УДК 519.176+519.897 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 4

ПОИСК КОНТУРА С НАИМЕНЬШИМ СРЕДНИМ ЗНАЧЕНИЕМ В ГРАФЕ С ПЕРЕМЕННЫМИ ДЛИНАМИ ДУГ. ПРОСТЕЙШИЙ СЛУЧАЙ*

И. В. Романовский

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Рассматривается задача поиска в ориентированном графе, каждой дуге которого сопоставлены два числа — длина дуги и затраты от прохождения дуги, контура с минимальным отношением суммарных затрат к суммарной длине. Рассматривается простейший случай одноконтурного графа, в котором последовательность обхода вершин фиксирована, а требуется найти длины переходов. Изучены два частных случая зависимостей затрат от длины — произвольный дискретный набор и зависимость $c = a + b \cdot l^2$. Библиогр. 19 назв. Ил. 1.

Ключевые слова: оптимальный контур, уравнение Беллмана, контур с минимальными средними затратами, тропическая математика.

1. Введение. В этой статье рассматривается следующая задача: имеется конечное множество S, которое естественно считать множеством *состояний* некоторого процесса. Каждому состоянию $s \in S$ сопоставлено непустое множество D_s *управляющих решений* (decisions), а каждому такому решению $d \in D_s$ сопоставлена тройка $(\sigma_d, \tau_d, \rho_d)$, где

$\sigma_d \in S$ — состояние, в которое процесс переходит при выборе решения d;

$\tau_d > 0$ — время перехода в новое состояние под воздействием решения d;

$\rho_d > 0$ — затраты на этот переход.

Мы можем представить себе процесс динамического программирования, который начинается в заданном *начальном состоянии* $s_0 \in S$, после выбора решения $d_0 \in D_{s_0}$ переходит в состояние σ_{d_0} за время τ_{d_0} с затратами ρ_{d_0} и т. д. Процесс продолжается, пока не исчерпается заданное время T.

Для такого процесса легко написать уравнение Беллмана, которое будет отличаться от простейшего *обычного* тем, что здесь усложнен перебор моментов времени — при обычной дискретной временной шкале не все моменты времени оказываются достижимыми. Процессы и уравнения такого типа встречаются, например в стохастических задачах динамического программирования (управление запасами, массовое обслуживание и т. п.), а также в задачах вычисления оптимальных раскроев.

Трудности обходятся благодаря тому, что в таких задачах функция Беллмана должна быть монотонной. Например, в задачах раскроя динамическое программирование возникает там, где максимизируется доход, получаемый из (одномерного) сырья данной длины, и этот доход в любой естественной постановке задачи должен быть неубывающей функцией от длины сырья.

Применительно к описанной выше задаче это утверждение означает, что функция Беллмана $v(T)$ должна определяться как *минимум затрат на всех траекториях, длина которых не меньше* T (как обычно, с бесконечным значением, если таких траекторий нет).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (грант № 13-02-00338).

Введя свое рекуррентное соотношение, Р. Беллман [1] уделил много внимания предельному переходу в этом соотношении, применяя принцип сжатых отображений. Он легко обнаружил и случай бесконечного роста функции $v(T)$ при $T \to \infty$: при очень общих предположениях $v(T) = O(T)$ [2]. Очень быстро обнаружилась более точная зависимость: оказалось [3], что существуют такие константы A и B, что $|v(T) - B \cdot T| \leqslant A$, причем B, если использовать терминологию теории графов, представляет собой минимум *средних затрат на контуре графа переходов*, вычисленный по всем таким контурам C (мы можем считать это C просто набором управляющих решений):

$$B = \min_C \Big\{ \sum_{d \in C} \rho_d \Big/ \sum_{d \in C} \tau_d \Big\}.$$

Факт линейного роста затрат на траектории, или математического ожидания затрат в случае стохастических процессов, был хорошо известен по системам массового обслуживания, управляемым марковским процессам и даже динамическим играм (особенно характерны игры на выживание и на разорение, где в качестве коэффициента роста выступает цена соответствующей марковской игры).

В теоретико-графовых задачах оказывается, что коэффициент роста получается из специфической задачи линейного программирования, где ищется однородный нормированный замкнутый поток, минимизирующий линейную функцию от потоков на отдельных дугах. Базисными решениями этой задачи являются *циркуляции* — потоки, сосредоточенные на отдельных контурах, с дополнительным условием $\sum_{d \in C} \tau_d = 1$.

В этой задаче для графа $\langle S, D \rangle$, когда дуги уже рассматриваются как управляющие решения, мы сопоставляем каждой дуге $d \in D$ переменную $x_d \geqslant 0$ — мощность потока на ней — и требуем равенства входящих и выходящих мощностей в каждой вершине $s \in S$.[1] А нормирование потока относится не к мощностям, а к величине потока на дугах. Величина потока на дуге $d \in D$ принимается равной $\lambda_d \cdot x_d$, где λ_d — длина дуги d. Затраты на поток по дуге d удобнее относить ко всей дуге, и мы получаем задачу линейного программирования:

найти $\min \sum_{d \in D} \sigma_d x_d$ при условиях

$$\sum_{d \in D} \tau_d x_d = 1, \quad a[S, D] \times x[D] = \mathbf{0}[S], \quad x[D] \geqslant \mathbf{0}[D].$$

Здесь $x[D]$ — вектор с множеством индексов D, $a[S, D]$ — матрица с множеством индексов строк S и множеством индексов столбцов D, $\mathbf{0}[S]$, $\mathbf{0}[D]$ — нулевые вектора. В этой задаче линейного программирования $|D|$ переменных и $|S| + 1$ ограничение, одно из которых линейно зависит от остальных, так что базисный набор D' состоит из $|S|$ переменных, которые соответствуют дугам. Эти дуги образуют остовное дерево, к которому добавлена еще одна дуга, порождающая контур (назовем его основным). Требуется, чтобы любая вершина дерева была связана с какой-нибудь вершиной контура (это может быть какая-то одна для всех вершина d_0, предварительно не фиксируемая). Базисное решение строится по этому набору следующим образом: на дугах

[1] Задание потока на графе с переменными длинами дуг требует различия мощности потока в дуге, определяющей скорость поступления потока, и величины или массы потока в дуге, равной скорости, умноженной на длину дуги. Уравнения баланса пишутся для скоростей входного и выходного потока, а в общей массе потока нужно складывать массы потока в дугах.

основного контура поток положителен и имеет постоянную мощность, которая выбирается так, чтобы выполнялось условие нормировки, а на остальных базисных дугах поток нулевой.

Соответствующее множеству D' базисное решение вычисляется на каждой итерации просто: находится основной контур с множеством дуг $C \subset D$, и по нему определяются общая длина контура $\overline{\Lambda}_C = \sum_{d\in C} \lambda_d$, общие затраты на контуре $\overline{P}_C = \sum_{d\in C} \rho_d$ и средние затраты на единице длины контура $\overline{\lambda} = \overline{P}_C/\overline{\Lambda}_C$.

Оставшуюся часть базиса часто (если это позволяет граф) можно составить из ориентированных деревьев, завершающихся на основном контуре. Эти деревья должны быть такими, чтобы в окончательном решении выполнялся критерий оптимальности, для записи которого нам понадобится вспомнить двойственную задачу.

Она такова:

Найти набор переменных v_s, $s \in S$, и максимальное число β, удовлетворяющие условию

$$v_{beg_d} \geqslant v_{end_d} + \tau_d\beta - \sigma_d, \qquad d \in D.$$

Здесь beg_d и end_d — соответственно начало и конец дуги d, а σ_d — затраты на ее использование.

Критерий оптимальности требует, чтобы на дугах из базиса это условие выполнялось как равенство при β, равном средним затратам на контуре. А для вершины d, не входящей в контур, будет правильно, если для нее будет выбрана для включения в базис дуга с наименьшим значением $v_{end_d} + \tau_d\beta - \sigma_d$. Таким образом, мы получаем для всех выбранных управляющих решений равенство

$$v_{beg_d} = v_{end_d} + \tau_d\beta - \sigma_d$$

и систему своеобразных уравнений Беллмана

$$v_s = \max\{v_{end_d} + \tau_d\beta - \sigma_d \,|\, beg_d = s\}, \quad s \in S. \tag{1}$$

Накопилось уже много публикаций, описывающих решение этой задачи разными алгоритмами. Назовем здесь большое исследование, описанное в [6]. Е. И. Петренко [7] занимался расчетами по моему алгоритму [5] в связи с приближенным получением циклов траекторий дифференциального уравнения. Более современные алгоритмы описаны в статье [8]. Интересно полное отсутствие в этих расчетах случая переменной длины дуг.

Отметим, что задача с постоянной длиной дуг успешнее исследовалась и аналитически: в этом случае уравнение Беллмана записывается алгебраически, и естественно возникает идея ввести специальную операцию. Именно это сделал Н. Н. Воробьев [9], который интересовался новыми операциями над матрицами и раньше, а потом группа москвичей во главе с В. П. Масловым, создала целое направление «идемпотентного анализа» [10].

Но нас беспокоит все же отсутствие в исследованиях «неудобного» случая переменной длины дуг. Появляется желание изучить этот случай подробнее.

В данной статье мы и начинаем такое изучение. Здесь мы рассмотрим особую модель, где кроме выбора длин дуг ничего и не остается и можно сосредоточиться на решениях, связанных с выбором длин. Это случай, когда граф состоит из одного контура, но на каждой дуге можно выбирать ее длину, от которой зависят затраты на дуге (следовало бы, как раньше, сделать мильтиграф, но не хочется вводить графы с бесконечным числом дуг в таком простом случае).

2. Специальный случай зависимости затрат от длины дуг. Рассмотрим граф $\langle M, N\rangle$ с множеством вершин M и множеством дуг N. Каждой дуге $j \in N$ сопоставлена функция затрат на использование этой дуги $c_j(l_j)$ — затраты зависят от выбираемой длины l_j дуги j. Функция предполагается положительной, непрерывной и для начала выпуклой и строго возрастающей. При составлении из этих дуг простых путей мы будем выбирать для каждого использования каждой дуги ее длину и определять затраты на пути как функцию от L — суммарной длины дуг этого пути. Эти затраты определяются как минимум по всем возможным наборам длин дуг, входящих в путь P, следующим образом:

$$C_P(L) = \min\Big\{\sum_{j\in P} c_j(l_j) \,\Big|\, \sum_{j\in P} l_j = L\Big\}.$$

Для нахождения длин путей мы воспользуемся операцией, которая называется операцией свертки, она сейчас широко используется в так называемой тропической математике [4]. Эта операция определяет удлинение пути на одну дугу. Пусть у нас есть две дуги, j_1 с функцией c_1 и j_2 с функцией c_2, и нужно построить функцию c_{12},

$$c_{12}(y) = \min_{0\leqslant x\leqslant y}\{c_1(x) + c_2(y-x)\}. \tag{2}$$

Будем писать $c_{12} = c_1 \underline{\otimes}\, c_2$. Почти такая операция была введена в 1958 г. Р. Беллманом и У. Карушем [11, 12] (см. также [13]), правда, у них находился *максимум суммы* и операция называлась «maximum transformation», но это роли не играет. В дальнейшем выяснилась связь этой операции с теорией опорных функций теории двойственности [14].[2] Сейчас для операции Беллмана—Каруша используется знак $\oplus$, и чтобы различие было виднее, мы, следуя давней нотации Н. Н. Воробьева [9], использовали для варианта с минимизацией символ $\underline{\otimes}$.

Для иллюстративных целей хорошо иметь какой-нибудь достаточно простой пример. Сейчас такой пример будет введен. Пусть все функции $c_k(l)$ имеют вид $c_k(l) = a_k + b_k \cdot l^2$, где $a_k \geqslant 0$, $b_k > 0$. Оказывается, операция $\underline{\otimes}$ над функциями такого вида дает функцию такого же вида с легко пересчитываемыми параметрами.

Теорема 1. *Множество функций P^{02} полиномов второй степени с нулевым коэффициентом при первой степени, заданных при неотрицательных x, замкнуто относительно операции $\underline{\otimes}$,*

$$F \underline{\otimes}\, G \in P^{02} \quad \textit{при} \quad F(x) = F_0 + F_2x^2, \quad G(x) = G_0 + G_2x^2 \in P^{02},$$

причем функция $(F \underline{\otimes}\, G)$ имеет вид $(F \underline{\otimes}\, G)(x) = H_0 + H_2x^2$, где

$$H_0 = F_0 + G_0, \quad H_2^{-1} = F_2^{-1} + G_2^{-1}.$$

[2] Беллман и Каруш первоначально рассматривали не сумму, а произведение двух операндов. Интересно, что хотя они быстро перешли на аддитивный вариант, Р. Арис, оценив нововведение, описал его в своей книге еще в мультипликативном виде, а в русском переводе книги Ариса [15] переводчики не обратили внимания на то, что нововведение немного устарело. Отметим, что вскоре Рокафеллар ввел близкое к данной проблематике понятие суперлинейности, оказавшееся очень полезным в изучении экономических моделей роста. Вслед за ним для более общих пространств это понятие изучал А. М. Рубинов (см. по этому поводу [16]).

Доказательство. Скорее всего, это уже где-нибудь доказано, но проверить непосредственно проще, чем разыскивать. Мы не будем претендовать на авторство.

Вычислим значение $c_{12}(y)$ из уравнения (2):

$$c_{12}(y) = \min_{0\leqslant x\leqslant y}\{a_1 + b_1x^2 + a_2 + b_2(y-x)^2\}.$$

Приравниваем нулю производную минимизируемого выражения по x,

$$2b_1x - 2b_2(y-x) = 0,$$

откуда $(b_1+b_2)x = b_2y$ и $x = \frac{b_2}{b_1+b_2}y$ (важное соотношение, которое пригодится и в дальнейшем). Таким образом, так как, очевидно, $y-x = \frac{b_1}{b_1+b_2}y$, при так вычисленном x имеем

$$c_{12}(y) = a_1 + a_2 + b_1x^2 + b_2(y-x)^2 = \\ = (a_1+a_2) + \left(\frac{b_1b_2^2 + b_1^2b_2}{(b_1+b_2)^2}\right)y^2 = (a_1+a_2) + \left(\frac{b_1b_2}{b_1+b_2}\right)y^2,$$

и получаем $c_{12}(y) = a_{12} + b_{12}y^2$, где $a_{12} = a_1 + a_2$ и $b_{12} = \frac{b_1b_2}{b_1+b_2}$.

Отсюда и получается удобное выражение $b_{12}^{-1} = b_1^{-1} + b_2^{-1}$. □

Полученные формулы легко переносятся на произвольное число слагаемых:

$$a_{1,\dots,k} = a_1 + \dots + a_k, \qquad b_{1,\dots,k}^{-1} = b_1^{-1} + \dots + b_k^{-1}.$$

Теперь вернемся к интересующей нас задаче поиска контура с минимальным отношением затрат к длине. Итак, мы имеем простейший граф, состоящий из одного контура, в котором k вершин и k дуг. При выборе длин дуг с суммарной длиной x берется сумма затрат на контуре, равная $C_k(x) = \sum_{i=1}^k c_i(x_i)$, и мы ищем при условии $\sum_{i=1}^k x_i = x$

$$\min_x\Big\{C_k(x)/x\Big\}.$$

В данном случае нужно взять готовую функцию $C_k(x)$, поделить на x и найти минимум.

Пример. Пусть в рассматриваемом графе всего 3 вершины — 1, 2 и 3 — и три дуги (1,2) — (2,3) и (3,1). Пусть $c_{12}(x) = 12 + 6x^2$, $c_{23}(x) = 5 + 2x^2$, $c_{31}(x) = 7 + 9x^2$.

Для этого контура как простого пути получаем

$$a_{1231} = 12 + 5 + 7 = 24, \qquad b_{1231} = 1/\{6^{-1} + 2^{-1} + 9^{-1}\} = 9/7.$$

Итак, затраты зависят от общей длины контура u как $24 + (9/7)u^2$, и нужно найти u, при котором достигается минимум функции $c(u) = \frac{24}{u} + \frac{9u}{7}$. Ищем нуль производной $\frac{dc}{du} = -\frac{24}{u^2} + \frac{9}{7}$:

$$\frac{9}{7}u^2 = 24; \rightarrowtail \quad u^2 = \frac{24\cdot 7}{9}; \rightarrowtail \quad x_{(1231)} = u = \sqrt{56/3} \approx 4.3205.$$

Для вычисления длин дуг нужно было при вычислении коэффициентов a_{123} и b_{123} функции затрат c_{123} запомнить $b_{123} = 1\Big/\Big(b_{12}^{-1} + b_{23}^{-1}\Big) = 1/(6^{-1} + 2^{-1}) = 6/4$. Теперь по известному u_{1231} можно вычислить u_{123}, считая минимум функции $c_{123}(u) +$

$c_{31}(4.3205 - u)$. Приравниваем нулю производную

$$2b_{123}u - 2b_{31}(4.3205 - u) = 0; \;\rightarrowtail\; u \approx \frac{9 \cdot 4.3205}{9 + 1.5}; \;\rightarrowtail\; u_{123} \approx \frac{38.8845}{10.5} \approx 3.7033,$$

откуда получаем $x_{31} \approx 4.3205 - 3.7033 = 0.6172$. Осталось найти разбиение длины 3.7033 на части, относящиеся как 1 к 2: $u_{12} \approx 1.2344$, $u_{23} \approx 2.4689$, что дает значение 10.5918.

Если рассматривается произвольный сильно связный граф $\langle M, N \rangle$, в котором затраты на дугах являются такими же функциями из P^{02}, то здесь может быть применена модификация алгоритма, основанного на использовании задачи линейного программирования, описанного выше в связи с системой (1) и взятого из [5].

3. Дискретные наборы длин. Рассмотрим теперь ту же задачу о простом контуре, когда каждой дуге соответствует (конечный) набор длин дуг с соответствующими этим длинам затратами. Операцию свертки можно видоизменить для этого случая, рассматривая для пары последовательных дуг j_1, j_2 всевозможные сочетания длин и выбирая «конкурентоспособные» суммы (как выразился некогда Ю. Г. Дуткевич [17], «обкатывая множество точек» опорными прямыми снизу). Так, можно в нашем простом примере, выбрав для примера 13 точек 0.5(0.2)2.9 на первой дуге с функцией затрат $c_1(x) = 12 + 6x^2$, и 13 точек 0.7(0.22)3.34 на второй дуге с функцией затрат $c_2(x) = 5 + 2x^2$, получить для них соответственно наборы пар

$$LA = \Big\{(0.5, 10.5), (0.7, 11.94), (0.9, 13.86), (1.1, 16.26), (1.3, 19.14), (1.5, 22.5), (1.7, 26.34), (1.9, 30.66), (2.1, 35.46), (2.3, 40.74), (2.5, 46.5), (2.7, 52.74), (2.9, 59.46)\Big\}$$

для первой дуги и

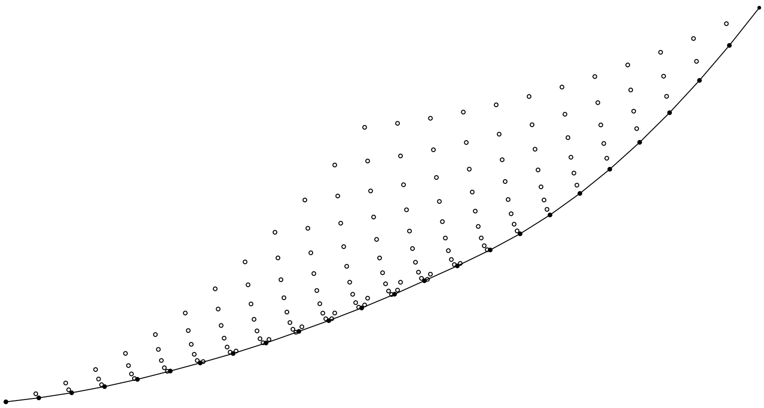
$$LB = \Big\{(0.7, 5.98), (0.92, 6.6928), (1.14, 7.5992), (1.36, 8.6992), (1.58, 9.9928), (1.8, 11.48), (2.02, 13.1608), (2.24, 15.0352), (2.46, 17.1032), (2.68, 19.3648), (2.9, 21.82), (3.12, 24.4688), (3.34, 27.3112)\Big\}$$

для второй и получить для набора $LA \underline{\otimes} LB = LAB$ такие результаты:

$$LAB = \Big\{((1.20, 16.48), (1.42, 17.19), (1.64, 18.10), (1.86, 19.20), (2.08, 20.49), (2.30, 21.98), (2.50, 23.42), (2.72, 25.10), (2.94, 26.98), (3.16, 29.04), (3.36, 30.96), (3.58, 33.22), (3.80, 35.68), (4.00, 38.08), (4.22, 40.73), (4.42, 43.61), (4.62, 46.97), (4.82, 50.81), (5.02, 55.13), (5.22, 59.93), (5.42, 65.21), (5.62, 70.97), (5.82, 77.21), (6.04, 80.05), (6.24, 86.77)\Big\}$$

с внешне очень гладким приближением соответствующей кривой, в котором оказалось 25 точек. В принципе, мы рассмотрели все суммы пар точек из LA и LB, построили их выпуклую оболочку; и ее нижняя граница — это список LAB (см. рисунок).

Вычислений при таком подходе получилось больше, чем в случае «приятных» формул, а точность оказалась недостаточной из-за неудачно выбранных шкал, но лишние затраты окупаются тем, что подход применим при любом наборе дуг. Отметим, что есть возможность для экономии: достаточно строить для каждой ломанной



Всевозможные суммы точек из LA и LB
и нижняя граница LAB их выпуклой оболочки.

ее выпуклую оболочку (снизу) и при пересчете получать для результата непосредственно выпуклую оболочку (в детали этого построения мы сейчас вдаваться не будем).

4. Родственные задачи. Хочется упомянуть еще один круг задач, в которых существенно использование переменных длин дуг, — это задачи составления циклических расписаний.

Имеются в виду прежде всего модели циклических сетевых графиков [18], в которых общий сетевой график получается многократным повтором одного и того же сетевого графика. Эта модель соответствует изготовлению нескольких экземпляров одного и того же сложного объекта, и имеются дуги, соответствующие переходу из одного экземпляра в следующий, причем таких переходов может быть несколько. В этом случае можно ввести «длины» дуг, равные 0 на настоящих работах и 1 на таких переходах.

Такие задачи в последнее время применяются и при составлении расписаний работы для промышленных роботов (см., напр., [19]).

Автор признателен рецензенту за большое число очень важных замечаний.

Литература

1. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд. иностр. лит., 1960. 400 с.

2. *Bellman R.* Functional equations in the theory of dynamic programming — XI: Limit theorems // Rendiconti circ. Mat. Palermo. 1959. Vol. 8, N 3. P. 343–345.

3. *Романовский И. В.* Асимптотика рекуррентных соотношений динамического программирования и оптимальное стационарное управление // ДАН СССР. 1964. Т. 157, № 6. С. 1303–1306.

4. *Кривулин Н. К.* Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 256 с.

5. *Романовский И. В.* Оптимизация стационарного управления дискретным детерминированным процессом // Кибернетика. 1967. № 2. С. 66–78.

6. *Cochet-Terrasson J., Cohen G., Gaubert S., McGettrick M., Quadrat J. P.* Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra // Proceedings of the IFAC conference on systems structure and control. Nantes, France. 1998. P. 699–706.

7. *Петренко Е. И.* Компьютерное исследование динамических систем на основе метода символического образа: автореф. дис. . . . СПб.: СПбГУ. матмех, 2009.

8. *Georgiadis L., Goldberg A. V., Tarjan R. E., Werneck R. F.* An experimental study of minimum mean cycle algorithms // Proc. 6th International Workshop on Algorithm Engineering and Experiments, ALENEX 2009. P. 1–13.

9. *Воробьев Н. Н.* Экстремальная алгебра матриц // Доклады АН СССР. 1963. Т. 152, №1. С. 24–27.

10. *Маслов В. П., Колокольцев В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 144 с.

11. *Bellman R., Karush W.* On a new functional transform in analysis: The maximum transform // Bull. Amer. Math. Soc. 1961. Vol. 67, N 5. P. 501–503.

12. *Bellman R., Karush W.* On the maximum transform and semigroups of transformations // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68, N 5. P. 516–518.

13. *Романовский И. В.* Некоторые замечания о функциональном преобразовании Беллмана—Каруша // Вестник ЛГУ. 1962. 17. 18. С. 148–150.

14. *Rockafellar R. T.* Convex Analysis. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1962. xviii+451 pp.

15. *Арис Р.* Дискретное динамическое программирование. Введение в оптимизацию многошаговых процессов. М.: Мир, 1969. 172 с.

16. *Макаров В. Л., Рубинов А. М.* Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973. 336 с.

17. *Дуткевич Ю. Г.* О задании поверхности опорной функцией // Вестник ЛГУ. 1963. 1. С. 53–58.

18. *Романовский И. В.* Циклические варианты моделей сетевого графика // Исследование операций и статистическое моделирование. 1971. Вып. 1. Л.: Изд-во ЛГУ. С. 145–152.

19. *Kats V., Levner E.* Cyclic routing algorithms in graphs: Performance analysis and applications to robot scheduling // Computers & Indust. Engineering. 2010. Vol. 59, N 2. P. 352–361.

Статья поступила в редакцию 26 июня 2014 г.

Сведения об авторах

Романовский Иосиф Владимирович — д-р физ.-мат. наук, профессор;
josephromanovsky@gmail.com

FINDING A CONTOUR WITH THE SMALLEST MEAN EXPENSES IN A GRAPH WITH VARIABLE LENGTHS OF ARCS. THE SIMPLEST CASE

Joseph V. Romanovsky

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation;
josephromanovsky@gmail.com

Consider a problem: find a contour with minimal ratio of total expenses to total length in an oriented graph when each its arc is associated with two values: its expanses and its length. The simplest case is when the graph consistes of a contour and it is required to select the lengths of the arcs. Two partial cases were considered: a) a discrete set of possibilities for each arc and b) the dependence: $cost = a + b \cdot length^2$. Refs 19. Figs 1.

Keywords: optimal control, Bellman equation, contour with minimal expenses, tropical mathematics.