеки . . . .

ХРОНИКА

Михаил Петрович Юшков (к 80-летию со дня рождения) . . . .

Перечень статей . . . .

Contents . . . .

УДК 519.248:519.218.8 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 4

О ПОГРЕШНОСТЯХ СТОХАСТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНОВСКОГО ТИПА: ТОЧНЫЕ ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ*

В. В. Некруткин[1], *Е. А. Советкин*[2]

[1] С.-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
[2] Аахенский университет,
Германия, 000000, Аахен, улица, дом

Нелинейные уравнения больцмановского типа, описывающие развитие во времени систем большого количества «частиц» с парным взаимодействием, являются модельными уравнениями во многих отраслях естествознания — динамике разреженных газов, теории коагулирующих частиц, квантовой физике и т. д. При этом часто единственным методом решения таких уравнений является метод Монте-Карло, в той или иной степени имитирующий соответствующий физический процесс. В то же время вопрос о погрешностях этого метода в данной специфической ситуации не может считаться полностью решенным. В настоящей работе рассматриваются однородные уравнения больцмановского типа с постоянным сечением рассеяния и один из способов их стохастического решения с помощью так называемых $(n, 1)$-частичных случайных процессов. Погрешности решения рассматриваются в смысле расстояния по вариации между соответствующими распределениями. Основным результатом статьи является специального вида оценка погрешности, являющаяся точной во всем классе рассматриваемых уравнений больцмановского типа. Другими словами, получена такая оценка сверху погрешности, которая верная для всех рассматриваемых уравнений и является точной по крайней мере для одного из них. Библиогр. 7 назв.

Ключевые слова: Метод Монте-Карло, уравнения Больцмана, n-частичные процессы, точные верхние оценки.

1. Введение. В настоящей работе рассматриваются однородные уравнения больцмановского типа с постоянным сечением рассеяния (точные определения даны ниже). Такие уравнения (в динамике разреженных газов им соответствуют так называемые псевдо-максвелловские молекулы) часто используются как модельные для апробации различных методов решения более сложных реальных задач.

Существует большое число вероятностных способов решения подобных уравнений. Например, описан так называемый столкновительный процесс, дающий несмещенные оценки линейных функционалов от решения однородных уравнений больцмановского типа [1, гл. 4]. Такой подход, однако, является весьма трудоемким для моделирования при больших временах.

Более полезным оказывается использование n-мерных (в терминах статьи [2] — n-частичных) процессов, восходящих к старым работам М. Каца [3] и Г. Маккина [4].

В литературе предложено множество вариантов таких процессов. Здесь мы ограничимся рассмотрением так называемых $(n, 1)$-процессов (снова в терминологии статьи [2], определение см. в разделе 3) и будем изучать ошибки, возникающие при решении уравнений с помощью этих процессов.

В качестве таких ошибок будут рассматриваться расстояния по вариациям между распределениями $\mu_r^{(n)}(t)$ — совместными распределениями r координат моделируемого n-мерного процесса в момент времени t и мерами $\varphi_t^{\otimes r}$, где φ_t обозначает решение соответствующего уравнения Больцмана.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00271-а).

Иначе говоря, здесь мы изучаем поведение величины $\Delta_r(n,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Var}\big(\mu_r^{(n)}(t) - \varphi_t^{\otimes r}\big)$ в зависимости от параметров n,t,r. Вариация $\Delta_r(n,t)$ (и ее оценки сверху) имеет не только теоретическое, но и прикладное значение, поскольку (см. [5, гл. III, § 9])

$$2\,\mathrm{Var}\big(\mu_r^{(n)}(t) - \varphi_t^{\otimes r}\big) = \sup_{|f|\le 1}\Big|\int f d\mu_r^{(n)}(t) - \int f d\varphi_t^{\otimes r}\Big|, \tag{1}$$

где супремум в правой части берется по всем измеримым функциям f, по модулю не превосходящим 1. Например, при $r=1$ левая часть (1) соответствует наибольшему смещению, которое можно получить, оценивая линейный функционал с единичной нормой, от решения конкретного уравнения больцмановского типа в момент времени t методом Монте-Карло с помощью рассматриваемого n-частичного процесса.

При $r=2$ величина $\Delta_2(n,t)$ показывает, насколько попарное распределение координат n-частичного процесса отличается от своего предельного распределения (это существенно при изучении дисперсий стандартных Монте-Карловских оценок), а выражение (1) интерпретирует его при вычисления «двумерных» интегралов в терминах смещения.

Изучение вариации $\Delta_r(n,t)$ проводилось многими авторами (некоторые из статей, посвященных этим вопросам, можно найти в списке литературы). Однако акцент при этом делался на поведении этой величины при больших n и фиксированном t. В частности, для $(n,1)$-процессов доказано [6], что при фиксированных r и t существуют такие положительные постоянные $c_r(t)$, что

$$n\mathrm{Var}\big(\mu_r^{(n)}(t) - \varphi_t^{\otimes r}\big) \to c_r(t).$$

Такого рода результаты могут служить основанием для решения методом Монте-Карло уравнений больцмановского типа.

Здесь же основное внимание посвящено таким оценкам сверху величины $\Delta_r(n,t)$, которые являются достижимыми для некоторого уравнения больцмановского типа при любых n, t и r. Тем самым получаются неулучшаемые (точные в классе всех уравнений Больцмана) оценки, не зависящие от физической природы конкретного уравнения.

Отметим, что техника построения достижимых оценок вариации $\Delta_r(n,t)$ опирается на результаты, полученные в статьях [6] и [7]. Дадим соответствующие определения и процитируем нужные нам утверждения из этих работ.

2. Однородные уравнение больцмановского типа. Разложение Вальда. Перечислим объекты, задающие некоторое однородное уравнение больцмановского типа.

Пусть *фазовое пространство* E — это измеримое пространство с σ-алгеброй $\mathcal{E}$. Зафиксируем *начальное* распределение φ и функцию $T:\ \mathcal{E}\times E^2 \mapsto \mathbb{R}$ — *ударную трансформанту*, являющуюся вероятностной мерой по первому аргументу, и $\mathcal{E}^2$-измеримую по паре остальных. Для любых конечных зарядов μ_1 и μ_2, определенных на $\mathcal{E}$, положим

$$\mathbf{T}(\mu_1,\mu_2)(dx) = \int_{E^2} T(dx; du_1, du_2)\mu_1(du_1)\mu_2(du_2). \tag{2}$$

Четверка объектов $(E,\mathcal{E},T,\varphi)$ определяет *однородное уравнение больцмановского типа* в мерах:

$$\frac{d\varphi_t}{dt} = \mathbf{T}(\varphi_t,\varphi_t) - \varphi_t, \qquad \varphi_0 = \varphi. \tag{3}$$

Как известно (например, [1, гл. 4]), дифференциальное уравнение (3) имеет единственное положительное решение φ_t, являющееся вероятностной мерой при любом $t \geq 0$.

Для явного представления этого решения нам понадобится ввести понятие *упорядоченного бинарного дерева* δ с *числом узлов разветвления* $N(\delta)$. Это определение удобно представить следующим рекуррентным способом.

1. Определим дерево $\delta = (\cdot)$ как дерево без узлов разветвления, так что $N(\delta) = 0$.
2. Упорядоченное дерево с одним узлом разветвления имеет вид $\delta = (\cdot 1 \cdot)$. При этом, естественно, $N(\delta) = 1$.
3. Если δ_1 и δ_2 — упорядоченные деревья с $N(\delta_1) = p_1$ и $N(\delta_2) = p_2$, то следующее построение дает нам все упорядоченные деревья с p_1+p_2+1 узлом разветвления:
   - из чисел $1, \ldots, p_1 + p_2$ выбираются произвольные p_1 чисел $n_1 < \ldots < n_{p_1}$, оставшиеся числа обозначаются $m_1 < \ldots < m_{p_2}$;
   - каждое число i, $1 \leq i \leq p_1$, участвующее в записи δ_1, заменяется на n_i, аналогично каждое число j, участвующее в записи δ_2, заменяется на m_j; получившиеся выражения обозначаются $\tilde{\delta_1}$ и $\tilde{\delta_2}$;
   - выражение $\delta = (\tilde{\delta_1}, p_1 + p_2 + 1, \tilde{\delta_2})$ объявляется упорядоченным деревом с $p_1 + p_2 + 1$ узлами разветвления.

Далее, пусть $\mathcal{M}_p$ — множество упорядоченных деревьев с p узлами разветвлениями. Тогда, как легко видеть, $\operatorname{card} \mathcal{M}_p = p!$.

Каждому упорядоченному бинарному дереву δ сопоставляется вероятностная мера B_δ по следующему правилу: a) при $\delta = (\cdot)$ имеет место равенство $B_\delta = \varphi$, b) если $\delta = (\tilde{\delta_1}, p_1 + p_2 + 1, \tilde{\delta_2})$, то $B_\delta = \mathbf{T}(B_{\delta_1}, B_{\delta_2})$.

Имеет место следующее утверждение, носящее название *разложения Вальда.*

Предложение 1. *Вероятностное решение* φ_t *уравнения* (3) *может быть представлено в виде*

$$\varphi_t = \sum_{p=0}^{\infty} e^{-t}(1 - e^{-t})^p \, \mathbf{D}_{p,p+1}, \tag{4}$$

где

$$\mathbf{D}_{p,p+1} = \frac{1}{p!} \sum_{\delta \in \mathcal{M}_p} B_\delta. \tag{5}$$

Представление (4) было использовано, например в [7]; несколько другую форму разложения Вальда можно найти в [1, гл. 4]). Как следует из (5), $\mathbf{D}_{p,p+1}$ представляет собой равномерную смесь из вероятностных мер, которые соответствуют упорядоченным бинарным деревьям с p узлами разветвления.

Взяв прямое произведение левых и правых частей (4), мы получим обобщение разложение Вальда для $\varphi_t^{\otimes r}$:

$$\varphi_t^{\otimes r} = \sum_{p=0}^{\infty} C_{p+r-1}^{p} \, e^{-rt}(1 - e^{-t})^p \, \mathbf{D}_{p,p+r}, \tag{6}$$

где $\mathbf{D}_{p,p+r}$ — смесь вероятностных мер, которые соответствуют множествам из r непересекающихся деревьев с суммарным количеством узлов разветвления p. Например, при $r=2$

$$\mathbf{D}_{p,p+2} = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{p_1+p_2=p} \sum_{\delta_1 \in \mathcal{M}_{p_1}} \sum_{\delta_2 \in \mathcal{M}_{p_2}} B_{\delta_1} \otimes B_{\delta_2}.$$

3. Случайный $(n,1)$-процесс. Случайный $(n,1)$-процесс $\xi^{(n)}(t)$ является однородным марковским чисто скачкообразным процессом с фазовым пространством $(E^n, \mathcal{E}^n)$, который определяется следующим образом (см., например, [6]):

1) начальное распределение процесса есть $\varphi^{\otimes n}$;

2) отрезки времени между скачками независимы и имеют показательное распределение $\mathrm{Exp}(n)$ со средним $1/n$;

3) переходная функция скачков имеет вид

$$T_n(dy_1,\ldots,dy_n\,;\,x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i\neq j} T(dy_i; x_i, x_j)\delta_{\mathbf{x}^{(-i)}}(d\mathbf{y}^{(-i)}),$$

где $\mathbf{x}^{(-i)} = (x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ и $\mathbf{y}^{(-i)}$ определено аналогичным образом.

Тем самым введенный процесс определяется однозначно по четверке $(E,\mathcal{E},T,\varphi)$.

Замечание 1. Процесс $\xi^{(n)}(t) = \big(\xi^{(n)}_{\{1\}}(t),\ldots,\xi^{(n)}_{\{n\}}(t)\big)$ можно для наглядности описать на алгоритмическом языке движущихся частиц.

В начальный момент эти частицы имеют независимые координаты, распределение каждой из которых которой равно φ. Через время, экспоненциально распределенное с параметром n, происходит «столкновение» двух случайно выбранных частиц с номерами i и j. А именно, если их координаты до столкновения были x_i и x_j соответственно, то в результате столкновения изменяется координата x_i первой частицы, которая после столкновения приобретает случайное положение x_i', имеющее распределение $T(\,\cdot\,; x_1, x_2)$.

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые понятия и результаты, использованные в том числе в [6]. Пусть $L \subset \{1,\ldots,n\}$ с $\operatorname{card} L = r > 0$. Поскольку совместное распределение любых различных r координат $(n,1)$-процесса в момент времени t одинаково, обозначим через $\mu_r^{(n)}(t)$ совместное распределение первых r координат процесса $\xi^{(n)}(t) = \big(\xi^{(n,1)}(t),\ldots,\xi^{(n,n)}(t)\big)$. Иначе говоря, положим $\mu_r^{(n)}(t) = \mathcal{L}\big(\xi_L^{(n)}(t)\big)$, где $\xi_L^{(n)}(t) = \big(\xi^{(n,1)}(t),\ldots,\xi^{(n,r)}(t)\big)$, а $\mathcal{L}(\eta)$ обозначает распределение случайной величины η.

4. Конфигурации. При изучении структуры распределения $\mu_r^{(n)}(t)$ в [6] вводятся специальные объекты, названные конфигурациями.

Определение 1. *Пусть $p,q \ge 0$, $L \subset \{1,\ldots,n\}$ и $\operatorname{card} L > 0$. Последовательность $\big(a_1,\ldots,a_q,(\alpha_1,\beta_1),\ldots,(\alpha_p,\beta_p)\big)$ называется конфигурацией, связанной множеством L, если выполнены следующие условия:*

- *$a_j \in L$, причем $a_1 < \ldots < a_q$;*

- *$\alpha_i \neq \beta_i$, причем α_i, $\beta_i \in \{1,\ldots,n\}$;*

- *для любого* $x \in L \setminus \{a_1, \dots, a_q\}$ *существует такое* $i \in \{1, \dots, p\}$, *что* $\alpha_i = x$;
- $\alpha_p \in L$. *Если* $\alpha_i \notin L$ *для* $i \in \{1, \dots, p-1\}$, *то существует такое* $j \in \{i+1, \dots, p\}$, *что* $\beta_j = \alpha_i$.

Конфигурацию, связанную множество L, будем обозначать κ_L.

Если $\kappa_L = (a_1, \dots, a_q, (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_p, \beta_p))$, то число p будем называть *длиной конфигурации* и писать $\operatorname{len}(\kappa_L^{(n)}) = p$. *Мощностью конфигурации* $\operatorname{pow}(\kappa_L^{(n)})$ будем называть мощность множества $L \cup \{a_1, \dots, a_p\} \cup \{b_1, \dots, b_p\}$. Множество всех конфигураций с длиной p и мощностью m будем обозначать $\mathcal{M}_{p,m}$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{M}_{p,p+1}$ можно отождествить с $\mathcal{M}_p$.

Вектор $((\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_p, \beta_p))$ называется *вектором столкновений* конфигурации κ_L. Отметим, что при $r = 1$ вектор столкновений полностью определяет всю конфигурацию.

В множестве всех конфигураций вводится следующее отношение эквивалентности, которое разбивает множество конфигураций на непересекающиеся классы.

Определение 2. *Будем считать конфигурации*

$$\kappa_L = (a_1, \dots, a_q, (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_p, \beta_p)) \quad \text{и} \quad \kappa'_L = (a'_1, \dots, a'_q, (\alpha'_1, \beta'_1), \dots, (\alpha'_p, \beta'_p)),$$

связанные множеством L, *эквивалентными, если выполняются следующие требования:*

- $a_i = a'_i$ *для любого* $i \in \{1, \dots, q\}$;
- *если* $\alpha_i \in L \setminus \{a_1, \dots, a_q\}$ *или* $\alpha'_i \in L \setminus \{a_1, \dots, a_q\}$, *то* $\alpha_i = \alpha'_i$; *аналогичное требование имеет место и для* β_i, β'_i;
- *пусть* K — *множество всех элементов в записи конфигурации* κ_L, *а* K' — *в записи* κ'_L; *тогда* $\operatorname{card}\{K\} = \operatorname{card}\{K'\}$ *и существует биективное отображение* $\pi : K \to K'$, *такое что* $\alpha_i = \pi(\alpha'_i)$ *и* $\beta_i = \pi(\beta'_i)$ *для любого* i.

Если κ_L — конфигурация, то класс конфигураций, эквивалентных κ_L, будем обозначать $\widehat{\kappa}_L$. Соответственно $\widehat{\mathcal{M}}_{p,m}$ будет означать множество классов эквивалентных конфигураций, имеющих длину p и мощность m.

Дополнительно разделим конфигурации на два класса.

Определение 3. *Будем говорить, что конфигурация* κ_L *с* $r = \operatorname{card}\{L\}$ *является* $\mathbb{T}$-*конфигурацией, если* $\operatorname{len}(\kappa_L) + r = \operatorname{pow}(\kappa_L)$. *В противном случае будем называть эту конфигурацию* $\mathbb{NT}$-*конфигурацией.*

Замечание 2. Связь конфигураций с $(n, 1)$-процессами подробно описана в [6, 7]. Нам здесь важно подчеркнуть, что при фиксированных n, L и t траектория процесса $\xi^{(n)}(s)$ при $s \le t$ однозначно определяет случайную конфигурацию $\kappa_L^{(n)}(t)$, связанную координатами процесса с номерами из множества L.

А именно, зафиксируем некоторую траекторию $(n, 1)$-процесса до момента времени t и рассмотрим историю столкновений всех частиц этого процесса. Если записывать эти столкновения (точнее, номера частиц, участвовавших в столкновениях) в их естественном порядке, то, как нетрудно видеть, у нас получится некоторая полная конфигурация, где запись (α_i, β_i) интерпретируется как столкновение частицы с номером α_i и β_i, при этом меняется координата первой частицы с номером α_i. Что касается чисел a_j, то это номера тех частиц, которые не участвовали в столкновениях за время t.

Если же интересоваться только историей частиц с номерами из множества L и последовательно записывать в строчку те столкновения, которые прямо или косвенно повлияли (через ударную трансформанту T) на положение этих частиц, то мы придем к понятию конфигурации, связанной множеством L.

5. Погрешности, порождаемые $(n,1)$**-процессом.** Для получения основного результата работы (теорема 2 настоящего раздела) нам понадобятся следующие утверждения, использованные при доказательстве теоремы 4.1 в [6]. Для удобства эти утверждения собраны здесь в следующие лемму 1 и теорему 1.

Лемма 1. *Пусть* κ — *некоторая конфигурация, связанная множеством* L, *причем* $\operatorname{len}(\kappa) = p > 0$ *и* $r = \operatorname{card}\{L\} > 0$. *Обозначим* $\mathcal{A}_\kappa^t(\,\cdot\,) = \mathsf{P}\left(\xi_L^{(n)}(t) \in \cdot \mid \kappa_L^{(n)}(t) = \kappa\right)$.

Имеют место следующие утверждения:

1) распределение $\mathcal{A}_\kappa^t(\,\cdot\,)$ *не зависит от* t *(и поэтому будет обозначаться* $\mathcal{A}_\kappa(\,\cdot\,)$*);*

2) если κ *и* κ' *принадлежат одному классу эквивалентности, то* $\mathcal{A}_\kappa(\,\cdot\,) = \mathcal{A}_{\kappa'}(\,\cdot\,)$*;*

3) имеет место равенство

$$\frac{1}{\operatorname{card}\{\widehat{M}_{p,p+r}\}} \sum_{\hat\kappa \in \widehat{M}_{p,p+r}} \mathcal{A}_\kappa = \mathbf{D}_{p,p+r}, \tag{7}$$

где $\mathbf{D}_{p,p+r}$ — *распределения в правой части суммы Вальда* (6).

Положим

$$\alpha_r(n,p,m) = \begin{cases} 1 & \text{при } p = 0 \text{ или } m = r = 1; \\ (n-1)^{-p} \displaystyle\prod_{i=r-1}^{m-2} (n-1-i) & \text{при } p > 0,\ r < m \le \min\big(p+r, n\big) \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и $m_i = \operatorname{card}\Big(L \cup \{a_{i+1}, \ldots, a_p\} \cup \{b_{i+1}, \ldots, b_p\}\Big)$.

Теорема 1. *Пусть* κ — *некоторая конфигурация, связанная множеством* L, *причем* $\operatorname{len}(\kappa) = p > 0$. *Если* $r = \operatorname{card}\{L\}$, *то*

$$\mathsf{P}\left(\xi_L^{(n)}(t) \in \cdot\,, \kappa_L^{(n)}(t) \in \widehat{\kappa}\right) = \mathcal{A}_\kappa(\,\cdot\,)\, e^{-rt} \alpha_r(n,p,m) \int_{T(p,t)} e^{-\sum_{i=1}^p s_i(m_{i-1} - m_i)}\, d\mathbf{s},$$

где $T(p,t) = \{(s_1, \ldots, s_p) : 0 \le s_1 \le \ldots \le s_p \le t\}$ *и* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_p)$.

На основе утверждений леммы 1 и теоремы 1 можно построить нужное нам представление распределения $\mu_r^{(n)}(t)$.

Предложение 2. *Имеет место равенство*

$$\mu_r^{(n)}(t) = \sum_{p=0}^{n-r} \alpha_r(n,p,p+r)\, C_{p+r-1}^p\, e^{-rt}(1-e^{-t})^p\, \mathbf{D}_{p,p+r} + p_{\mathbb{NT}} \mathbf{D}_{\mathbb{NT}}, \tag{8}$$

где $\mathbf{D}_{\mathbb{NT}} = \mathcal{L}\big(\xi_L^{(n)}(t) \mid \kappa_L^{(n)}(t) \in \mathbb{NT}\big)$, $p_{\mathbb{NT}} = \mathsf{P}\left(\kappa_L^{(n)}(t) \in \mathbb{NT}\right)$, *а распределения* $\mathbf{D}_{p,p+r}$ *являются элементами смеси в* r*-мерной сумме Вальда* (6).

Доказательство. Ясно, что

$$\mathsf{P}\left(\xi_L^{(n)}(t) \in \cdot\,\right) = \sum_{\widehat{\kappa} \in \widehat{\mathbb{T}}} \mathsf{P}\left(\xi_L^{(n)}(t) \in \cdot\,,\ \kappa_L^{(n)}(t) \in \widehat{\kappa}\right) + p_{\mathbb{NT}}\, \mathsf{P}\left(\xi_L^{(n)}(t) \in \cdot \mid \kappa_L^{(n)}(t) \in \mathbb{NT}\right),$$

где $\widehat{\mathbb{T}}$ — множество классов эквивалентных конфигураций, представители которых являются $\mathbb{T}$-конфигурациями. По теореме 1, переходя от множества $M_{p,m}$ конфигураций к множеству $\widehat{M}_{p,m}$ их классов эквивалентности, получим, что

$$\sum_{\widehat{\kappa}\in\widehat{\mathbb{T}}} \mathsf{P}(\xi_L^{(n)}(t)\in\,\cdot\,,\,\kappa_L^{(n)}(t)\in\widehat{\kappa}) = \sum_{p=0}^{n-r} e^{-rt}\alpha_r(n,p,p+r)\int_{T(p,t)} e^{-\sum_{i=1}^p s_i}d\mathbf{s}\sum_{\widehat{\kappa}\in\widehat{M}_{p,p+r}}\mathcal{A}_\kappa(\,\cdot\,).$$

Заметим, что $\mathrm{card}\{\widehat{M}_{p,p+r}\} = (p+r-1)!/(r-1)!$. Используя лемму 1 и равенство

$$p!\int_{T(p,t)} e^{-\sum_{i=1}^p s_i}d\mathbf{s} = (1-e^{-t})^p\,,$$

приходим к равенству (8). □

На основании разложения (8) можно доказать следующее неравенство, являющееся основным для дальнейшего.

Следствие 1. *Пусть φ_t — решение уравнения* (3) *и $\mu_r^{(n)}(t)$ — совместное распределение координат $\xi^{(n,1)}(t),\dots,\xi^{(n,r)}(t)$ случайного $(n,1)$-процесса. Тогда при $n\ge r$*

$$\mathrm{Var}\big(\mu_r^{(n)}(t)-\varphi_t^{\otimes r}\big)\le p_{\mathbb{NT}}, \tag{9}$$

где

$$p_{\mathbb{NT}} = 1-\sum_{p=0}^{n-r}\alpha_r(n,p,p+r)C_{p+r-1}^p\,e^{-rt}(1-e^{-t})^p \tag{10}$$

и

$$\alpha_r(n,p,p+r) = \prod_{i=r-1}^{p+r-2}\left(1-\frac{i}{n-1}\right).$$

Доказательство. Обозначим $\beta_r(n,p,p+r) = 1-\alpha_r(n,p,p+r)$ и отметим, что $0<\beta_r(n,p,p+r)<1$ при $n\ge r$ и $p<n-r+1$. Используя (6) и (8), мы видим, что

$$\begin{aligned}\varphi_t^{\otimes r}-\mu_r^{(n)}(t) &= \sum_{p=0}^{\infty} C_{p+r-1}^p\,e^{-rt}(1-e^{-t})^p\,\mathbf{D}_{p,p+r}-\\ &-\sum_{p=0}^{n-r}\alpha_r(n,p,p+r)\,C_{p+r-1}^p\,e^{-rt}(1-e^{-t})^p\,\mathbf{D}_{p,p+r}-p_{\mathbb{NT}}\mathbf{D}_{\mathbb{NT}} =\\ &=\sum_{p=0}^{n-r}\beta_r(n,p,p+r)C_{p+r-1}^p\,e^{-rt}(1-e^{-t})^p\mathbf{D}_{p,p+r}+\\ &+\sum_{p=n-r+1}^{\infty} C_{p+r-1}^p e^{-rt}(1-e^{-t})^p\,\mathbf{D}_{p,p+r}-p_{\mathbb{NT}}\mathbf{D}_{\mathbb{NT}} = p_{\mathbb{NT}}\big(\mathbf{D}_{\mathbb{T}}-\mathbf{D}_{\mathbb{NT}}\big),\end{aligned}$$

где $\mathbf{D}_{\mathbb{T}}$ и $\mathbf{D}_{\mathbb{NT}}$ — некоторые вероятностные меры, причем $\mathbf{D}_{\mathbb{T}}$ является смесью распределений $\mathbf{D}_{p,p+r}$, а $\mathbf{D}_{\mathbb{NT}}$ — смесью распределений $\mathcal{A}_\kappa$ с $\kappa\in\mathbb{NT}$.

Поскольку $\mathrm{Var}\big(\mathbf{D}_{\mathbb{T}} - \mathbf{D}_{\mathbb{NT}}\big) \le 1$ и

$$p_{\mathbb{NT}} = \sum_{p=0}^{n-r} \beta_r(n,p,p+r) C_{p+r-1}^{p}\, e^{-rt}(1-e^{-t})^p + \sum_{p=n-r+1}^{\infty} C_{p+r-1}^{p} e^{-rt}(1-e^{-t})^p =$$

$$= 1 - \sum_{p=0}^{n-r} \alpha_r(n,p,p+r) C_{p+r-1}^{p}\, e^{-rt}(1-e^{-t})^p,$$

утверждение доказано. □

Теперь наша цель — доказать, что существует такое уравнение вида (3) (иначе говоря, такая четверка $(E,\mathcal{E},T,\varphi)$), что неравенство (9) превращается в равенство.

Из доказательства следствия 1 видно, что неравенство (9) превращается в равенство, если распределение $\mathbf{D}_{\mathbb{T}}$ имеет с распределением $\mathbf{D}_{\mathbb{NT}}$ дизъюнктные носители. В отличие от величины правой части неравенства (9), это свойство существенно зависит от четверки $(E,\mathcal{E},T,\varphi)$, определяющей конкретный вид уравнения (3).

Приведем пример, показывающий, что четверки $(E,\mathcal{E},T,\varphi)$, доставляющие дизъюнктность носителям мер $\mathbf{D}_{\mathbb{T}}$ и $\mathbf{D}_{\mathbb{NT}}$, существуют.

Обозначим снова $\xi_L^{(n)}(t) = (\xi^{(n,1)}(t),\dots,\xi^{(n,r)}(t))$. Кроме того, для любого события C, порожденного $(n,1)$-процессом, будем писать $\mathrm{P}_{\mathbf{x}}(C)$ вместо $\mathrm{P}(C \,|\, \xi^{(n)}(0) = \mathbf{x})$.

Лемма 2. *Если существует такое $B \in \mathcal{E}^r$, что для любых $\kappa_1 \in \mathbb{T}$ и $\kappa_2 \in \mathbb{NT}$*

$$\mathrm{P}_{\mathbf{x}}\left(\xi_L^{(n)}(t) \in B \,|\, \kappa_L^{(n)}(t) = \kappa_1\right) = 1 \quad \text{и} \quad \mathrm{P}_{\mathbf{x}}\left(\xi_L^{(n)}(t) \in B \,|\, \kappa_L^{(n)}(t) = \kappa_2\right) = 0 \qquad (11)$$

для $\varphi^{\otimes n}$-почти всех $\mathbf{x} \in E^n$, то распределения $\mathbf{D}_{\mathbb{T}}$ и $\mathbf{D}_{\mathbb{NT}}$ имеют дизъюнктные носители.

Доказательство. Из (11) сразу же получаем, что для $\varphi^{\otimes n}$-почти всех $\mathbf{x} \in E^n$

$$\mathrm{P}_{\mathbf{x}}\left(\xi_L^{(n)}(t) \in B,\, \kappa_L^{(n)}(t) = \kappa_1\right) = \mathrm{P}_{\mathbf{x}}\left(\kappa_L^{(n)}(t) = \kappa_1\right) \text{ и } \mathrm{P}_{\mathbf{x}}\left(\xi_L^{(n)}(t) \in B, \kappa_L^{(n)}(t) \in \mathbb{NT}\right) = 0.$$

Интегрируя полученные равенства по мере $\varphi^{\otimes n}(d\mathbf{x})$, приходим к тому, что

$$\mathrm{P}\left(\xi_L^{(n)}(t) \in B \,|\, \kappa_L^{(n)}(t) = \kappa_1\right) = 1 \quad \text{и} \quad \mathrm{P}\left(\xi_L^{(n)}(t) \in B \,|\, \kappa_L^{(n)}(t) \in \mathbb{NT}\right) = 0.$$

Согласно обозначениям леммы 1 первое из этих равенств переписывается в виде $\mathcal{A}_{\kappa_1}(B) = 1$ (здесь $\kappa_1 \in \mathbb{T}$), а второе означает, что $\mathbf{D}_{\mathbb{NT}}(B) = 0$.

Учитывая (7), мы приходим к выводу, что $\mathbf{D}_{p,p+r}(B) = 1$ при любом p, и $\mathbf{D}_{\mathbb{T}}(B) = 1$, поскольку распределение $\mathbf{D}_{\mathbb{T}}$ является смесью распределений $\mathbf{D}_{p,p+r}$. □

Перейдем теперь к построению нужной нам четверки $(E,\mathcal{E},T,\varphi)$. Общая идея построения состоит в том, чтобы получившиеся распределения $\mathcal{A}_\kappa$ (которые полностью определяются этой четверкой) были бы в некотором смысле сосредоточены на классе эквивалентных конфигураций $\widehat{\kappa}$, которому принадлежит κ.

1. *Множество E.* Элементы множества E будут обозначаться буквой χ. Кроме того, нам понадобятся две целочисленные функции, определенные на E: каждому $\chi \in E$ будет сопоставляться его *длина* $\mathrm{len}(\chi)$ и *мощность* $\mathrm{pow}(\chi)$.

   По определению множество E имеет вид $E = \cup_{k\ge 0} E_k$, где $E_0 = \{(x),\, x \in \mathbb{R}\}$, причем $\mathrm{len}(\chi) = 0$ и $\mathrm{pow}(\chi) = 1$ при $\chi \in E_0$.

   При $k \ge 1$ E_k состоит из элементов $\chi = (x, Z)$, где $x \in \mathbb{R}$ и $Z = (\mathbf{z}^{(1)},\dots,\mathbf{z}^{(k)})$, причем $\mathbf{z}^{(i)} = (z_1^{(i)}, z_2^{(i)}) \in \mathbb{R}^2$ обладают следующими свойствами:

- $z_1^{(k)} = x$;
- при $k \geq 2$ из того, что для $1 \leq i \leq k-1$ имеет место равенство $z_1^{(i)} \neq x$, следует, что $z_1^{(j)} = x$ при некотором $j > i$.

При этом $\mathrm{len}(\chi) = k$, а $\mathrm{pow}(\chi)$ является числом различных элементов вида $x, z_i^{(j)}$, входящих в χ. В частности, $\mathrm{len}(\chi) = 0$ и $\mathrm{pow}(\chi) = 1$ при $k = 0$.

2. *Сигма-алгебра $\mathcal{E}$.* Эта σ-алгебра определяется своими сужениями на множества E_k, индуцированными борелевскими σ-алгебрами подмножеств $\mathbb{R}^{2k+1}$.

3. *Ударная трансформанта T* имеет вид $T(\,\cdot\,;\chi_1,\chi_2) = \mathbf{1}_{\Phi(\chi_1,\chi_2)}(\,\cdot\,)$, где функция $\Phi : E^2 \mapsto E^1$ определяется следующим образом:

   - если $\chi_1 = (x_1)$ и $\chi_2 = (x_2)$, то $\chi = \Phi(\chi_1,\chi_2) = (x_1, Z)$ с $Z = (x_1, x_2)$;
   - если $\chi_1 = (x_1)$ и $\chi_2 = (x_2, Z_2)$ с $\mathrm{len}(\chi_2) > 0$, то $\chi = \big(x_1, Z_2, (x_1, x_2)\big)$;
   - если $\chi_1 = (x_1, Z_1)$ с $\mathrm{len}(\chi_1) > 0$ и $\chi_2 = (x_2)$, то $\chi = \big(x_1, (Z_1, (x_1, x_2))\big)$;
   - если $\chi_1 = (x_1, Z_1)$ и $\chi_2 = (x_2, Z_2)$ с $\mathrm{len}(\chi_1), \mathrm{len}(\chi_2) > 0$, то $\chi = \big(x_1, (Z_1, Z_2, (x_1, x_2))\big)$.

   Нетрудно показать, что область значений определенного таким образом отображения Φ действительно является подмножеством E, причем $\mathrm{len}(\chi) = \mathrm{len}(\chi_1) + \mathrm{len}(\chi_2) + 1$.

4. *Начальное распределение φ* сосредоточено в E_0 и определяется произвольным непрерывным распределением в $\mathbb{R}$.

Полученную четверку $(E, \mathcal{E}, T, \varphi)$ будем называть *конфигурационной четверкой.*

Теорема 2. *Если уравнение* (3) *задано конфигурационной четверкой* $(E, \mathcal{E}, T, \varphi)$, *то для любых n, t и $r \leq n$ неравенство* (9) *превращается в равенство.*

Доказательство. Приведем лишь общую схему доказательства, опуская громоздкие детали.

Рассмотрим точку $\mathbf{x} = \big((x_1), \dots, (x_r)\big) \in E_0^r$ и некоторую конфигурацию κ, связанную множеством $L = \{1, \dots, r\}$. Тогда условное распределение $\mathcal{L}_{\mathbf{x},\kappa}\big(\xi_L^{(n)}(t)\big) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{P}_{\mathbf{x}}\big(\xi_L^{(n)}(t) \in \cdot \mid \kappa_L^{(n)}(t) = \kappa\big)$ оказывается сосредоточенным в некоторой точке $\chi^{(r)} \in E^r$. Например, пусть $r = 3$ и $\kappa = (3; (1,5), (2,4), (1,5), (1,2))$, так что $\mathrm{len}(\kappa) = 4$ и $\mathrm{pow}(\kappa) = 5$. Тогда $\chi^{(r)} = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$, где

$$\chi_1 = \big(x_1; (x_1, x_5), (x_1, x_5), (x_1, x_2)\big), \quad \chi_2 = \big(x_2; (x_2, x_4)\big) \ \text{ и } \ \chi_3 = (x_3).$$

Определим для $r > 1$ и описанных $\chi^{(r)}$ понятие длины и конфигурации. Положим $\mathrm{len}(\chi^{(r)}) = \mathrm{len}(\kappa)$ и введем $\mathrm{pow}(\chi^{(r)})$ как число различных вещественных чисел вида $x_i, z_\ell^{(i)}$, входящих в $\chi^{(r)}$.

Кроме того, потребуем дополнительно, чтобы $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Тогда, как нетрудно видеть, $\mathrm{pow}(\chi^{(r)}) = \mathrm{pow}(\kappa)$. Более того, при $r = 1$ такое определение будет совпадать с приведенным выше, а в случае $\kappa \in \mathbb{T}$ имеет место равенство $\mathrm{len}(\chi^{(r)}) = \sum_{i=1}^r \mathrm{len}(\chi_i)$, где $\chi^{(r)} = (\chi_1, \dots, \chi_r)$.

Отсюда легко следует, что условные распределения $\mathcal{L}_{\mathbf{x},\kappa_1}\big(\xi_L^{(n)}(t)\big)$ и $\mathcal{L}_{\mathbf{x},\kappa_2}\big(\xi_L^{(n)}(t)\big)$ будут сосредоточены в несовпадающих точках E^r, если только длины и/или мощности конфигураций κ_1 и κ_2 различны.

Следовательно, при выборе $B = \{\chi \in E^r : \mathrm{pow}(\chi) = \mathrm{len}(\chi) + r\}$ из-за непрерывности распределения φ выполняются равенства (11). $\square$

Таким образом, в неравенстве (9) правая часть оказывается достижимой и тем самым величины $p_{\mathbb{NT}}$, определяемые равенством (10), могут служить характеристиками точности решения уравнения (3) с помощью $(n, 1)$-процессов.

Литература

1. *Ermakov S. M., Nekrutkin V. V., Sipin A. S.* Random processes for classical equations of mathematical physics. Dordrecht e.a.: Kluwer Academic Publishers, 1989. 281 p.

2. *Golyandina N. E., Nekrutkin V. V.* Homogeneous balance equation for measures: errors of the stochastic solution // Monte Carlo Methods and Applications. 1999. Vol. 5, N 3. P. 1–67.

3. *Kac M.* Foundation of kinetic theory // Proc. 3-d Berkly Symp. on Math. Stat. and Prob. 1956. Univ. Calif. Vol. 3. P. 171–197.

4. *McKean H. P.* An exponential formula for solving Boltzmann equation for a maxwellian gas // Journal of Combinatorial Theory. 1967. Vol. 2. P. 358–382.

5. *Ширяев А. Н.* Вероятность. 3-е изд. Т. 1. М.: МЦМНО, 2004. 519 с.

6. *Nekrutkin V. V., Tur N. I.* Asymptotic expansions and estimators with small bias for Nanbu processes // Monte-Carlo Methods and Applications. 1997. Vol. 3, N 1. P. 1–36.

7. *Nekrutkin V.* Non-Poisson particle systems and Boltzmann equations // Journal of Statistical Planning and Inference. 2000. Vol. 85. P. 183–197.

Статья поступила в редакцию 26 июня 2014 г.

Сведения об авторах

Некруткин Владимир Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент; vnekr@statmod.ru

Советкин Евгений Алексеевич — научный сотрудник; e.sovetkin@gmail.com

ON THE ERRORS OF STOCHASTIC SOLUTION FOR EQUATIONS OF BOLTZMANN TYPE: EXACT UPPER BOUNDS

Vladimir V. Nekrutkin[1], *Evgeny A. Sovetkin*[2]

[1] St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; vnekr@statmod.ru

[2] RWTH Aachen University, Germany; e.sovetkin@gmail.com

Nonlinear equations of Boltzmann type describe the time evaluation of a system with many «particles» and pairwise interactions. Such equations play significant role in many scientific areas, such as dynamic of rarefied gas, coagulation theory, quantum physics etc. As a rule, Monte Carlo methods are the main methods of numerical solution of Boltzmann type equations. Yet the precision of the corresponding stochastic algorithms is not completely investigated. The paper is devoted to homogeneous equations of Boltzmann type with bounded total cross-sections. These equations are solved with the help of the so-called $(n, 1)$-processes, the error of such a solution is measured in variation norm. We present the upper bound of this variation and prove that it is precise in the class of all equations of Boltzmann type. In other words, this upper bound holds for all the equations under consideration and is achieved for some of them. Refs 7.

Keywords: Monte Carlo methods, Boltzmann equations, n-particle processes, exact upper bounds.

ПЕРЕЧЕНЬ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В ЖУРНАЛЕ
«ВЕСТНИК САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА»
в 2014 году

СЕРИЯ 1: МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА, АСТРОНОМИЯ

Математика Вып. Стр.

Антонов А. А., Ермаков С. М. Эмпирическая оценка погрешности интегрирования методом квази Монте-Карло 1 3–11
Воротов А. А. Формулы для функции Грина и марковское свойство поля переходов для однородных цепей Маркова 1 12–22
Груша А. Ю. Точность оценивания передаточной функции линейного фильтра 1 23–32
Сипин А. С. Применение схемы Неймана—Улама к решению первой краевой задачи для параболического уравнения 1 33–44
Товстик Т. М. Вероятности разорения страховой компании для некоторых стохастических моделей риска 1 45–54
Холшевников К. В., Шайдулин В. Ш. О свойствах интегралов от многочлена Лежандра 1 55–67
Чурилова М. А. Вычислительные свойства функциональных апостериорных оценок для стационарной задачи реакции-диффузии 1 68–78
Шабозов М. Ш., Шабозова А. А. Наилучшая квадратурная формула типа Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности 1 79–86
Бурова И. Г., Полуянов С. В. О построении приближений интегро-дифференциальными сплайнами пятого порядка первой высоты 2 183–191
Косовский Н. К., Косовская Т. М. Принадлежность классу **P** задачи проверки выполнимости пропозициональной формулы с заданным значением её скобочной характеристики 2 192–195
Невзоров В. Б., Товмасян С. А. О максимальном значении среднего числа рекордов. 2 196–200
Фролов А. Н. О неравенствах для вероятностей объединений событий и лемме Бореля—Кантелли 2 201–210
Яковлев А. В. О погружении универсально согласного 2-расширения в универсально согласное 2 211–221
Басов В. В., Ваганян А. С. Обобщенные нормальные формы двумерных систем с гамильтоновой невозмущенной частью 3 351–359
Бегун Н. А. Об устойчивости листовых инвариантных множеств трехмерных периодических систем 3 360–367
Косовский Н. К., Косовская Т. М. Полная алгоритмическая доопределимость любых алгоритмов, работающих на ограниченной памяти 3 368–376
Крыжевич С. Г. Отслеживание по подпоследовательностям для непрерывных отображений 3 377–379
Смирнова В. Б., Утина Н. В., Шепелявый А. И., Перкин А. А. Условия отсутствия циклов второго рода для непрерывных и дискретных систем с цилиндрическим фазовым пространством 3 380–391
Nicoleta Ularu, Laura Stanciu. Properties for an integral operator of p-valent functions . . 3 392–398

Механика

Арутюнян А. Р., Арутюнян Р. А. Рост коррозионных трещин и долговременная прочность хрупких материалов 1 87–95
Беляев А. К., Котов В. В., Полянский В. А., Смирнова Н. А. Биоморфное управление в задаче об активном подавлении колебаний 1 96–106
Зуев С. М. Стабилизация положения равновесия материальной точки на трех кривошипно-шатунных опорах 1 107–115
Колесников Е. К., Яковлев А. Б. О сохранении формы орбиты микрочастицы с переменным зарядом, движущейся в плазмосфере Земли 1 116–123

Кунова О. В., Нагнибеда Е. А. О влиянии моделей обменных химических реакций на параметры течения воздуха за сильными ударными волнами 1 124–133
Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Континуальная модель деформации графена 1 134–143
Морщинина А. А., Морщинина Д. А. О математическом моделировании глаукомы .. 1 144–151
Пасынкова И. А. Совместные нелинейные колебания неуравновешенного ротора и корпуса 1 152–161
Сабанеев В. С. Присоединенные массы сжатого эллипсоида вращения вблизи плоской стенки 1 162–170
Арутюнян Р. А. Радиационное старение и разрушение металлических сплавов 2 222–227
Даль Ю. М. О формулах Г. В. Колосова в плоской задаче теории упругости при наличии периодических разрезов 2 228–236
Забиякин М. В. Колебания вращающейся на роликах цилиндрической оболочки 2 237–244
Зотиков А. С., Лашков В. А. Коэффициент восстановления скорости при ударе абсолютно упругой частицы в форме эллипсоида вращения 2 245–253
Кабанов С. А. Оптимизация динамики систем с коррекцией параметров структуры управления 2 254–260
Кабриц С. А., Шамина В. А. Изгиб оболочки вращения поперечной силой и моментом 2 261–270
Колесников Е. К., Мануйлов А. С. Условие равновесия Беннета для релятивистского электронного пучка, распространяющегося в режиме ионной фокусировки продольно внешнему магнитному полю 2 271–277
Кулешов А. С., Рыбин В. В. Об управляемости системы А. Ю. Ишлинского 2 278–283
Павилайнен Г. В., Бембеева А. И., Канин М. С. Упруго-пластический изгиб разнопрочных балок 2 284–291
Пасынкова И. А. Прецессия неуравновешенного ротора в неизотропных опорах 2 292–302
Рябинин А. Н. Влияние положения элерона на трансзвуковое обтекание аэродинамического профиля 2 303–310
Мирошин Р. Н. Простое неравенство для дисперсии числа нулей дифференцируемого гауссовского стационарного процесса 3 399–409
Аксенова О. А. О влиянии вида аппроксимации коэффициентов обмена на поверхности на характер неустойчивости течения разреженного газа в канале 3 410–418
Рябинин А. Н. Численное исследование поперечного обтекания нескольких пластин на экране 3 419–427
Халидов И. А. Применение полигауссовских случайных процессов к моделированию обтекания шероховатой поверхности потоком разреженного газа 3 428–437
Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. Модели теории оболочек и пластин в задачах офтальмологии 3 438–458
Колесников Е. К., Мануйлов А. С. К вопросу о формулировке уравнения поперечной динамики релятивистского электронного пучка, распространяющегося в режиме ионной фокусировки 3 459–464
Лопатухина И. Е. Колебания электромеханической системы, возбуждаемые двумя электродвигателями постоянного тока 3 465–469

Астрономия

Санникова Т. Н. Осредненные уравнения движения в центральном поле при постоянном по модулю возмущающем ускорении 1 171–179
Витязев В. В., Цветков А. С. Кинематический анализ собственных движений звезд, свободный от эффекта систематического хода параллаксов по небу 2 311–321
Громов А. О. Модели галактик со штеккелевским потенциалом 2 322–330
Колесов А. К., Кропачева Н. Ю. Об асимптотическом световом режиме в бесконечной среде вдали от осевого источника энергии 2 331–339
Санникова Т. Н., Холшевников К. В. К выводу уравнений движения в оскулирующих элементах 2 340–344
Бобылев В. В. Ориентация и кинематика системы цефеид в Галактике 3 470–479
Дементьев А. В. О некоторых особенностях отражения шарообразным экраном излучения источника, вращающегося вокруг своей оси 3 480–489
Петров С. Д., Павловская Н. С. Глобальные геодинамические эффекты вариаций атмосферного давления: II. Результаты 3 490–497

Хроника

К 90-летию Алексея Федоровича Андреева 2 345–347
К 75-летию Романа Николаевича Мирошина 3 498–499
К юбилею Светланы Михайловны Бауэр 3 500
К 60-летию Алексея Серафимовича Матвеева 3 501–503
К 75-летию Виктора Александровича Морозова 3 504–505
К 60-летию Андрея Евгеньевича Барабанова 3 506–507

Заседания секции теоретической механики им. Н. Н. Поляхова Дома Ученых РАН
27 ноября 2013 года 2 236
27 февраля 2014 года 2 270
27 марта 2014 года 2 277
24 апреля 2014 года 2 302
24 апреля 2014 года 3 409
15 мая 2014 года 3 437
8 октября 2014 года 3 464

CONTENTS

Vestnik of St.Petersburg University. Series 1. Volume 1 (59). Issue 4. 2014

MATHEMATICS

Bibikov Yu. N., Pliss V. A. On the dependence of initial values of the maximal interval of existence of a solution of a differential equation ....

Dmytriev A. V., Ermakov S. M. Monte Carlo method and asynchronous iterations ....

Ivanov O. A. Bernoully trial and generalizations of Fibonacci numbers ....

Krivulin N. K., Nev O. A. Evaluation of asymptotic characteristics of a stochastic dynamical system with event synchronization ....

Leonov G. A., Alekseeva T. A. The estimates of Lyapunov dimension in attractors of generalized Rossler systems ....

Nekrutkin V. V., Sovetkin E. A. On the errors of stochastic solution for equations of Boltzmann type: exact upper bounds ....

Ponomareva A. Yu., Chirkov M. K. Optimization of generalized finite non-stationary minimax fuzzy automata ....

Romanovsky J. V. Finding a contour with the smallest mean expenses in a graph with variable lenghts of arcs. The simplest case ....

MECHANICS

Bykov V. G., Kovachev A. S. Dynamic of a statically unbalanced rotor with eccentric ball autobalancer ....

Belyaev A. K. The buckling of the transversal-isotropic spherical segment under influence of the load with a flat base ....

Tovstik P. E., Tovstik T. P. Free vibrations of anisotropic beam ....

Yushkov M. P., Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh. On relationship between the control theory and nonholonomic mechanics ....

Shatrov E. A. The use of principal coordinates in the problem of oscillation suppresion of a trolley with two pendulums ....

Kuleshov A. S., Chernyakov G. A. Motion of a dynamically symmetric paraboloid on a perfectly rough plane ....

ASTRONOMY

Grachev S. I. The formation of polarized lines: factorization of the hanle phase matrix and $\sqrt{\epsilon}$-law in a most general form ....

Malkin Z. M. On weighting of astrometric VLBI observations ....

Sivkov-Enin I. A. Using gpu for modelling of self-gravitating systems ....

Shirokov S. I., Tekhanovich D. I., Baryshev Yu. V. Fluctuations of the spatial galaxy distribution in the cosmos deep survey at gigaparsec scales ....

CHRONICLE

Михаил Петрович Юшков (к 80-летию со дня рождения) ....

List of the articles ....