

МЕХАНИКА

УДК 531.36:62-565

**ДИНАМИКА РОТОРА С ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИМ
ШАРОВЫМ АВТОБАЛАНСИРОВОЧНЫМ УСТРОЙСТВОМ***В. Г. Быков, А. С. Ковачев*Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Рассматривается статически неуравновешенный ротор, оснащенный шаровым автобалансирующим устройством, ось симметрии которого не совпадает с осью симметрии ротора. На основе простейшей модели ротора Джеффкотта выведены уравнения движения системы в неподвижной и вращающейся системах координат, а также уравнения, описывающие стационарные режимы движения. Установлена принципиальная невыполнимость условий существования сбалансированного стационарного режима для ротора с переменным дисбалансом. Для автобалансирующего устройства с двумя шариками показана возможность существования двух различных типов несбалансированных стационарных режимов. Стационарный режим с постоянной остаточной вибрацией, амплитуда которой не зависит от угловой скорости, предложено называть полусбалансированным. Решение, отвечающее полусбалансированному режиму, построено аналитически; получены условия его существования и устойчивости. Численными методами построены двухпараметрические диаграммы устойчивости полусбалансированного стационарного режима и проведено исследование нестационарных режимов движения ротора в случае его вращения с постоянной угловой скоростью. Библиогр. 6 назв. Ил. 5.

Ключевые слова: шаровое автобалансирующее устройство, статически неуравновешенный ротор.

В работах, посвященных исследованию автоматической балансировки роторов при помощи шарового автобалансирующего устройства (АБУ), предполагается, как правило, что центр АБУ лежит точно на оси симметрии ротора. На практике таким моделям с большой точностью соответствуют АБУ, жестко насаженные на роторы. Однако в ряде устройств нашли применение сменные АБУ, которые крепятся к ротору при помощи резьбового соединения. Для адекватного математического моделирования подобных устройств необходимо учитывать наличие возможного эксцентриситета между осями симметрии АБУ и ротора.

Проблемы автобалансировки роторов, оснащенных неидеальными шаровыми АБУ, рассматривались в работах [1–2], где на основе методов, используемых при исследовании синхронизации динамических объектов, констатирован факт о невозможности полной балансировки статически неуравновешенного ротора при наличии эксцентриситета беговой дорожки АБУ. В [3] при помощи геометрических соображений показано, что неидеальный автобалансир в случае моментно неуравновешенного

ротора при определенных условиях приводит к стационарному режиму с постоянным остаточным дисбалансом. Аналогичный вывод содержится в [4] для случая автобалансира с эллиптической беговой дорожкой.

В настоящей работе построена математическая модель статически неуравновешенного ротора с эксцентрически насаженным шаровым АБУ. Аналитическое и численное исследование точных и приближенных уравнений позволяет детально проанализировать условия существования и устойчивости стационарных режимов движения системы.

1. Механическая модель и уравнения движения. Рассмотрим модель неуравновешенного ротора в виде массивного тонкого жесткого диска, закрепленного посередине невесомого упругого вала, вращающегося в вертикальных шарнирных опорах O_1 и O_2 . Статический эксцентриситет диска — расстояние между его геометрическим центром C и центром тяжести G — обозначим через s_1 . Для компенсации дисбаланса на диске установлено шаровое АБУ, представляющее собой круговую полость радиуса r , в которой могут свободно передвигаться n балансировочных шариков одинаковой массы. Пусть точка E обозначает центр круговой полости АБУ, несовпадающий с точкой C . Для описания эксцентриситета АБУ введем два параметра: расстояние s_2 между точками C и E и угол $\gamma = \angle GCE$ (рис. 1).

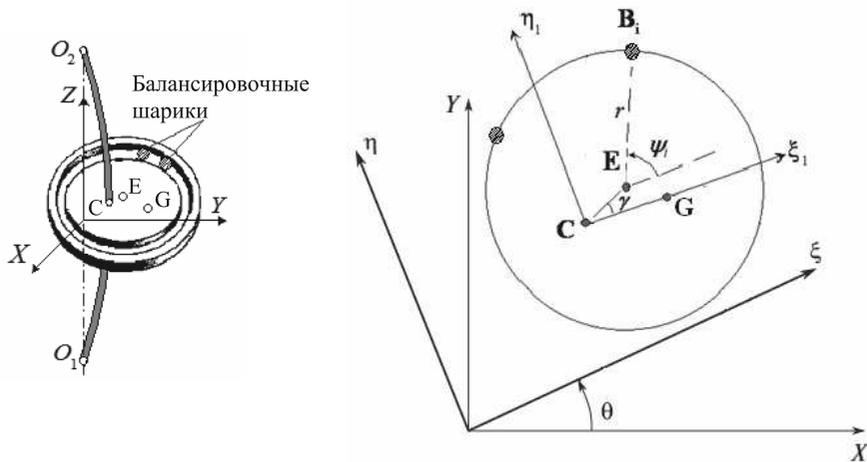


Рис. 1. Ротор с эксцентрически насаженным АБУ.

Введем три системы координат: неподвижную $OXYZ$, вращающуюся $O\xi\eta\zeta$ и жестко связанную с ротором $O\xi'\eta'\zeta'$. Ось Z неподвижной системы направим вертикально вверх вдоль оси, соединяющей центры опор, а начало координат выберем так, чтобы оси X и Y лежали в плоскости статического эксцентриситета. Ось ζ вращающейся системы совпадает с осью Z , а оси ξ и η коллинеарны осям ξ' и η' системы координат, связанной с ротором. В рамках модели Джеффкотта [5] будем рассматривать движение диска и балансировочных шариков только в плоскости OXY .

В силу сделанных допущений описанная механическая система имеет $n + 3$ степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем: координаты X и Y точки C в неподвижной системе, угол θ между осями OX и $O\xi$ (угол поворота ротора), углы ψ_i ($i = 1, \dots, n$) отклонения шариков относительно диска.

Обозначим через m_1, m_2, m_3 соответственно массы ротора, корпуса АБУ и балансировочного шарика; I_G — центральный момент инерции ротора и корпуса АБУ; k — коэффициент упругости вала. Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергии системы:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1(\dot{X}_G^2 + \dot{Y}_G^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{X}_E^2 + \dot{Y}_E^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_3 \sum (\dot{X}_{B_j}^2 + \dot{Y}_{B_j}^2), \\ V &= \frac{1}{2}k(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} X_G &= X + s_1 \cos \theta, & X_E &= X + s_2 \cos(\theta + \gamma), & X_{B_j} &= X + s_2 \cos(\theta + \gamma) + r \cos(\theta + \psi_j), \\ Y_G &= Y + s_1 \sin \theta, & Y_E &= Y + s_2 \sin(\theta + \gamma), & Y_{B_j} &= Y + s_2 \sin(\theta + \gamma) + r \sin(\theta + \psi_j). \end{aligned}$$

Здесь и далее, если не оговорено иное, суммирование ведется от $j = 1$ до $j = n$.

Предполагая, что на ротор действуют только силы внешнего демпфирования, запишем выражение для диссипативной функции Рэлея

$$D = \frac{1}{2}c_0(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2}c_\psi \sum \dot{\psi}_j^2 + \frac{1}{2}c_\theta \dot{\theta}^2, \quad (2)$$

где c_0, c_ψ и c_θ — соответственно коэффициенты вязкого сопротивления движению ротора, движению шариков в обойме АБУ и вращению вала в подшипниках.

С учетом выражений (1), (2) уравнения Лагранжа для нашей системы имеют вид

$$\left\{ \begin{aligned} m_0 \ddot{X} + c\dot{X} + kX &= -\frac{d^2}{dt^2} \left[m_1 s_1 \cos \theta + (m_2 + nm_3) s_2 \sum \cos(\theta + \gamma) + m_3 r \sum \cos(\theta + \psi_j) \right], \\ m_0 \ddot{Y} + c\dot{Y} + kY &= -\frac{d^2}{dt^2} \left[m_1 s_1 \sin \theta + (m_2 + nm_3) s_2 \sum \sin(\theta + \gamma) + m_3 r \sum \sin(\theta + \psi_j) \right], \\ J_C \ddot{\theta} + c_\theta \dot{\theta} - c_\psi \sum \dot{\psi}_j &= M(\bar{t}) + m_1 s_1 (\ddot{X} \sin \theta - \ddot{Y} \cos \theta) + (m_2 + nm_3) s_2 (\ddot{X} \sin(\gamma + \theta) - \\ &\quad - \ddot{Y} \cos(\theta + \gamma)) - m_3 r s_2 \sum \left((\dot{\theta} + \dot{\psi}_j)^2 \sin(\gamma - \psi_j) + (\ddot{\theta} + \ddot{\psi}_j) \cos(\gamma - \psi_j) \right), \\ m_3 r^2 (\ddot{\psi}_j + \ddot{\theta}) + c_\psi \dot{\psi}_j &= m_3 r \left(\ddot{X} \sin(\theta + \psi_j) - \ddot{Y} \cos(\theta + \psi_j) \right) + \\ &\quad + m_3 r s_2 \left(\dot{\theta}^2 \sin(\gamma - \psi_j) - \ddot{\theta} \cos(\gamma - \psi_j) \right), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \right. \quad (3)$$

где $m_0 = m_1 + m_2 + nm_3$, $J_C = I_G + m_1 s_1^2 + (m_2 + nm_3) s_2^2$, а $M(\bar{t})$ — внешний вращающий момент, приложенный к валу.

Далее мы будем рассматривать вращение ротора с постоянной угловой скоростью. Полагая $\theta = \omega t$ и, переходя к безразмерным переменным $x = X/s_1$, $y = Y/s_1$, $t = \Omega \bar{t}$, где $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m_0}}$, запишем систему (3) в виде

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{x} + \delta_1 \dot{x} + x &= (\mu_1 \cos \nu t + \mu_2 \cos(\nu t + \gamma)) \nu^2 + \mu_3 \sum ((\nu + \dot{\psi}_j)^2 \cos(\nu t + \psi_j) + \ddot{\psi}_j \sin(\nu t + \psi_j)), \\ \ddot{y} + \delta_1 \dot{y} + y &= (\mu_1 \sin \nu t + \mu_2 \sin(\nu t + \gamma)) \nu^2 + \mu_3 \sum ((\nu + \dot{\psi}_j)^2 \sin(\nu t + \psi_j) - \ddot{\psi}_j \cos(\nu t + \psi_j)), \\ \ddot{\psi}_j + \delta_2 \dot{\psi}_j &= \varepsilon_1 (\ddot{x} \sin(\nu t + \psi_j) - \ddot{y} \cos(\nu t + \psi_j)) + \varepsilon_2 \nu^2 \sin(\gamma - \psi_j), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \right. \quad (4)$$

где безразмерные параметры $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu, \delta_1, \delta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ имеют следующий смысл:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{m_1}{m_0}, & \mu_2 &= \frac{(m_2 + nm_3)s_2}{m_0s_1}, & \mu_3 &= \frac{m_3r}{m_0s_1}, & \nu &= \frac{\omega}{\Omega}, \\ \delta_1 &= \frac{c}{m_0\Omega}, & \delta_2 &= \frac{c_\psi}{m_3r^2\Omega}, & \varepsilon_1 &= \frac{s_1}{r}, & \varepsilon_2 &= \frac{s_2}{r}. \end{aligned}$$

Введем комплексную переменную $z = x + iy$ и представим систему (4) в форме

$$\begin{cases} \ddot{z} + \delta_1 \dot{z} + z = \left((\mu_1 + \mu_2 e^{i\gamma}) \nu^2 + \mu_3 \sum ((\nu + \dot{\psi}_j)^2 - i\ddot{\psi}_j) e^{i\psi_j} \right) e^{i\nu t}, \\ \ddot{\psi}_j + \delta_2 \dot{\psi}_j = -\varepsilon_1 \Im \left[\ddot{z} e^{-i(\nu t + \psi_j)} \right] + \varepsilon_2 \nu^2 \sin(\gamma - \psi_j), \quad j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

2. Стационарные режимы. Исследование стационарных режимов движения ротора удобно проводить во вращающейся системе координат. Подставив в систему (5) соотношения

$$z = \zeta e^{i\nu t}, \quad \dot{z} = (\dot{\zeta} + i\nu\zeta) e^{i\nu t}, \quad \ddot{z} = (\ddot{\zeta} + 2i\nu\dot{\zeta} - \nu^2\zeta) e^{i\nu t}, \quad (6)$$

получим автономные уравнения движения:

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} + (\delta_1 + 2i\nu)\dot{\zeta} + (1 - \nu^2 + i\nu\delta_1)\zeta &= (\mu_1 + \mu_2 e^{i\gamma}) \nu^2 + \mu_3 \sum ((\nu + \dot{\psi}_j)^2 - i\ddot{\psi}_j) e^{i\psi_j}, \\ \ddot{\psi}_j + \delta_2 \dot{\psi}_j &= -\varepsilon_1 \Im [(\ddot{\zeta} + 2i\nu\dot{\zeta} - \nu^2\zeta) e^{-i\psi_j}] + \varepsilon_2 \nu^2 \sin(\gamma - \psi_j), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

Стационарные решения системы (7) будем искать в виде

$$\zeta = a_0 e^{i\phi_0}, \quad \psi_j = \psi_{0j} = \text{const} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (8)$$

где a_0 и ϕ_0 — постоянные амплитуда и угол сдвига фаз прецессионного движения центра диска. Подставляя (8) в (7), получаем систему трансцендентных уравнений относительно a_0, ϕ_0 и ψ_{0j} , которая описывает стационарные режимы движения ротора:

$$\begin{aligned} (1 - \nu^2 + i\nu\delta_1) a_0 e^{i\phi_0} &= \nu^2 \left(\mu_1 + \mu_2 e^{i\gamma} + \mu_3 \sum e^{i\psi_{0j}} \right), \\ \varepsilon_1 a_0 \sin(\phi_0 - \psi_{0j}) &= -\varepsilon_2 \sin(\gamma - \psi_{0j}), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (9)$$

Проверим возможность существования сбалансированного стационарного режима, при котором геометрический центр диска лежит на оси O_1O_2 . Для этого подставим в систему (9) $a_0 = 0$ и разделим в первом уравнении вещественные и мнимые части:

$$\begin{aligned} \sum \cos \psi_{0j} &= -\frac{\mu_1 + \mu_2 \cos \gamma}{\mu_3}, \\ \sum \sin \psi_{0j} &= -\frac{\mu_2}{\mu_3} \sin \gamma, \\ \sin(\gamma - \psi_{0j}) &= 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (10)$$

Умножая второе уравнение (10) на $\cos \gamma$ и вычитая результат из первого уравнения, умноженного на $\sin \gamma$, получаем

$$\sum \sin(\gamma - \psi_{0j}) = -\frac{\mu_1}{\mu_3} \sin \gamma. \quad (11)$$

Из уравнений (10) и (11) имеем $\sin \gamma = 0$. Отсюда следует, что стационарный режим возможен только в случае, когда $\gamma = \{0, \pi\}$, т. е. когда центр АБУ (точка E) лежит на одной прямой с точками C и G . С учетом этого система (10) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sin \psi_{0j} &= 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum \cos \psi_{0j} &= -\frac{\mu_1 \pm \mu_2}{\mu_3}. \end{aligned} \quad (12)$$

Первое уравнение (12) показывает, что $\psi_{0j} = \{0, \pi\}$ ($j = 1, \dots, n$), т. е. все балансировочные шарики также должны лежать на одной прямой с точками C и G . Из второго уравнения (12) вытекает еще одно необходимое условие существования сбалансированного режима:

$$\mu_3 = \frac{\mu_1 \pm \mu_2}{-\sum \cos \psi_{0j}}. \quad (13)$$

Условие (13) означает принципиальную невозможность для эксцентрически насаженного АБУ обеспечить полную балансировку ротора с переменным дисбалансом. Далее будет показано, что наилучшим результатом в этом случае будет прецессионное движение ротора с малой амплитудой, равной величине эксцентриситета АБУ.

Для исследования несбалансированных стационарных режимов ($a_0 \neq 0$) перепишем систему (9) в виде

$$\begin{aligned} a_0 e^{i\psi_0} = \xi_0 + i\eta_0 &= \nu^2 \frac{\mu_1 + \mu_2 e^{i\gamma} + \mu_3 \sum e^{i\psi_{0k}}}{1 + i\nu\delta - \nu^2}, \\ \varepsilon_1(\eta_0 \cos \psi_{0j} - \xi_0 \sin \psi_{0j}) + \varepsilon_2 \sin(\gamma - \psi_{0j}) &= 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (14)$$

Выразив из первого уравнения системы (14) ξ_0 и η_0 через ψ_{0k} и подставив их в последующие уравнения, получим систему трансцендентных уравнений относительно углов отклонения балансировочных шариков.

В случае, когда АБУ содержит только два балансировочных шарика ($n = 2$), решение системы (14) может быть найдено точно. Для этого преобразуем уравнения, описывающие движение шариков: умножим первое уравнение на $\sin \psi_{02}$ и вычтем из него второе уравнение, умноженное на $\sin \psi_{01}$. Аналогично вычтем второе уравнение, умноженное на $\cos \psi_{01}$, из первого, умноженного на $\cos \psi_{02}$. В итоге получим

$$\begin{aligned} \sin(\psi_{01} - \psi_{02}) \left(\eta_0 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \gamma \right) &= 0, \\ \sin(\psi_{01} - \psi_{02}) \left(\xi_0 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos \gamma \right) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения (15) имеют два решения, отвечающие двум различным типам несбалансированных стационарных режимов. Для режимов первого типа, выполняется соотношение

$$\sin(\psi_{01} - \psi_{02}) = 0,$$

из которого получаем $\psi_{01} = \psi_{02} + \pi k$ ($k = 0, 1$), т. е. балансировочные шарики находятся либо на одной, либо на противоположных сторонах круговой полости АБУ. Решения второго типа удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\eta_0 = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \gamma, \quad \xi_0 = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos \gamma,$$

или

$$a_0 e^{i\phi_0} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} e^{i(\gamma+\pi)}. \quad (16)$$

Таким образом, характерной чертой установившихся режимов второго типа является наличие остаточных колебаний ротора, амплитуда которых в точности равна эксцентриситету АБУ. Учитывая малость последнего, несбалансированный стационарный режим второго типа можно назвать полусбалансированным.

Найдём углы отклонения балансировочных шариков, соответствующие полусбалансированному стационарному режиму. Сравнивая (16) и (14), запишем комплексное уравнение

$$e^{i\psi_{01}} + e^{i\psi_{02}} = -\frac{\mu_1 + \mu_2 e^{i\gamma}}{\mu_3} - \frac{\varepsilon_2(1 - \nu^2 + i\nu\delta)}{\varepsilon_1 \mu_3 \nu^2} e^\gamma, \quad (17)$$

вещественная и мнимая часть которого образуют систему двух вещественных уравнений относительно ψ_{01} и ψ_{02} :

$$\begin{aligned} \cos \psi_{01} + \cos \psi_{02} &= -\frac{\mu_1 + \mu_2 \cos \gamma}{\mu_3} - \frac{\varepsilon_2((1 - \nu^2) \cos \gamma - \nu\delta \sin \gamma)}{\varepsilon_1 \nu^2 \mu_3} \equiv \alpha, \\ \sin \psi_{01} + \sin \psi_{02} &= -\frac{\mu_2 \sin \gamma}{\mu_3} - \frac{\varepsilon_2((1 - \nu^2) \sin \gamma + \nu\delta \cos \gamma)}{\varepsilon_1 \nu^2 \mu_3} \equiv \beta. \end{aligned} \quad (18)$$

Решая систему (18), находим

$$\begin{aligned} \psi_{01} &= \arctg \frac{\beta}{\alpha} \pm \arccos[\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}/2], \\ \psi_{02} &= \arctg \frac{\beta}{\alpha} \mp \arccos[\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}/2]. \end{aligned} \quad (19)$$

Из формул (19) вытекает следующее условие существования полусбалансированного стационарного режима:

$$\alpha^2 + \beta^2 \leq 4. \quad (20)$$

Отметим, что в случае отсутствия эксцентриситета АБУ ($\varepsilon_2 = 0$ и $\gamma = 0$) имеем $\alpha = -\mu_1/\mu_3$, $\beta = 0$. При этом формулы (19) и условие (20) полностью соответствуют результатам, полученным ранее в [6] для сбалансированного стационарного режима.

На рис. 2 представлены графики изменения величины $\alpha^2 + \beta^2$ в зависимости от безразмерной угловой скорости ν , рассчитанные для трех значений балансировочного коэффициента $\sigma = 2m_3r/(m_1+m_2)s_1$. Левый график соответствует $\sigma = 0.8$, центральный — $\sigma = 1$ и правый — $\sigma = 1.2$. Из графиков видно, что в первом случае условие (20) удовлетворяется только в небольшой окрестности критической частоты. При $\sigma = 1$ область существования расширяется в закритическую сторону, а при $\sigma = 1.2$ полусбалансированный режим существует уже во всей закритической области.

На рис. 3 показаны графики зависимости амплитуды прецессионного движения ротора и углов отклонения балансировочных шариков от времени, полученные численным интегрированием системы (4) в случае, когда балансировочный коэффициент равен 1. Верхний рисунок получен при $\nu = 3$ и соответствует случаю, когда условие существования полусбалансированного режима (20) не удовлетворяется. Мы видим, что в системе имеет место несбалансированный режим первого типа (шарики вместе). Нижний рисунок, полученный при $\nu = 1.2$, демонстрирует процесс установления полусбалансированного режима. В этом случае балансировочные шарики занимают

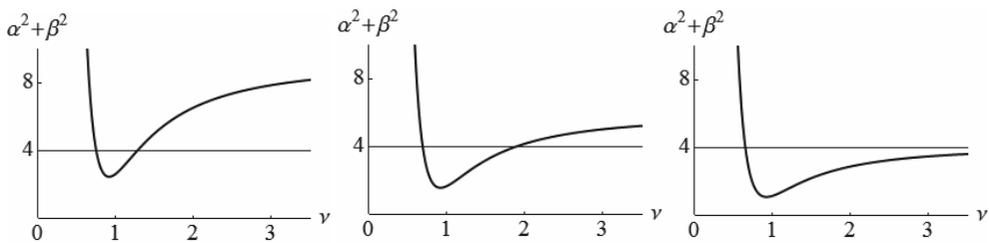


Рис. 2. Области существования полусбалансированного режима.

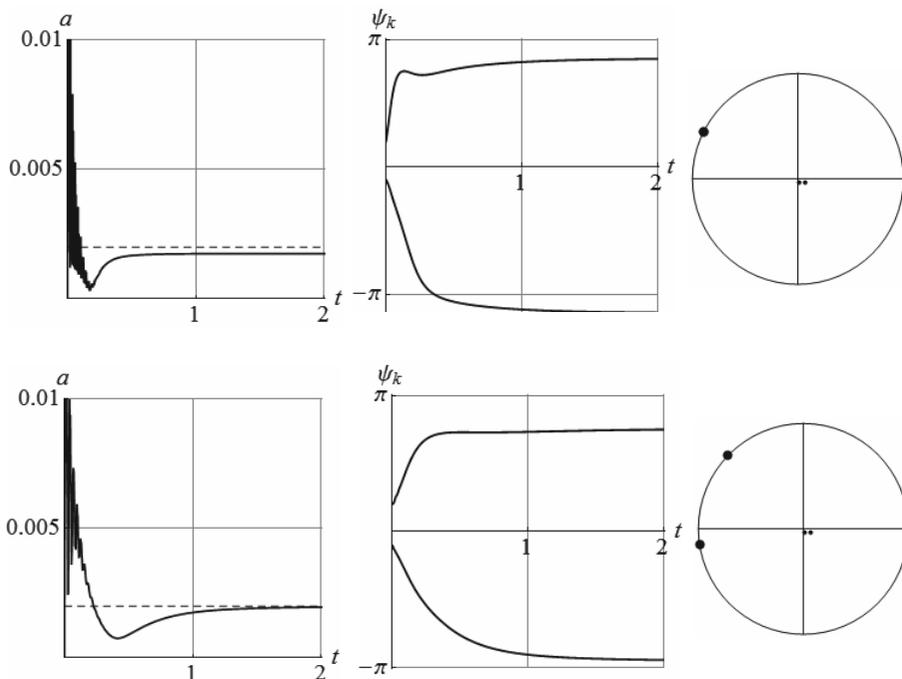


Рис. 3. Два типа несбалансированных стационарных режимов.

позицию, обеспечивающую постоянную амплитуду круговой прецессии, равную эксцентриситету АБУ.

3. Устойчивость стационарных режимов. Для исследования устойчивости стационарных режимов перепишем автономные уравнения (7) в вещественном виде:

$$\begin{aligned}
 (\ddot{\xi} - 2\nu\dot{\eta} - (1 - \nu^2)\xi) + \delta_1(\dot{\xi} - \nu\eta) &= (\mu_1 + \mu_2 \cos \gamma)\nu^2 + \mu_3 \sum_{j=1}^n ((\nu + \psi_j)^2 \cos \psi_j + \dot{\psi}_j \sin \psi_j), \\
 (\ddot{\eta} + 2\nu\dot{\xi} - (1 - \nu^2)\eta) + \delta_1(\dot{\eta} - \nu\xi) &= \mu_2\nu^2 \sin \gamma + \mu_3 \sum_{j=1}^n ((\nu + \dot{\psi}_j)^2 \sin \psi_j - \dot{\psi}_j \cos \psi_j), \\
 \ddot{\psi}_j + \delta_2\dot{\psi}_j &= \varepsilon_1(\ddot{\xi} - 2\nu\dot{\eta} - \nu^2\xi) \sin \psi_j - (\ddot{\eta} + 2\nu\dot{\xi} - \nu^2\eta) \cos \psi_j + \varepsilon_2\nu^2 \sin(\gamma - \psi_j), \\
 & j = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

(21)

Первые два уравнения (21) описывают движение геометрического центра ротора во

вращающей системе координат. Поэтому координаты ξ и η являются медленно меняющимися функциями времени, а их производные можно считать малыми по сравнению с единицей. Также малыми можно считать безразмерные параметры ε_1 , ε_2 и δ_1 . С учетом этого упростим уравнения (21), пренебрегая в них членами второго порядка малости. Тогда для случая АБУ с двумя шариками упрощенные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} 2\nu\dot{\eta} - (1 - \nu^2)\xi + \delta_1\nu\eta &= -\nu^2(\mu_1 + \mu_2 \cos \gamma + \mu_3(\cos \psi_1 + \cos \psi_2)), \\ 2\nu\dot{\xi} + (1 - \nu^2)\eta + \delta_1\nu\xi &= \nu^2(\mu_2 \sin \gamma + \mu_3(\sin \psi_1 + \sin \psi_2)), \\ \delta_2\dot{\psi}_1 &= \nu^2(\varepsilon_2 \sin(\gamma - \psi_1) + \varepsilon_1(\eta \cos \psi_1 - \xi \sin \psi_1)), \\ \delta_2\dot{\psi}_2 &= \nu^2(\varepsilon_2 \sin(\gamma - \psi_2) + \varepsilon_1(\eta \cos \psi_2 - \xi \sin \psi_2)). \end{aligned} \quad (22)$$

Пусть $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\psi_1$ и $\Delta\psi_2$ — малые отклонения обобщенных координат от их стационарных значений ξ_0 , η_0 , ψ_{10} , ψ_{20} . Подставляя выражения

$$\xi = \xi_0 + \Delta\xi, \quad \eta = \eta_0 + \Delta\eta, \quad \psi_i = \psi_{i0} + \Delta\psi_i$$

в уравнения (22), разлагая в ряд по малым отклонениям и пренебрегая малыми второго порядка и выше, получим линейную систему уравнений в вариациях:

$$\begin{aligned} 2\Delta\dot{\eta} - (1 - \nu^2)\Delta\xi + \delta_1\nu\Delta\eta - \mu_3\nu^2(\sin \psi_{01} + \sin \psi_{02}) &= 0, \\ 2\Delta\dot{\xi} + (1 - \nu^2)\Delta\eta + \delta_1\nu\Delta\xi - \mu_3\nu^2(\cos \psi_{01} + \cos \psi_{02}) &= 0, \\ \delta_2\Delta\dot{\psi}_1 - \varepsilon_1\nu^2(\cos \psi_{01}\Delta\eta - \sin \psi_{01}\Delta\xi) + \\ + (\varepsilon_2 \cos(\gamma - \psi_{10}) + \varepsilon_1(\xi_0 \cos \psi_{10} + \eta_0 \sin \psi_{10}))\nu^2\Delta\psi_{10} &= 0, \\ \delta_2\Delta\dot{\psi}_2 - \varepsilon_1\nu^2(\cos \psi_{02}\Delta\eta - \sin \psi_{02}\Delta\xi) + \\ + (\varepsilon_2 \cos(\gamma - \psi_{20}) + \varepsilon_1(\xi_0 \cos \psi_{20} + \eta_0 \sin \psi_{20}))\nu^2\Delta\psi_{20} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

В случае полусбалансированного стационарного режима имеем

$$\xi_0 = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos \gamma, \quad \eta_0 = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \gamma. \quad (24)$$

Тогда коэффициенты характеристического полинома системы (23) с учетом соотношений (19) и (24) примут вид

$$\begin{aligned} a_0 &= 4\delta_2^2\nu^2, \quad a_1 = 4\delta_1\delta_2^2\nu^2, \quad a_2 = \delta_2^2((1 - \nu^2)^2 + (\delta_1\nu)^2), \\ a_3 &= 2\delta_2\varepsilon_1\mu_3\nu^4(\nu^2 - 1), \quad a_4 = \varepsilon_1^2\mu_3^2\nu^8(\alpha^2 + \beta^2)(4 - \alpha^2 - \beta^2)/4. \end{aligned}$$

Выражение для коэффициента a_3 показывает, что необходимое условие устойчивости данного режима выполняется только в закритической области частот. Достаточные условия асимптотической устойчивости полусбалансированного режима дает критерий Рауса—Гурвица

$$a_1a_2 > a_3a_0, \quad a_3(a_1a_2 - a_3a_0) > a_1^2a_4. \quad (25)$$

На рис. 4 представлены двухпараметрические диаграммы устойчивости полусбалансированного стационарного режима, рассчитанные двумя способами: 1) путем анализа точных уравнений (21); 2) путем анализа упрощенных уравнений (22). Расчеты проведены для следующих значениях параметров: $n = 2$, $m_1 = 0.8$ кг, $m_2 = 0.2$

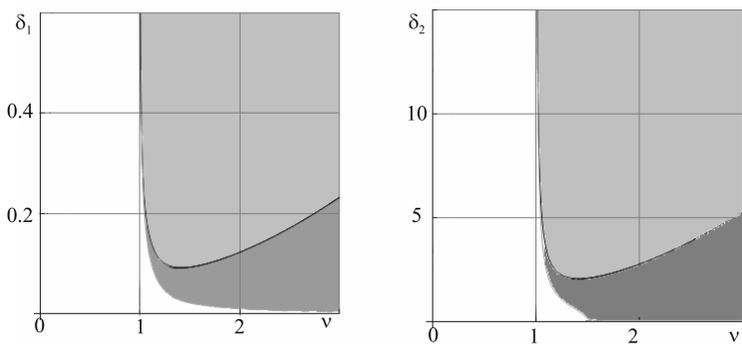
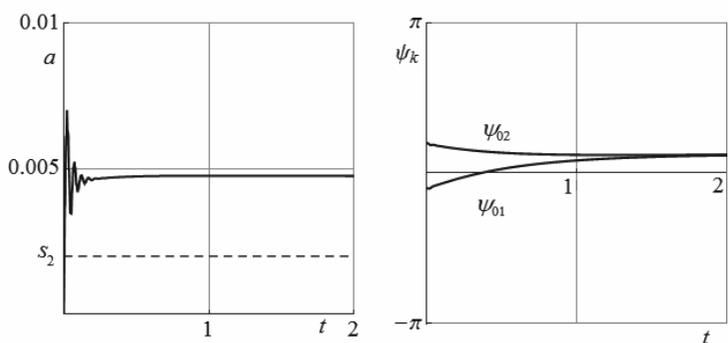
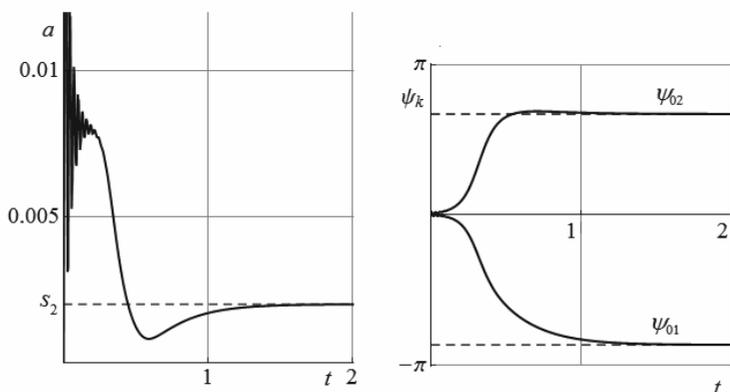


Рис. 4. Двупараметрические диаграммы устойчивости полусбалансированного стационарного режима.



а) $\nu=0.7$



б) $\nu=1.5$

Рис. 5. Результаты численного интегрирования системы (4).

кг, $m_3 = 0.03$ кг, $s_1 = 0.0025$ м, $s_2 = 0.002$ м, $\gamma = 2$, $r = 0.05$. Левая диаграмма соответствует плоскости параметров (ν, δ_1) при $\delta_2 = 12.8$, а правая — (ν, δ_2) при $\delta_1 = 0.1$. Затененная область соответствует асимптотической устойчивости полусбалансированного режима. При этом более светлая часть затененной области получе-

на с помощью приближенных формул (25). Рисунок показывает, что использование упрощенных уравнений для анализа устойчивости допустимо лишь при достаточно больших коэффициентах затухания.

На рис. 5 приведены результаты численного интегрирования системы (4). Рис. 5, *a* и *b* отвечают случаям, когда угловая скорость ротора ниже и выше критической соответственно. В левых частях рисунков показаны графики изменения со временем амплитуд прецессионного движения, а в правых — изменение положения балансировочных шариков. Штриховые прямые на правом нижнем графике соответствуют стационарным значениям ψ_{01} и ψ_{02} , рассчитанным по формулам (19).

Таким образом, результаты расчетов демонстрируют, что в докритической области устанавливается несбалансированный стационарный режим типа 1, а в закритической — полусбалансированный режим с амплитудой остаточной вибрации, равной эксцентриситету АБУ.

Литература

1. Агафонов Ю. В. Автоматическое балансирующее устройство для ручных шлифовальных машин // Вестник машиностроения. 1976. № 9 С. 36–38.
2. Агафонов Ю. В., Базыкин Ю. В. Исследование влияния эксцентриситета беговой дорожки шарового автобалансира на качество балансировки // Вестник машиностроения. 1986. № 8. С. 23–25.
3. Нестеренко В. П., Соколов А. П. Остаточный дисбаланс, вызванный эксцентриситетом беговой дорожки, при автоматической балансировке роторов шарами // Динамика управляемых механических систем. Иркутск. ИЛИ. 1983. С. 46–50.
4. Olsson K. O. Limits for the use of auto-balancing // International Journal of Rotating Machinery. 2004. Vol. 10, N 3. P. 221–226.
5. Genta G. Dynamics of Rotating Systems // Springer. 2005. 658 p.
6. Быков В. Г. Стационарные режимы движения неуравновешенного ротора с автобалансирующим механизмом // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2006. Вып. 2. С. 90–101.

Статья поступила в редакцию 26 июня 2014 г.

Сведения об авторах

Быков Владимир Григорьевич — доцент; vgbykov@mail.ru

Ковачев Александр Святославович — аспирант; alex0303@mail.ru

DYNAMIC OF A STATICALLY UNBALANCED ROTOR WITH ECCENTRIC BALL AUTOBALANCER

Vladimir G. Bykov, Aleksandr S. Kovachev

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; vgbykov@mail.ru, alex0303@mail.ru

A statically unbalanced rotor equipped with an automatic ball balancer, the axis of symmetry of which does not coincide with the symmetry axis of the rotor, is considered. Based on a simple model of the Jeffcott's rotor, the equations of motion of the system are derived in the fixed and rotating coordinate systems, as well as the equations describing the steady-state modes of motion. Fundamentally unenforceability of the conditions of existence of balanced steady-state mode for a rotor with variable imbalance is established. For autobalancer with two balls the possibility of the existence of two different types of unbalanced steady-state modes is shown. The steady-state mode with a constant residual vibration, whose amplitude is independent of the angular velocity and is equal to eccentricity of the balancer, is proposed to be called half-balanced. A solution that corresponds to half-balanced mode is constructed explicitly; the conditions of its existence and sustainability are found. Two-parameter stability diagrams for half-balanced steady-state mode are constructed using numerical methods. Numerical study of nonstationary motion modes of the rotor when it rotates at a constant angular velocity is performed. Refs 6. Figs 5.

Keywords: the ball autobalancing device, statically unbalanced rotor.