

ОПТИМИЗАЦИЯ ОБОБЩЕННЫХ КОНЕЧНО-НЕСТАЦИОНАРНЫХ МИНИМАКСНЫХ НЕЧЕТКИХ АВТОМАТОВ*

А. Ю. Пономарева, М. К. Чирков

С.-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

В работе теоретически обоснован и детально разработан специальный метод минимизации числа состояний и построения минимальных форм обобщенного конечно-нестационарного минимаксного нечеткого автомата, основанный на доказанной ранее теореме о связи максиминных и минимаксных произведений нечетких матриц и разработанной методике матричной оптимизации конечно-нестационарного максиминного нечеткого автомата. Доказано, что от заданного обобщенного конечно-нестационарного минимаксного нечеткого автомата можно перейти к максиминному нечеткому автомату того же типа, являющемуся дополнением для исходного минимаксного автомата. Также доказано, что если заданные обобщенные конечно-нестационарные минимаксный и максиминный нечеткие автоматы являются дополнениями друг друга, то их минимальные формы имеют одно и тоже число состояний, что позволяет сначала перейти от обобщенного конечно-нестационарного минимаксного нечеткого автомата к обобщенному конечно-нестационарному максиминному нечеткому автомату, затем минимизировать известным методом преобразующих матриц полученный обобщенный конечно-нестационарный максиминный нечеткий автомат и, перейдя обратно к его дополнению, получить минимальную форму исходного обобщенного конечно-нестационарного минимаксного нечеткого автомата. В результате разработаны процедура и соответствующий ей алгоритм минимизации числа состояний и построения минимальной формы обобщенного конечно-нестационарного минимаксного нечеткого автомата. В заключение дан пример применения предложенного специального метода минимизации к заданному обобщенному минимаксному конечно-нестационарному нечеткому автомату. Библиогр. 7 назв.

Ключевые слова: обобщенный конечно-нестационарный минимаксный («оптимистический») нечеткий автомат, обобщенный конечно-нестационарный максиминный («пессимистический») нечеткий автомат, дополнение конечно-нестационарного минимаксного нечеткого автомата, минимальная форма конечно-нестационарного минимаксного нечеткого автомата.

1. Введение. В работе [1] был предложен один метод оптимизации стационарного обобщенного минимаксного (иначе «оптимистического») нечеткого автомата, определенного в работах [2–4]. Кроме того, в работах [5, 6] решена проблема оптимизации абстрактной структуры обобщенного (имеющего выходной алфавит) конечно-нестационарного нечеткого максиминного (иначе «пессимистического») автомата, разработаны теоретически обоснованные алгоритмы минимизации такого автомата по числу состояний, основанные на построении семейств специальных преобразующих матриц. Поскольку в работе [4] установлена связь между обобщенными стационарными автоматами обоих видов — «пессимистическим» и «оптимистическим», основная цель данной работы состоит в установлении подобной связи между обобщенными конечно-нестационарными «оптимистическим» и «пессимистическим» автоматами и разработке метода оптимизации конечно-нестационарного «оптимистического» автомата, опираясь на результаты работ [4–6].

2. Нечеткие множества. Обозначим символом \mathcal{L} полную дистрибутивную решетку

$$\mathcal{L} = ([0, 1], \max, \min, \geq),$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00538).

т. е. замкнутый интервал $[0, 1]$ с операциями (где $a, b \in [0, 1]$)

$$a + b = \max(a, b), \quad ab = \min(a, b), \quad (1)$$

условно называемыми «сложением» и «умножением», и обычным упорядочиванием. В дальнейшем в данной работе условимся использовать знаки, обозначающие «сложение» и «умножение», только для записи (max-min)-операций (1), а символ \mathcal{L} также для обозначения интервала $[0, 1]$. В отличие от четкого множества, нечеткое множество Z над универсальным множеством U определяется как множество упорядоченных пар $Z = \{z, \mu_Z(z)\}$, где $\mu_Z(z) \in [0, 1]$ для всех $z \in U$. Функция $\mu_Z(z)$ в этом случае называется *характеристической функцией степени принадлежности* (или просто *функцией степени принадлежности*) элемента z нечеткому множеству Z . В частном случае при $\mu_Z(z) \in \{0, 1\}$ для всех $z \in U$ нечеткое множество Z будет обычным четким множеством над универсальным множеством U . Будем также обозначать через $\mathcal{L}^{m,n}$ множество всех $(m \times n)$ -матриц над \mathcal{L} и называть матрицы из $\mathcal{L}^{m,n}$ *нечеткими*.

3. Операции над нечеткими множествами и матрицами. Если Z_1 и Z_2 суть нечеткие множества над U , то их *объединением* называют [7] нечеткое множество $Z = Z_1 \cup Z_2$ с функцией принадлежности $\mu_Z(z) = \mu_{Z_1 \cup Z_2}(z) = \max[\mu_{Z_1}(z), \mu_{Z_2}(z)]$, $z \in U$. *Пересечением* Z_1 и Z_2 называют нечеткое множество $Z = Z_1 \cap Z_2$ с функцией принадлежности $\mu_Z(z) = \mu_{Z_1 \cap Z_2}(z) = \min[\mu_{Z_1}(z), \mu_{Z_2}(z)]$, $z \in U$. *Дополнением нечеткого множества* Z называют нечеткое множество \bar{Z} с функцией принадлежности $\mu_{\bar{Z}}(z) = 1 - \mu_Z(z)$, $z \in U$.

Дополнением нечеткой матрицы $\mathbf{R} = (\mu_{\mathbf{R}}(a_i, a_j))_{m,n} \in \mathcal{L}^{m,n}$ называют нечеткую матрицу $\bar{\mathbf{R}} \in \mathcal{L}^{m,n}$ с элементами

$$\mu_{\bar{\mathbf{R}}}(a_i, a_j) = 1 - \mu_{\mathbf{R}}(a_i, a_j). \quad (2)$$

Максиминное произведение нечетких матриц $\mathbf{R}^{(1)} \in \mathcal{L}^{m,n}$ и $\mathbf{R}^{(2)} \in \mathcal{L}^{n,k}$ определяется как нечеткая матрица $\mathbf{R} = \mathbf{R}^{(1)} \circ \mathbf{R}^{(2)} \in \mathcal{L}^{m,k}$ с элементами

$$\mu_{\mathbf{R}}(a_i, a_j) = \mu_{\mathbf{R}^{(1)} \circ \mathbf{R}^{(2)}}(a_i, a_j) = \max_g \min [\mu_{\mathbf{R}^{(1)}}(a_i, a_g), \mu_{\mathbf{R}^{(2)}}(a_g, a_j)]. \quad (3)$$

Минимаксное произведение нечетких матриц $\mathbf{R}^{(1)}$ и $\mathbf{R}^{(2)}$ определяется как нечеткая матрица $\mathbf{R} = \mathbf{R}^{(1)} * \mathbf{R}^{(2)}$ с элементами

$$\mu_{\mathbf{R}}(a_i, a_j) = \mu_{\mathbf{R}^{(1)} * \mathbf{R}^{(2)}}(a_i, a_j) = \min_g \max [\mu_{\mathbf{R}^{(1)}}(a_i, a_g), \mu_{\mathbf{R}^{(2)}}(a_g, a_j)]. \quad (4)$$

4. Типы конечно-нестационарных нечетких автоматов. Пусть X, A, Y — алфавиты соответственно входных символов, состояний и выходных символов. Будем называть *нечеткой элементарной автоматной структурой*, заданной над \mathcal{L} , систему

$$\mathcal{A}_{ij}^{\oplus} = \left\langle X^{(i,j)}, A_i, A_j, Y^{(i,j)}, \{\mathbf{F}_A^{(i,j)}(s, l)\} \right\rangle, \quad (5)$$

где символ \oplus обозначает один из символов \circ или $*$, определяющих типы произведения матриц (3) и (4) соответственно, $X^{(i,j)} \subseteq X$, $A_i, A_j \subseteq A$, $|A_i| = m_i$, $|A_j| = m_j$, $Y^{(i,j)} \subseteq Y$, а $\{\mathbf{F}_A^{(i,j)}(s, l)\}$ есть совокупность нечетких *матриц переходов* из состояний алфавита A_i в состояния алфавита A_j , где $\mathbf{F}_A^{(i,j)}(s, l) \in \mathcal{L}^{m_i, m_j}$ есть матрица, соответствующая паре (x_s, y_l) , $x_s \in X^{(i,j)}$, $y_l \in Y^{(i,j)}$.

Пусть задано конечное упорядоченное множество элементарных автоматных структур \mathcal{A}^\oplus вида (5) и Q_A — конечное упорядоченное множество финальных распределений степеней принадлежности (вектор-столбцов с элементами из \mathcal{L}) состояний множества конечных состояний в алфавитах $A_j \subseteq A$. *Обобщенным нечетким конечно-нестационарным автоматом* назовем систему

$$\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus = \langle X, \mathcal{A}^\oplus, Y, \mathbf{r}_A, \mathcal{G}_A(G, C, c_0, f_A, \varphi_A), Q_A \rangle, \quad (6)$$

где \mathcal{G}_A — *структурный граф автомата* (конечный, ориентированный, нагруженный граф), имеющих:

- конечное множество вершин $C = \{c_0, c_1, \dots, c_{d-1}\}$, каждой вершине c_i , $i = \overline{0, d-1}$, сопоставлен алфавит состояний A_i , $i = \overline{0, d-1}$, $\bigcup_i A_i = A$, $|A_i| = m_i$;
- *начальную вершину* c_0 , для которой задано \mathbf{r}_A — начальное распределение степеней принадлежности состояний из A_0 множеству начальных состояний;
- конечное множество G направленных ребер, $g_{ij} \in G$ — ребро, соединяющее вершины c_i и c_j ;
- однозначную функцию $f_A : G \rightarrow \mathcal{A}^\oplus$, $f(g_{ij}) = \mathcal{A}_{ij}^\oplus$, $\mathcal{A}_{ij}^\oplus \in \mathcal{A}^\oplus$, причем

$$\bigcup_{g_{ij} \in G} X^{(i,j)} = X, \quad \bigcup_{g_{ij} \in G} Y^{(i,j)} = Y;$$

- однозначную функцию $\varphi_A : C \rightarrow Q_A$, $\varphi_A(c_i) = \mathbf{q}_A^{(i)}$, $i = \overline{0, d-1}$.

Пусть задан нечеткий конечно-нестационарный автомат (6). Выделим в структурном графе какую-либо вершину $c_j \in C$. Пусть $\varphi_A(c_j) = \mathbf{q}_A^{(j)}$. Рассмотрим один из путей $\Omega_{0j}^{(t)}$ длины t , ведущий из начальной вершины c_0 в вершину c_j графа, и выпишем последовательность элементарных автоматных структур, отмечающих ребра, образующие этот путь: $\mathcal{A}_{i_0 i_1}^\oplus, \mathcal{A}_{i_1 i_2}^\oplus, \dots, \mathcal{A}_{i_{t-1} i_t}^\oplus$. Рассмотрим любую пару слов (w, v) , $w = x_{s_1} x_{s_2} \dots x_{s_t}$, $x_{s_\nu} \in X^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}$, $v = y_{l_1} y_{l_2} \dots y_{l_t}$, $y_{l_\nu} \in Y^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}$, $\nu = \overline{1, t}$, одной длины t в алфавитах X и Y . Множество всех пар таких слов назовем *множеством допустимых пар слов для пути* $\Omega_{0j}^{(t)}$ и обозначим $Z_{\text{доп}}(\Omega_{0j}^{(t)})$, при этом будем считать, что пустые слова $(e, e) \in Z_{\text{доп}}(\Omega_{00})$. *Весом отображения* слова w в слово v , порождаемого путем $\Omega_{0j}^{(t)}$ структурного графа \mathcal{G}_A автомата $\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus$ при заданном \mathbf{r}_A , назовем величину

$$\Phi_j^{(\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)}(w, v) = \mathbf{r}_A \oplus \prod_{\nu=1}^t \mathbf{F}_A^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}(s_\nu, l_\nu) \oplus \mathbf{q}_A^{(j)}, \quad (7)$$

где знак \prod^\oplus обозначает произведение нечетких матриц одного из двух типов (3), (4), определенных в п. 3, $(w, v) \in Z_{\text{доп}}(\Omega_{0j}^{(t)})$, $|w| = |v| > 0$. Если же $|w| = |v| = 0$, то $\Phi_0^{(\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)}(e, e) = \mathbf{r}_A \oplus \mathbf{q}_A^{(0)}$. Обозначим символом $\tilde{\Omega}_{0j}$ множество всех путей в структурном графе автомата, ведущих из начальной вершины c_0 в вершину $c_j \in C$, и символом $\tilde{\Omega}_{0j}^{(t)}$ — множество всех таких путей, имеющих длину t , и введем обозначение

$$Z_{\text{доп}}(\tilde{\Omega}_{0j}^{(t)}) = \bigcup_{\Omega_{0j}^{(t)} \in \tilde{\Omega}_{0j}^{(t)}} Z_{\text{доп}}(\Omega_{0j}^{(t)}).$$

Нечетким отображением, индуцируемым вершиной c_j структурного графа автомата $\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus$ при заданном \mathbf{r}_A , назовем отображение $\tilde{\Phi}_j^{(\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)} : Z_{\text{доп}}(\tilde{\Omega}_{0j}^{(t)}) \rightarrow \mathcal{L}$, определяемое

выражением

$$\tilde{\Phi}_j^{(\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)}(w, v) = \begin{cases} \max_{\Omega_{0j}^{(t)} \in \tilde{\Omega}_{0j}^{(t)}} \Phi_j^{(\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)}(w, v) & \text{при } \tilde{\Omega}_{0j}^{(t)} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{при } \tilde{\Omega}_{0j}^{(t)} = \emptyset, \end{cases} \quad (8)$$

где $|w| = |v| = t$, $t = 0, 1, \dots$, и \emptyset — пустое множество. Будем говорить, что нечеткое отображение $\tilde{\Phi}_j^{(\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)}$ является *нулевым отображением*, если для всех пар слов $(w, v) \in Z_{\text{доп}}(\tilde{\Omega}_{0j}^{(t)})$ выполнено $\tilde{\Phi}_j^{(\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)}(w, v) = 0$. В целом автомат $\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus$ будет индуцировать *спектр взаимосвязанных нечетких отображений*

$$\tilde{\Phi}^{(\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)} = \left\{ \tilde{\Phi}_0^{(\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)}, \tilde{\Phi}_1^{(\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)}, \dots, \tilde{\Phi}_{d-1}^{(\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)} \right\},$$

соответствующих различным вершинам $c_j \in C$, $j = \overline{0, d-1}$, его структурного графа. При этом нулевые отображения в спектре $\tilde{\Phi}^{(\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)}$ можно не учитывать. В зависимости от того, какой тип произведения матриц используется в выражении (7), т. е. какой из знаков $\circ, *$ должен подразумеваться под символом \oplus , можно определить следующие два различных типа обобщенных конечно-нестационарных нечетких автоматов $\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus$ (6):

- *максиминные* (иначе, «*пессимистические*») обобщенные конечно-нестационарные нечеткие автоматы $\tilde{\mathcal{A}}_f^\circ$;
- *минимаксные* (иначе, «*оптимистические*») обобщенные конечно-нестационарные нечеткие автоматы $\tilde{\mathcal{A}}_f^*$.

5. Формулировка задачи. Пусть заданы два нечетких конечно-нестационарных автомата, имеющих одинаковый входной X и выходной Y алфавиты, одно и то же множество ребер G , одинаковые множества вершин C и одну и ту же начальную вершину c_0 структурного графа, — автомат $\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus$ (6) и автомат

$$\tilde{\mathcal{B}}_f^\oplus = \langle X, B^\oplus, Y, \mathbf{r}_B, \mathcal{G}_B(G, C, c_0, f_B, \varphi_B), Q_B \rangle, \quad (9)$$

индуцирующий при заданном \mathbf{r}_B спектр взаимосвязанных отображений $\tilde{\Phi}^{(\tilde{\mathcal{B}}_f^\oplus)}$. Будем называть автоматы (6) и (9) *эквивалентными*, если они индуцируют одни и те же спектры взаимосвязанных автоматных отображений, обозначим это $\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus \approx \tilde{\mathcal{B}}_f^\oplus$.

Будем говорить, что автомат $\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus$ (6) находится в *минимальной форме*, если не существует такого эквивалентного ему автомата $\tilde{\mathcal{B}}_f^\oplus$ (9) того же типа, у которого найдется хоть одна вершина $c_i \in C$, такая что $|A_i| < |B_i|$. *Минимальной формой* нечеткого конечно-нестационарного автомата $\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus$ (6) назовем любой эквивалентный ему автомат $\tilde{\mathcal{B}}_f^\oplus$ (9) того же типа, находящийся в минимальной форме (обозначим $\tilde{\mathcal{B}}_f^\oplus = \min \tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus$).

В соответствии с введенными определениями может быть сформулирована следующая задача: задан обобщенный нечеткий конечно-нестационарный автомат $\tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus$ (6) и требуется построить его минимальную форму — автомат того же типа $\tilde{\mathcal{B}}_f^\oplus = \min \tilde{\mathcal{A}}_f^\oplus$.

Данная задача решена в работах [5] и [6] путем последовательного применения преобразований с помощью специальных матриц для случая «пессимистических» автоматов $\tilde{\mathcal{A}}_f^\circ$. Основная цель данной работы — разработка и обоснование методов минимизации «оптимистических» конечно-нестационарных нечетких автоматов $\tilde{\mathcal{A}}_f^*$.

6. Связь между автоматами. В работе [4] доказано следующее утверждение относительно произведений нечетких матриц переходов стационарных нечетких обобщенных автоматов $\mathcal{A}_f^\circ, \mathcal{B}_f^*$, которые являются частным случаем конечно-нестационарных нечетких автоматов.

Теорема 1. Пусть (w, v) , $w = x_{s_1}x_{s_2}\dots x_{s_d}$, $v = y_{l_1}y_{l_2}\dots y_{l_d}$, есть любая пара слов длины $d > 0$ в алфавитах X, Y , а для стационарных обобщенных нечетких автоматов $\mathcal{A}_f^\circ, \mathcal{B}_f^*$ выполнено $|A| = |B| = m$, $\mathbf{F}_A(x_s, y_l) = \mathbf{F}_B(x_s, y_l) = \mathbf{F}(x_s, y_l) \in \mathcal{L}^{m,m}$ для всех $x_s \in X, y_l \in Y$. Тогда, если

$$\mathbf{F}^\circ(w, v) = \prod_{t=1}^d \mathbf{F}(x_{s_t}, y_{l_t}), \quad \mathbf{F}^*(w, v) = \prod_{t=1}^d \mathbf{F}^*(x_{s_t}, y_{l_t})$$

суть, соответственно, максиминное и минимаксное произведения нечетких матриц переходов, то справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{F}^\circ(w, v) = \overline{\prod_{t=1}^d \mathbf{F}(x_{s_t}, y_{l_t})}, \quad \mathbf{F}^*(w, v) = \overline{\prod_{t=1}^d \mathbf{F}^*(x_{s_t}, y_{l_t})},$$

где согласно (2) $\overline{\mathbf{F}(x_{s_t}, y_{l_t})} = (1 - F_{ij}(x_{s_t}, y_{l_t}))_{m,m}$.

Введем следующее определение. Условимся говорить, что $\widetilde{\Phi}_i(\widetilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)$ есть дополнение нечеткого отображения автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_f^\oplus$ в вершине c_i , $i \in \{0, d-1\}$, если для любых $(w, v) \in Z_{\text{доп}}(\widetilde{\Omega}_{0i})$, $|w| = |v|$, $\widetilde{\Phi}_i(\widetilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)(w, v) = 1 - \widetilde{\Phi}_i(\widetilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)(w, v)$. Будем называть нечеткий конечно-нестационарный автомат $\widetilde{\mathcal{A}}_f^\oplus$ дополнением нечеткого конечно-нестационарного автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_f^\oplus$, если он индуцирует спектр взаимосвязанных нечетких отображений

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{\mathcal{A}}_f^\oplus) = \left\{ \widetilde{\Phi}_0(\widetilde{\mathcal{A}}_f^\oplus), \widetilde{\Phi}_1(\widetilde{\mathcal{A}}_f^\oplus), \dots, \widetilde{\Phi}_{d-1}(\widetilde{\mathcal{A}}_f^\oplus) \right\}.$$

В таком случае оказывается справедливым следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть заданы два конечно-нестационарных обобщенных нечетких автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_f^\circ$ (6) и $\widetilde{\mathcal{B}}_f^*$ (9), для которых выполнено следующее:

- 1) $\mathbf{r}_A = \overline{\mathbf{r}}_B$, $|A_i| = |B_i|$, для всех $c_i \in C$;
- 2) если для каждой вершины $c_i \in C$ выполняется $\varphi_A(c_i) = \mathbf{q}_A^{(i)}$, то $\varphi_B(c_i) = \mathbf{q}_B^{(i)} = \overline{\mathbf{q}}_A^{(i)}$, и множество Q_B включает в себя все различные векторы $\mathbf{q}_B^{(i)} = \overline{\mathbf{q}}_A^{(i)}$, $c_i \in C$;
- 3) если для ребра $g_{ij} \in \mathcal{G}$ $f_A(g_{ij}) = \mathcal{A}_{ij}^\circ$, то $f_B(g_{ij}) = \mathcal{B}_{ij}^*$, где

$$\mathcal{B}_{ij}^* = \langle X^{(i,j)}, \mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j, Y^{(i,j)}, \{\mathbf{F}_B^{(i,j)}(s, l)\} \rangle, \quad \mathbf{F}_B^{(i,j)}(s, l) = \overline{\mathbf{F}_A^{(i,j)}(s, l)}$$

для всех $x_s \in X^{(i,j)}$, $y_l \in Y^{(i,j)}$, и множество \mathcal{B}^* включает в себя все такие различные автоматные структуры \mathcal{B}_{ij}^* , $g_{ij} \in \mathcal{G}$, $c_i, c_j \in C$.

Тогда для этих автоматов выполняется

$$\widetilde{\mathcal{A}}_f^\circ \approx \widetilde{\mathcal{B}}_f^*, \quad \widetilde{\mathcal{A}}_f^\circ \approx \widetilde{\mathcal{B}}_f^*. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы показать, что $\tilde{\mathcal{A}}_f^\circ \approx \tilde{\mathcal{B}}_f^*$, необходимо установить, что автоматы $\tilde{\mathcal{A}}_f^\circ$ и $\tilde{\mathcal{B}}_f^*$, индуцируют одни и те же спектры взаимосвязанных нечетких отображений $\tilde{\Phi}(\tilde{\mathcal{A}}_f^\circ)$ и $\tilde{\Phi}(\tilde{\mathcal{B}}_f^*)$. Заметим при этом, что согласно определению дополнения автомата $\tilde{\mathcal{B}}_f^*$ выполнено $\tilde{\Phi}(\tilde{\mathcal{B}}_f^*) = \tilde{\Phi}(\tilde{\mathcal{B}}_f^*)$.

Зафиксируем вершину $c_i \in C$. Рассмотрим любой путь $\Omega_{0i}^{(t)} \in \tilde{\Omega}_{0i}^{(t)}$, который проходит через последовательность вершин $c_0 = c_{i_0}, c_{i_1}, \dots, c_{i_t} = c_i$, пару слов $(w, v) \in Z_{\text{доп}}(\Omega_{0i}^{(t)})$, $|w| = |v| = t$, и пусть этот путь отмечен последовательностью элементарных автоматных структур $\mathcal{A}_{i_0i_1}^\circ, \mathcal{A}_{i_1i_2}^\circ, \dots, \mathcal{A}_{i_{t-1}i_t}^\circ$ в автомате $\tilde{\mathcal{A}}_f^\circ$. Запишем вес отображения слова w в слово v (7), порождаемого путем $\Omega_{0i}^{(t)}$ структурного графа \mathcal{G}_A автомата $\tilde{\mathcal{A}}_f^\circ$, тогда:

$$\begin{aligned} \Phi_i^{(\tilde{\mathcal{A}}_f^\circ)}(w, v) &= \mathbf{r}_A \circ \prod_{\nu=1}^t \mathbf{F}_A^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}(s_\nu, l_\nu) \circ \mathbf{q}_A^{(i_t)} = \bar{\mathbf{r}}_B \circ \prod_{\nu=1}^t \bar{\mathbf{F}}_B^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}(s_\nu, l_\nu) \circ \bar{\mathbf{q}}_B^{(i_t)} = \\ &= \mathbf{r}_B * \prod_{\nu=1}^t \mathbf{F}_B^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}(s_\nu, l_\nu) * \mathbf{q}_B^{(i_t)} = \bar{\Phi}_i^{(\tilde{\mathcal{B}}_f^*)}(w, v), \end{aligned}$$

согласно теореме 1 и условиям теоремы 2.

В силу произвольности выбранного пути $\Omega_{0i}^{(t)} \in \tilde{\Omega}_{0i}^{(t)}$ можно утверждать, что $\tilde{\Phi}_i^{(\tilde{\mathcal{A}}_f^\circ)}(w, v) = \tilde{\Phi}_i^{(\tilde{\mathcal{B}}_f^*)}(w, v)$ для всех пар слов $(w, v) \in Z_{\text{доп}}(\tilde{\Omega}_{0i}^{(t)})$, $|w| = |v| = t$, вершина $c_i \in C$ тоже была выбрана произвольно, значит можно утверждать, что $\tilde{\Phi}(\tilde{\mathcal{A}}_f^\circ) = \tilde{\Phi}(\tilde{\mathcal{B}}_f^*) = \tilde{\Phi}(\tilde{\mathcal{B}}_f^*)$ и согласно определению эквивалентность автоматов $\tilde{\mathcal{A}}_f^\circ$ и $\tilde{\mathcal{B}}_f^*$.

Проведя аналогичные рассуждения можно установить, что $\tilde{\mathcal{A}}_f^\circ \approx \tilde{\mathcal{B}}_f^*$. Теорема доказана.

Следствие. Если конечно-нестационарные нечеткие автоматы $\tilde{\mathcal{A}}_f^\circ$ и $\tilde{\mathcal{B}}_f^*$ удовлетворяют условиям теоремы 2 и автомат $\tilde{\mathcal{A}}_f^\circ$ находится в минимальной форме, то автомат $\tilde{\mathcal{B}}_f^*$ также находится в минимальной форме, обратно, если автомат $\tilde{\mathcal{B}}_f^*$ находится в минимальной форме, то и автомат $\tilde{\mathcal{A}}_f^\circ$ находится в минимальной форме.

Справедливость данного следствия очевидна, поскольку указанные конечно-нестационарные нечеткие автоматы согласно (10) эквивалентны, и возможность удаления любого состояния в какой-либо вершине одного из автоматов непосредственно приводит к возможности редукции соответствующего состояния в другом автомате с необходимым преобразованием элементов матриц переходов, начальных и финальных векторов.

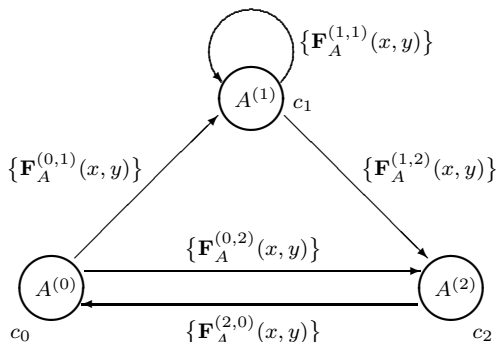
7. Алгоритм минимизации автомата $\tilde{\mathcal{A}}_f^*$. Опираясь на результаты п. 6, можно сформулировать следующую процедуру построения минимальной формы заданного «оптимистического» конечно-нестационарного нечеткого автомата $\tilde{\mathcal{A}}_f^*$ (6):

а) используя теорему 2, построить для автомата $\tilde{\mathcal{A}}_f^*$ его дополнение — автомат $\tilde{\mathcal{A}}_f^* = \tilde{\mathcal{B}}_f^\circ$, являющийся «пессимистическим» конечно-нестационарным нечетким автоматом;

б) используя методику минимизации конечно-нестационарных максиминных («пессимистических») нечетких автоматов, предложенную в работах [5, 6], найти минимальную форму автомата $\tilde{\mathcal{B}}_f^\circ$ — автомат $\tilde{\mathcal{V}}_f^\circ = \min \tilde{\mathcal{B}}_f^\circ$;

в) перейти от полученного автомата $\tilde{\mathcal{V}}_f^\circ$ к автомату $\tilde{\mathcal{V}}_f^*$, который согласно теореме 2 и следствию из нее дает решение данной задачи, т. е. минимаксный («оптимистический») нечеткий конечно-нестационарный автомат $\tilde{\mathcal{D}}_f^* = \tilde{\mathcal{V}}_f^*$ такой, что $\tilde{\mathcal{D}}_f^* = \min \tilde{\mathcal{A}}_f^*$.

8. Пример. Пусть задан обобщенный «оптимистический» нечеткий конечно-нестационарный автомат $\tilde{\mathcal{A}}_f^* = \langle X, \mathcal{A}^*, Y, \mathbf{r}_A, \mathcal{G}_A(G, C, c_0, f_A, \varphi_A), Q_A \rangle$, граф которого представлен на рисунке.



В этом автомате $\mathbf{r}_A = (0,3 \ 0,7 \ 0,7 \ 0,7)$,

$X^{(0,1)} = \{x_0\}$, $Y^{(0,1)} = \{y_0, y_1\}$, $A_0 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, $A_1 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$,

$$\mathbf{F}_A^{(0,1)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 1 & 0,6 \\ 0,3 & 0,9 & 0,7 & 0,9 \\ 0,4 & 0,8 & 0,7 & 0,8 \\ 0,5 & 0,9 & 0,9 & 0,8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_A^{(0,1)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 & 0,3 & 0,6 \\ 0,7 & 0,5 & 0,9 & 0,7 \\ 0,7 & 0,5 & 0,8 & 0,7 \\ 1 & 0,6 & 0,8 & 0,6 \end{pmatrix},$$

$X^{(1,1)} = \{x_1\}$, $Y^{(1,1)} = \{y_0, y_1\}$,

$$\mathbf{F}_A^{(1,1)}(1,0) = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 & 0,5 & 1 \\ 0,7 & 0,8 & 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,7 & 0,9 & 0,7 \\ 0,4 & 0,3 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_A^{(1,1)}(1,1) = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,7 & 0,8 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,9 & 0,9 \\ 0,8 & 0,6 & 0,5 & 0,6 \\ 0,5 & 0,8 & 0,9 & 0,9 \end{pmatrix},$$

$X^{(1,2)} = \{x_0, x_1\}$, $Y^{(1,2)} = \{y_0, y_1\}$, $A_2 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$,

$$\mathbf{F}_A^{(1,2)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,9 & 0,7 & 0,7 \\ 0,1 & 0,7 & 0,5 & 0,6 \\ 0,8 & 0,2 & 0,7 & 0,7 \\ 0,9 & 0,8 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_A^{(1,2)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,6 & 0,6 \\ 0,1 & 0,8 & 1 & 0,8 \\ 1 & 0,9 & 0,7 & 0,7 \\ 0,5 & 0,9 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_A^{(1,2)}(1,0) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,9 & 0,6 & 0,6 \\ 0,8 & 0,8 & 0,9 & 1 \\ 1 & 0,6 & 0,7 & 0,7 \\ 0,9 & 0,4 & 0,9 & 0,9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_A^{(1,2)}(1,1) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,9 & 0,7 & 0,7 \\ 1 & 0,7 & 0,2 & 0,6 \\ 0,8 & 0,8 & 1 & 0,7 \\ 0,5 & 0,7 & 0,4 & 0,8 \end{pmatrix},$$

$$X^{(0,2)} = \{x_0\}, Y^{(0,2)} = \{y_0, y_1\},$$

$$\mathbf{F}_A^{(0,2)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,9 & 0,7 & 0,7 \\ 0,5 & 0,6 & 0,9 & 0,7 \\ 0,7 & 0,5 & 0,9 & 0,7 \\ 0,7 & 0,7 & 0,7 & 0,9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_A^{(0,2)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,6 & 0,6 \\ 0,8 & 0,9 & 0,8 & 1 \\ 0,9 & 0,9 & 0,8 & 0,9 \\ 0,8 & 0,8 & 0,9 & 0,8 \end{pmatrix},$$

$$X^{(2,0)} = \{x_0\}, Y^{(2,0)} = \{y_0, y_1\},$$

$$\mathbf{F}_A^{(2,0)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,8 & 0,8 & 1 \\ 0,8 & 0,9 & 0,8 & 0,8 \\ 0,7 & 0,4 & 0,4 & 0,9 \\ 0,9 & 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_A^{(2,0)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 & 0,8 & 0,6 \\ 0,4 & 0,6 & 0,7 & 0,7 \\ 1 & 0,7 & 0,7 & 0,8 \\ 0,8 & 0,9 & 0,9 & 0,7 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}_A^{(0)} = (0,4 \ 0,7 \ 0,7 \ 0,7)^T, \quad \mathbf{q}_A^{(1)} = (0,6 \ 0,5 \ 0,7 \ 0,5)^T, \quad \mathbf{q}_A^{(2)} = (0,9 \ 0,9 \ 0,4 \ 0,7)^T.$$

Требуется построить его минимальную форму. В соответствии с первым шагом алгоритма из п. 7 для заданного автомата $\tilde{\mathcal{A}}_f^*$ строим автомат $\tilde{\mathcal{A}}_f^* = \tilde{\mathcal{B}}_f^o$ (9) согласно теореме 2, представляющий собой обобщенный «пессимистический» конечно-нестационарный нечеткий автомат с теми же структурным графом и алфавитами входов и выходов, где $B_0 = \{b_0, b_1, b_2, b_3\}$, $B_1 = \{b_0, b_1, b_2, b_3\}$, $B_2 = \{b_0, b_1, b_2, b_3\}$, $\mathbf{r}_B = (0,7 \ 0,3 \ 0,3 \ 0,3)$,

$$\mathbf{F}_B^{(0,1)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0 & 0,4 \\ 0,7 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,6 & 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_B^{(0,1)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,5 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0 & 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_B^{(1,1)}(1,0) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0,6 & 0,2 & 0,3 & 0,7 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,6 & 0,7 & 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_B^{(1,1)}(1,1) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,5 & 0 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_B^{(1,2)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0,3 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_B^{(1,2)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0,4 & 0,4 \\ 0,9 & 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,3 & 0,3 \\ 0,5 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_B^{(1,2)}(1,0) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_B^{(1,2)}(1,1) = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0,3 & 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_B^{(0,2)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,3 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_B^{(0,2)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,6 & 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_B^{(2,0)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,6 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_B^{(2,0)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}_B^{(0)} = (0,6 \ 0,3 \ 0,3 \ 0,3)^T, \quad \mathbf{q}_B^{(1)} = (0,4 \ 0,5 \ 0,3 \ 0,5)^T, \quad \mathbf{q}_B^{(2)} = (0,1 \ 0,1 \ 0,6 \ 0,3)^T.$$

Далее, в соответствии со вторым шагом алгоритма производим минимизацию автомата $\tilde{\mathcal{B}}_f^\circ$ с помощью алгоритма, приведенного в работе [6]. Получаем конечно-нестационарный «пессимистический» нечеткий автомат $\tilde{\mathcal{V}}_f^\circ = \langle X, \mathcal{V}^*, Y, \mathbf{r}_V, \mathcal{G}_V(G, C, c_0, f_V, \varphi_V), Q_V \rangle$ с теми же структурным графом и алфавитами входов и выходов, где $V_0 = \{v_0, v_1\}$, $V_1 = \{v_0, v_1, v_2\}$, $V_2 = \{v_0, v_1\}$, $\mathbf{r}_V = (0, 7 \ 0, 3)$,

$$\mathbf{F}_V^{(0,1)}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0 \\ 0,7 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_V^{(0,1)}(0, 1) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_V^{(1,1)}(1, 0) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,5 \\ 0,6 & 0,8 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_V^{(1,1)}(1, 1) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_V^{(1,2)}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 \\ 0,8 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_V^{(1,2)}(0, 1) = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_V^{(1,2)}(1, 0) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,6 & 0,1 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_V^{(1,2)}(1, 1) = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,8 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_V^{(0,2)}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_V^{(0,2)}(0, 1) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_V^{(2,0)}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_V^{(2,0)}(0, 1) = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}_V^{(0)} = (0,6 \ 0,3)^T, \quad \mathbf{q}_V^{(1)} = (0,4 \ 0,5 \ 0,3)^T, \quad \mathbf{q}_V^{(2)} = (0,1 \ 0,6)^T.$$

Выполняя преобразование $\tilde{\mathcal{V}}_f^\circ = \tilde{\mathcal{D}}_f^*$, получаем обобщенный конечно-нестационарный «оптимистический» нечеткий автомат $\tilde{\mathcal{D}}_f^* = \langle X, \mathcal{D}^*, Y, \mathbf{r}_D, \mathcal{G}_D(G, C, c_0, f_D, \varphi_D), Q_D \rangle$, эквивалентный автомату $\tilde{\mathcal{A}}_f^*$, с теми же структурным графом и алфавитами, что и у автомата $\tilde{\mathcal{V}}_f^\circ$. У полученного автомата $\mathbf{r}_D = (0,3 \ 0,7)$,

$$\mathbf{F}_D^{(0,1)}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 1 \\ 0,3 & 0,8 & 0,7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_D^{(0,1)}(0, 1) = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 & 0,3 \\ 0,7 & 0,5 & 0,8 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_D^{(1,1)}(1, 0) = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,7 \\ 0,6 & 0,7 & 0,9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_D^{(1,1)}(1, 1) = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,7 & 0,8 \\ 0,5 & 0,8 & 0,9 \\ 0,8 & 0,6 & 0,5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_D^{(1,2)}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,7 \\ 0,7 & 0,5 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_D^{(1,2)}(0, 1) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,1 & 0,8 \\ 0,9 & 0,7 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_D^{(1,2)}(1, 0) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,6 \\ 0,4 & 0,9 \\ 0,6 & 0,7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_D^{(1,2)}(1, 1) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,7 \\ 0,5 & 0,2 \\ 0,8 & 0,7 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_D^{(0,2)}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,7 \\ 0,5 & 0,7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_D^{(0,2)}(0, 1) = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,8 & 0,8 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_D^{(2,0)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_D^{(2,0)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,8 & 0,7 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}_D^{(0)} = (0,4 \ 0,7)^T, \quad \mathbf{q}_D^{(1)} = (0,6 \ 0,5 \ 0,7)^T, \quad \mathbf{q}_D^{(2)} = (0,9 \ 0,4)^T,$$

и он является минимальной формой исходного автомата $\tilde{\mathcal{A}}_f^*$.

Литература

1. Пономарева А. Ю., Чирков М. К. Об одном методе минимизации обобщенных «оптимистических» нечетких автоматов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Вып. 3. Сер. 1. 2013. С. 75–81.
2. Santos E. S. Maximin, minimax and composite sequential machines // J. Math. Anal. Appl. Vol. 24. 1968. P. 246–259.
3. Kandel A., Lee S. C. Fuzzy Switching and Automata: Theory and Applications. New York: Crane, Russak & Comp. Inc., 1979. 303 p.
4. Хохулина В. А., Чирков М. К. О разложении «оптимистических» нечетких автоматов // Математические модели. Теория и приложения. Вып. 11. СПб.: ВВМ, 2010. С. 134–147.
5. Пономарева А. Ю., Строилов Р. В. Приведенные формы конечно-нестационарных нечетких автоматов // Математические модели. Теория и приложения. Вып. 12. СПб.: ВВМ, 2011. С. 150–166.
6. Пономарева А. Ю., Строилов Р. В., Чирков М. К. Матричные методы построения минимальных форм конечно-нестационарных максиминных нечетких автоматов // Стохастическая оптимизация в информатике. Т. 10. Вып. 1. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2014. С. 101–121.
7. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982. 432 с.

Статья поступила в редакцию 26 июня 2014 г.

Сведения об авторах

Пономарёва Александра Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент;
a_ponomareva@mail.ru

Чирков Михаил Константинович — доктор физико-математических наук, профессор;
mkchirk@mail.ru

OPTIMIZATION OF GENERALIZED FINITE NON-STATIONARY MINIMAX FUZZY AUTOMATA

Aleksandra Yu. Ponomareva, Mikhail K. Chirkov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation;
a_ponomareva@mail.ru, mkchirk@mail.ru

In the paper it is theoretically ground and elaborated a special method for minimization of the states number and construct a minimal form of a generalized finite non-stationary minimax fuzzy automata which is based on the previously proven theorem about maximin and minimax fuzzy matrices product and elaborated matrix method for optimization of a generalized finite non-stationary maximin fuzzy automata. It is proved that from the given generalized finite non-stationary minimax fuzzy automaton may be turn to generalized finite non-stationary maximin fuzzy automata, which is an addition to the initial minimax automaton. It is also proved that if given the generalized finite non-stationary minimax and maximin fuzzy automata are addition of each other, their minimal forms have the same number of states, which allows first turn from the generalized finite non-stationary minimax fuzzy automaton to generalized finite non-stationary maximin fuzzy automaton, then to minimize this obtained generalized maximin fuzzy automaton by known method of transform matrix and turn back to its addition, get a minimal form of initial generalized finite non-stationary minimax fuzzy automaton. As a result, the procedure and the corresponding algorithm of minimization of the number of states and construct a minimal form of a generalized finite non-stationary minimax fuzzy automaton worked out. Finally, an example of application of the proposed special method of minimization to the given generalized finite non-stationary minimax fuzzy automaton is given. Refs 7.

Keywords: generalized finite non-stationary minimax (“optimistic”) fuzzy automaton, generalized finite nonstationary maximin (“pessimistic”) fuzzy automaton, addition of a finite non-stationary minimax fuzzy automaton, a minimal form of a finite non-stationary minimax fuzzy automaton.