УДК 539.3 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 4

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО СЕГМЕНТА СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРУЗА С ПЛОСКИМ ОСНОВАНИЕМ

А. М. Ермаков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Решается задача о напряжённо-деформированном состоянии и потере устойчивости трансверсально-изотропного сегмента сферической оболочки переменной толщины, находящегося под действием внутреннего нормального давления и груза с плоским основанием. Сферический сегмент жестко заделан по краю и изначально нагружен внутренним давлением. В основу решения этой задачи положена теория анизотропных оболочек средней толщины Палия—Спиро, позволяющая учесть влияние поперечного сдвига и изменение толщины. Для моделирования больших деформаций используется метод последовательных нагружений, который реализуется двумя разными способами: с использованием линеаризованных нелинейных уравнений равновесия и минимизацией упругого потенциала оболочки на каждом шаге нагружения. Эти пути решения задачи дают разные подходы к определению критической нагрузки. Задачи о напряженно-деформированном состоянии близких к мягким оболочек под действием груза с плоским основанием важны для анализа данных, связанных с измерением внутриглазного давления в офтальмологии. Библиогр. 9 назв. Табл. 1. Ил. 7.

Ключевые слова: нелинейная теория оболочек, устойчивость, груз с плоским основанием.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о напряжённо-деформированном состоянии и потере устойчивости трансверсально-изотропного сегмента сферической оболочки переменной толщины, находящегося под действием груза с плоским основанием (рис. 1). Сферический сегмент жестко заделан по краю и изначально нагружен внутренним давлением.

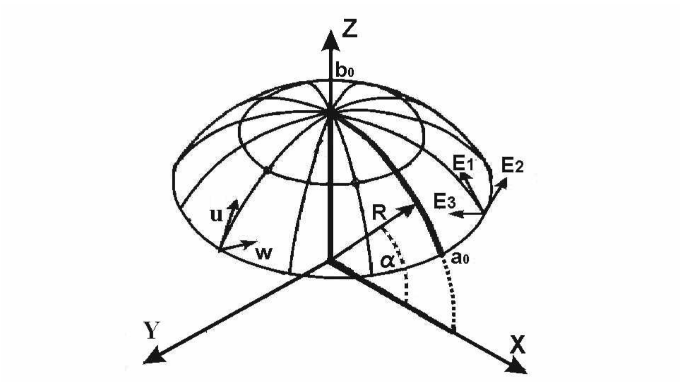

Рис. 1. Сферический сегмент.

Деформации и форма потери устойчивости считаются осесимметричными, поэтому рассматривается лишь половина дуги вертикального сечения с введенными в точке полюса и на экваторе граничными условиями симметрии и жесткой заделки. Таким образом, все величины зависят только от одной сферической координаты $\alpha \in [a_0, \pi/2]$, где a_0 характеризует угол раствора сегмента.

Под действием груза с плоским основанием возникают большие деформации, для описания которых необходима геометрически нелинейная теория оболочек. Считаем, что потеря контакта основания и оболочки соответствует потере устойчивости оболочки. Построение решения уравнений нелинейной теории связано со значительными трудностями [1, 2]. Поэтому в основу решения задачи положен метод последовательных нагружений [3].

В соответствии с ним действующее давление P представляется суммой монотонных последовательных нагружений:

$$P = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \ldots + \Delta P_n \qquad (\Delta P > 0, n \gg 1). \tag{1}$$

На каждом шаге метода к оболочке прикладывается только часть общей нагрузки ΔP_i так, чтобы деформации остались малыми. Приращения нагрузки ΔP_1, ΔP_2, ΔP_3 должны быть малы по сравнению с теми значениями, которым соответствует верхняя критическая нагрузка. Таким образом геометрически нелинейная задача сводится к последовательному решению линейных задач для предварительно нагруженной оболочки, исходное напряженно-деформированное состояние которой определено по результатам предшествовавших нагружений $\sum_{i=1}^{N} \Delta P_i$.

Следует учесть, что на предшествовавших шагах меняется форма оболочки и ее толщина. Это требует переопределения коэффициентов Ламе A_1, A_2, кривизн k_1, k_2, и толщины h. Пусть X и Z — функции описывающие срединную поверхность деформированной сферической оболочки радиуса R на предыдущем уровне нагружения в декартовой системе координат, u и w — тангенциальное и нормальное смещения:

$$\begin{aligned} X &= R\cdot\cos(\alpha) - u\cdot\sin(\alpha) + w\cdot\cos(\alpha), \\ Z &= R\cdot\sin(\alpha) + u\cdot\cos(\alpha) + w\cdot\sin(\alpha), \end{aligned} \tag{2}$$

тогда новые коэффициенты Ламе и кривизны находятся по формулам

$$\begin{aligned} &A_1 = \sqrt{(\partial_\alpha X)^2 + (\partial_\alpha Z)^2}, \qquad A_2 = X, \quad \rho = k_1 - k_2, \\ &k_1 = \tfrac{(\partial_\alpha X)(\partial_\alpha^2 Z) - (\partial_\alpha^2 X)(\partial_\alpha Z)}{((\partial_\alpha X)^2 + (\partial_\alpha Z)^2)^{(3/2)}}, \quad k_2 = \tfrac{(\partial_\alpha Z)}{X\sqrt{(\partial_\alpha X)^2 + (\partial_\alpha Z)^2}}. \end{aligned} \tag{3}$$

В разрешающих уравнениях метода последовательных нагружений учитываются также величины параметров напряженного и деформированного состояний оболочки, полученные на предыдущем уровне нагружения.

Тангенциальные и радиальный модули упругости материала рассматриваемой оболочки различаются на порядок, поэтому для ее моделирования была выбрана теория анизотропных оболочек средней толщины Палия—Спиро [3]. Эта теория позволяет учесть влияние поперечного сдвига и деформирование в направлении нормали к срединной поверхности, так как в основе ее приняты следующие гипотезы:

1) прямолинейные волокна оболочки, перпендикулярные к ее срединной поверхности до деформации, остаются после деформации также прямолинейными;

2) косинус угла наклона таких волокон к срединной поверхности деформированной оболочки равен осредненному углу поперечного сдвига;

3) учитывается изменение толщины оболочки.

Математическая формулировка принятых гипотез сводится к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} &u_1 = u + \varphi\cdot z, \quad u_3 = w + F(\alpha, z), \\ &\varphi = \gamma_1 + \varphi_0, \qquad \varphi_0 = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha} + k_1 u, \end{aligned} \tag{4}$$

где u_1 и u_3 — смещения слоя, $z \in [-h/2, h/2]$ характеризует расстояние до срединной поверхности, φ — угол поворота волокна в плоскости (α, z), φ_0 — угол поворота нормали к срединной поверхности, γ_1 — угол сдвига. Функция $F(\alpha, z)$ характеризует изменение прогиба по толщине оболочки.

Поверхностная нагрузка m_3, q_3, изменение напряжений по толщине оболочки σ_{33} и изменение толщины $F(\alpha, z)$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}
&\sigma_{33} = \frac{P_j^+\left(1+\frac{h}{2}k_1\right)\left(1+\frac{h}{2}k_2\right)\left(0.5+\frac{z}{h}\right)}{(1+k_1 z)(1+k_2 z)} - \frac{P_j^-\left(1-\frac{h}{2}k_1\right)\left(1-\frac{h}{2}k_2\right)\left(0.5-\frac{z}{h}\right)}{(1+k_1 z)(1+k_2 z)};\\
&F(\alpha,z) = \int_0^z \frac{\sigma_{33}}{E_z}dz - (\mu_1\varepsilon_1+\mu_2\varepsilon_2)\,z - (\mu_1(\eta_1-\varepsilon_1 k_1)+\mu_2(\eta_2-\varepsilon_2 k_2))\,\frac{z^2}{2}+\\
&+(\mu_1\eta_1 k_1+\mu_2\eta_2 k_2)\frac{z^3}{3},\\
&m_3 = \frac{h}{2}\Delta P_i^+\left(1+\frac{hk_1}{2}\right)\left(1+\frac{hk_2}{2}\right)+\frac{h}{2}\Delta P_i^-\left(1-\frac{hk_1}{2}\right)\left(1-\frac{hk_2}{2}\right),\\
&q_3 = \Delta P_i^+\left(1+\frac{hk_1}{2}\right)\left(1+\frac{hk_2}{2}\right)-\Delta P_i^-\left(1-\frac{hk_1}{2}\right)\left(1-\frac{hk_2}{2}\right);
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \eta_1,\ \eta_2$ — компоненты деформации оболочки, $\Delta P_j^+,\ \Delta P_j^-$ — приращения внешнего и внутреннего давлений.

Задача решается в перемещениях. На границах области определения $[a_0, \pi/2]$ для компонентов смещения должны выполняться три граничных условия жесткой заделки и три условия симметрии. Следует отметить, что уравнения теории оболочек в сферической системе координат имеют особенность в точке полюса. Поэтому рассмотрим его малую левую окрестность $b_0 = \pi/2$-ε :

$$\begin{aligned}
u(a_0) = 0, \quad w(a_0) = 0, \quad \gamma_1(a_0) = 0,\\
u(b_0) = 0, \quad w^{/}(b_0) = 0, \quad \gamma_1(b_0) = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

В этой работе метод последовательных нагружений реализуется двумя разными способами: с использованием линеаризованных нелинейных уравнений равновесия и минимизацией упругого потенциала оболочки на каждом шаге нагружения. Эти пути решения задачи дают разные подходы к определению критической нагрузки.

Проведем сравнение рассмотренных методов и результатов, получаемых с их использованием. Задачи о напряженно-деформированном состоянии мягких и близких к мягким оболочек под действием груза с плоским основанием важны для анализа данных, связанных с измерением внутриглазного давления в офтальмологии.

2. Метод линеаризации нелинейных уравнений равновесия. Рассмотрим метод, основанный на идее линеаризации уравнений нелинейной теории оболочек на малом отрезке нагружения [2, 3]. Его особенность состоит в том, что благодаря применению физических линейных соотношений удается свести нелинейную задачу к последовательному решению линейных задач. Таким образом, исходные уравнения теории записываются для добавок (приращений), а в приведенных уравнениях за ΔT_1, $\Delta\varphi$, $\Delta\varphi_0$, $\Delta\gamma_1$ обозначены суммы компонентов напряженного и деформированного состояния оболочки, полученных на предыдущих уровнях нагружения. Расчет заканчивается, когда нагрузка или деформация достигает величины, заданной условием задачи. К сожалению, в общем случае метод линеаризации приводит к неоправданному завышению объема вычислительной работы.

Рассматриваемые уравнения позволяют при известных значениях величин параметров напряженного и деформированного состояния оценить устойчивость в малом. Если $\Delta P_i = 0$, тогда приращения усилий, перемещений и параметров деформаций к предыдущему состоянию могут быть не равны нулю только в случае появления новой формы равновесия (статический критерий устойчивости). В этом случае для продолжения нагружения требуется перераспределить существующую нагрузку по новой форме поверхности.

Введем новые константы $E_{ij}, E_z, K_{ij}, \mu_i$, выражающиеся через модули нормальной упругости E_i и коэффициенты поперечного сжатия ν_{ij} с помощью равенств

$$E_{ii} = \frac{E_i}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad E_{i(3-i)} = \frac{\nu_{i(3-i)}E_i}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad E_z = \frac{E_3}{1-\nu_{13}\mu_1-\nu_{23}\mu_2}, \quad \mu_i = \frac{\nu_{3i}+\nu_{21}\nu_{3(3-i)}}{1-\nu_{12}\nu_{21}},$$
$$K_{11} = -E_{11}h\rho, \quad K_{21} = E_{22}hp, \quad K_{2i} = \frac{3}{2}E_{ii}(k_ih + \nu_{i(3-i)}k_{(3-i)}h)\mu_i,$$
$$K_{i3} = E_{ii}\frac{h}{2}k_i(\mu_{(3-i)} + 2\nu_{i(3-i)}\mu_i) + E_{(3-i)(3-i)}\frac{h}{2}k_{(3-i)}(2\mu_i + \nu_{(3-i)i}\mu_{(3-i)}),$$
$$(i = 1, 2). \tag{7}$$

Задача решается в перемещениях. Подставим уравнения связи деформаций с компонентами вектора смещения

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + k_1 w + \varphi\cdot\Delta\varphi - \gamma_1\cdot\Delta\varphi - \Delta\gamma_1\cdot\varphi,\\
&\varepsilon_2 = \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha}u + k_2 w; \quad \eta_1 = \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right); \quad \eta_2 = \frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial A_2}{\partial \alpha}\right)\varphi
\end{aligned} \tag{8}$$

в уравнения связи деформаций с усилиями T_1, T_2, N_1 и моментами M_1, M_2:

$$\begin{aligned}
&T_1 = h(E_{11}\varepsilon_1 + E_{12}\varepsilon_2) + \frac{h^2}{12}((K_{11}-K_{12})\eta_1 - K_{13}\eta_2) + \mu_1\frac{q_3}{2}h,\\
&T_2 = h(E_{12}\varepsilon_1 + E_{22}\varepsilon_2) + \frac{h^2}{12}((K_{21}-K_{22})\eta_2 - K_{23}\eta_1) + \mu_2\frac{q_3}{2}h,\\
&M_1 = \frac{h^2}{12}(E_{11}\eta_1 h + E_{12}\eta_2 h + (K_{11}-K_{12})\varepsilon_1 - K_{23}\varepsilon_2) + \mu_1\frac{q_3}{8}h^2,\\
&M_2 = \frac{h^2}{12}(E_{12}\eta_1 h + E_{22}\eta_2 h + (K_{21}-K_{22})\varepsilon_2 - K_{13}\varepsilon_1) + \mu_2\frac{q_3}{8}h^2,\\
&N_1 = G_{13}h\gamma_1 - \Delta T_1\varphi_0 - T_1\Delta\varphi_0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Полученные зависимости усилий и моментов от компонентов смещения u, w, γ_1 используем в уравнениях равновесия для сферического слоя:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial(A_2T_1)}{\partial\alpha} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha}T_2\right) + k_1N_1 = 0,\\
&\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial(A_2N_1)}{\partial\alpha}\right) - k_1T_1 - k_2T_2 + q_3 = 0,\\
&\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial(A_2M_1)}{\partial\alpha} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha}M_2\right) - N_1 - \Delta T_1\varphi_0 - T_1\Delta\varphi_0 = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, получена система из трех дифференциальных уравнений 6-го порядка с тремя неизвестными функциями (10) и шестью граничными условиями жесткой заделки (6).

Для решения этой системы разработана программа в пакете Mathematica 8.0, реализующая конечно-разностный численный метод.

3. Метод минимизации потенциальной энергии оболочки. Рассмотрим второй метод решения нелинейной задачи теории оболочек, представленный в работе [4]. В его основе лежит идея минимизация функционала потенциальной энергии на малом отрезке нагружения с использованием метода Ритца. Однако в нашем случае учтено, что на каждом из этапов нагружения оболочка меняет свою форму, поэтому в уравнение упругого потенциала каждый раз входят новые коэффициенты Ламе, кривизны и функция толщины (2), (3). Это необходимо для уточнения области соприкосновения со штампом от шага к шагу и перерасчета эпюры нормального напряжения, вызванного воздействием груза.

Приведём общий функционал полной энергии половины дуги, образованной проходящим через центр вертикальным сечением сферического сегмента. Этот функционал имеет более полную форму, чем принятый в работе [4], которая учитывает подчеркнутые компоненты второго порядка малости, определяемые теорией Палия—Спиро:

$$J = \int_{a_0}^{b_0} (h(E_{11}\varepsilon_1^2 + 2E_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + E_{22}\varepsilon_2^2 + G_{13}\gamma_1^2) + \frac{h^3}{12}(E_{11}\eta_1^2 + 2E_{12}\eta_1\eta_2 + E_{22}\eta_2^2) +$$
$$+ \frac{h^2}{6}((K_{11} - K_{12})\eta_1\varepsilon_1 + (K_{21} - K_{22})\eta_2\varepsilon_2 - K_{13}\eta_2\varepsilon_1 - K_{23}\eta_1\varepsilon_2) +$$
$$+ q_3(w \underline{- \frac{h}{2}(\mu_1\varepsilon_1 + \mu_2\varepsilon_2) - \frac{h^2}{8}(\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2)})A_1A_2 d\alpha. \quad (11)$$

С использованием нелинейных уравнений связи деформаций и смещений (12), упругий потенциал (11) приводится к зависимости только от трех компонентов смещения:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + k_1 w + \frac{\phi_0^2}{2}, \qquad \eta_1 = \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right),$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha}u + k_2 w, \quad \eta_2 = \frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial A_2}{\partial \alpha}\right)\varphi. \quad (12)$$

Для минимизации полученного функционала используется метод Ритца, описанный в работе [5]. В нашем случае смещения представлены в виде рядов Фурье удовлетворяющих граничным условиям (6) на концах дуги $L = [a_0, b_0]$. Каждый из членов рядов зависит от численного параметра характеризующего нагрузку p:

$$u[\alpha] = \sum_{i=1}^{N}\left(un_i^k[p]\sin\left[\frac{\pi * i}{L}(\alpha - a_0)\right]\right), \quad w[\alpha] = \sum_{i=1}^{N}\left(wn_i^k[p]\sin\left[\frac{\pi * i}{2L}(\alpha - a_0)\right]\right),$$
$$\gamma_1[\alpha] = \sum_{i=1}^{N}\left(\gamma n_i^k[p]\sin\left[\frac{\pi * i}{L}(\alpha - a_0)\right]\right). \quad (13)$$

Подставив (13) в функционал (11), проинтегрируем его. Продолжая реализацию метода, составим систему U из частных производных полученной комбинации по каждому из входящих в нее членов $V{=}(un_i^k[p],\, wn_i^k[p],\, \gamma n_i^k[p])$:

$$U \equiv \left\{ \frac{\partial J}{\partial V} = 0 \right\}, \quad i = (1, 2, \ldots, N). \tag{14}$$

В результате получена система нелинейных алгебраических уравнений (14), для решения которой применяется метод продолжения решения по параметру нагружения p. Дифференцируя каждое уравнение системы U по p, получим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dU}{dp} = \frac{\partial U}{\partial V}\frac{dV}{dp} + \frac{\partial U}{\partial p}. \tag{15}$$

В этой системе в качестве $(un_i^k[p],\, wn_i^k[p],\, \gamma n_i^k[p])$ принимаются компоненты разложения в ряд сумм смещений на предыдущих этапах нагружения. На первом шаге метода за $(un_i^1[p],\, wn_i^1[p],\, \gamma n_i^1[p])$ берется разложенное в ряд Фурье решение, полученное по линейной теории с использованием уравнений равновесия в смещениях (7), (10). Производные $d(un_i^k)/dp = \Delta un_i^k$, $d(wn_i^k)/dp = \Delta wn_i^k$, $d(\gamma n_i^k)/dp = \Delta \gamma n_i^k$ станут искомыми неизвестными приращениями членов рядов смещений происходящих под действием малой нагрузки ΔP_i. В результате получена система линейных алгебраических уравнений относительно Δun_i^k, Δwn_i^k, $\Delta \gamma n_i^k$. Новые члены рядов смещений, описывающие деформацию оболочки, определяются по формулам

$$un_i^{k+1} = un_i^k + \Delta un_i^k, \quad wn_i^{k+1} = wn_i^k + \Delta wn_i^k, \quad \gamma n_i^{k+1} = \gamma n_i^k + \Delta \gamma n_i^k. \tag{16}$$

Для существования решения определитель полученной системы должен быть отличен от нуля, значение сумм ΔP_i, при котором он обратится в ноль, будет соответствовать значению критической нагрузки. В этом случае для получения закритического состояния требуется сменить параметр нагружения [4].

4. Численное моделирование. Приведем некоторые результаты, полученные для задачи о нагружении сегмента сферической оболочки грузом с плоским основанием. Расчеты проводились в программе, написанной в пакете Mathematica 8.0. Для моделирования плоского основания вводится специальная численная функция, учитывающая разгружение оболочки при потере контакта с грузом [9]. Основной задачей этой работы является определение наличия и вида отслоения оболочки от штампа внутри области контакта в зависимости от величин внутреннего давления, толщины и радиуса кривизны оболочки.

В качестве практического приложения рассматриваемая задача может в приближенной постановке описывать деформацию глаза, находящегося под действием груза с плоским основанием. Глаз состоит из роговицы и склеры, причем склеральная белая оболочка занимает 90 процентов поверхности. В этой работе влияние склеральной оболочки не учитывается и рассматривается лишь деформация роговицы. Наложение штампа весом в 10 г происходит при измерении внутриглазного давления по методу Маклакова. О значении внутреннего давления судят по радиусу области контакта. Роговица может быть представлена в виде жёстко заделанного по краям сегмента трансверсально-изотропной сферической оболочки переменной толщины [6]. Средний радиус ее кривизны $R = 7.5$ мм, радиус основания является постоянной величиной и равен приблизительно $R_{os} = 5.25$ мм, толщина h линейно меняется от $h_a = 1$ мм на концах сегмента до $h_b = 0.5$ мм в точке полюса. Будем считать, что эти геометрические параметры соответствуют роговице, находящейся под действием внутриглазного давления в 15 мм рт. столба (1 мм рт. ст. = 133.3 Па). Для модулей упругости, поперечного сдвига, и коэффициентов Пуассона примем следующие значения [7, 8]: $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^4$ Па, $E_3 = 7 \cdot 10^2$ Па, $G = 7 \cdot 10^3$ Па, $\nu_{21} = \nu_{31} = \nu_{12} = \nu_{32} = 0.4$, $\nu_{13} = \nu_{23} = 0.01$. Рассмотрим деформации и соответствующее им распределение эпюры нормального напряжения в области контакта.

Расчеты показали, что при малых деформациях (малом весе груза в 1 г), основная нагрузка сосредоточена в окрестности полюса и экспоненциально убывает при приближении к краям.

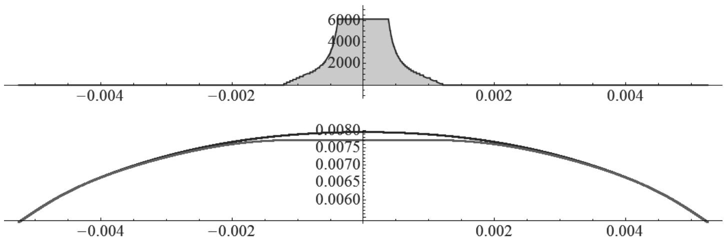

Рис. 2. Эпюра малого нагружения.

При увеличении веса груза до 3.5 г эпюра перераспределяется и в окрестности полюса возникает область, в которой напряжения контакта равны нулю.

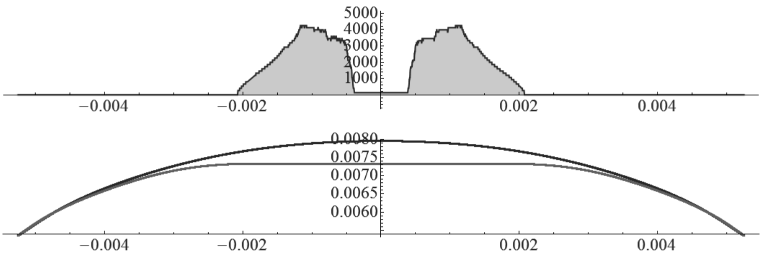

Рис. 3. Возникновение ненагруженной области.

Для относительно толстой оболочки ($h_b = 0.5$) при искомой нагрузке в 10 г отслоение в центре исчезает.

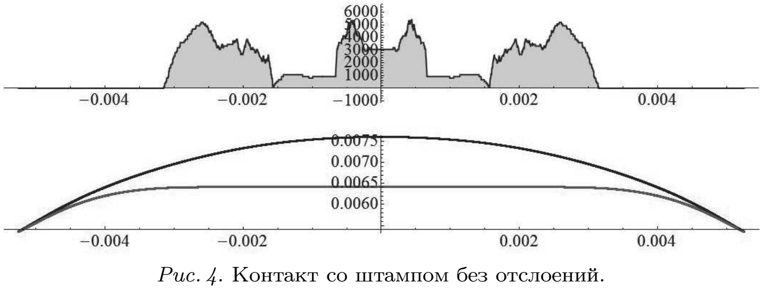

Рис. 4. Контакт со штампом без отслоений.

При большом начальном давлении в 22 мм рт. ст. при той же нагрузке в 10 г отслоение от штампа в центре (рис. 3) приобретает кольцевую форму. Радиус области контакта уменьшается.

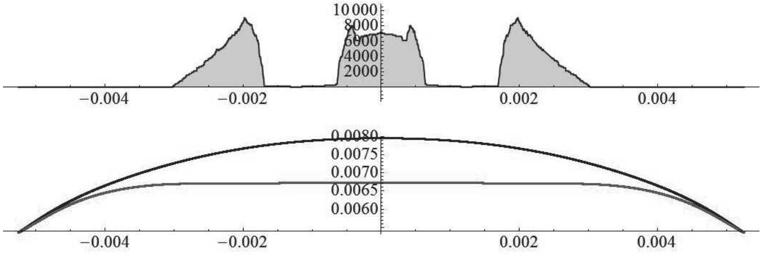

Рис. 5. Кольцевое отслоение внутри области контакта.

Если же начальная толщина оболочки в центре была мала ($h_b = 0.4$), то при том же значении накладываемой нагрузки в 10 г внутри области контакта возникают две области отслоения: круглая и кольцевая. Наличие отслоений увеличивает значение радиуса контакта со штампом.

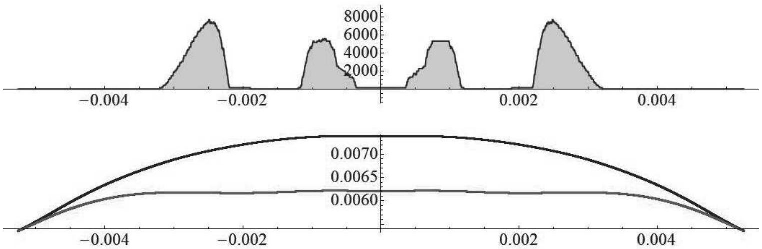

Рис. 6. Круглое и кольцевое отслоение внутри области контакта.

Если считать внутренний объем постоянным, то для оболочки возникает только круглое отслоение; также существенно увеличивается радиус области контакта со штампом.

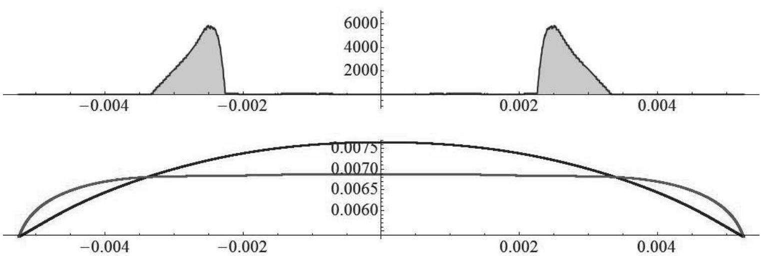

Рис. 7. Круглое отслоение большого радиуса.

В таблице представлены значения радиусов границы области контакта R_{out} (мм) оболочки со штампом весом в 10 г для различных значений толщины оболочки в окрестности полюса h_b (мм) и радиусах кривизн, равных $R = 7.5 - h_b$ (мм). Для случая оболочки с постоянным внутренним объемом приводится радиус ненагруженной внутренней области R_{in}. Такие расчёты могут помочь при моделировании последствий рефракционной хирургии, при которой изменяется толщина роговицы. Значения получены с использованием методов линеаризации нелинейных уравнений равновесия и минимизации упругого потенциала для постоянного и переменного внутренних объемов.

Радиусы границ области контакта оболочки со штампом для разных методов и моделей

Переменный объем					
Толщина в точке полюса, h_b	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
Метод линеаризации, R_{out}	3.27	3.19	3.1	3.00	2.91
Метод минимизации, R_{out}	3.3	3.21	3.12	3.03	2.94

Постоянный объем					
Толщина в точке полюса, h_b	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
Метод линеаризации, $(R_{out}; R_{in})$	3.63; 2.38	3.48; 2.31	3.34; 2.24	3.21; 2.16	3.02; 2.08
Метод минимизации, $(R_{out}; R_{in})$	3.65; 2.4	3.51; 2.33	3.36; 2.26	3.22; 2.18	3.05; 2.1

5. Заключение. Функции прогиба срединной поверхности для представленных способов реализации метода последовательных нагружений получаются достаточно близкими между собой даже при существенных деформациях. Радиус нагруженной области R_{out}, полученный по методу линеаризации, немного меньше радиуса, получающегося по методу минимизации упругого потенциала, что может быть объяснено явным учетом функции ΔT_1 в разрешающих уравнениях первого метода. Более пологая и тонкая оболочка получает больший радиус области контакта R_{out}, обусловленный возможными нарушениями контакта оболочки и штампа, что может приводить к занижению оценки давления внутри оболочки. Если считать внутренний объем оболочки постоянным, то радиус области контакта со штампом существенно увеличивается. Полученные результаты показали, что для описания поведения роговицы глаза под действием штампа в рассматриваемую модель необходимо ввести склеральную оболочку.

Литература

1. *Феодосьев В. И.* Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых тел // Прикладная математика и механика. Т. XXVII. 1963. С. 265–274.

2. *Лавендел Э. Э.* Расчет резино-технических изделий. М.: Машиностроение. 1997. С. 146–154.

3. *Палий О. М.* Вариант прикладной теории толстых оболочек // Изв РАН Механика твердого тела. № 2, 2014.

4. *Карпов В. В., Баранова Д. А., Беркалиев Т. Р.* Программный комплекс исследования устойчивости оболочки. СПб.: Изд-во СПбГАСУ, 2009. С. 16–20.

5. *Москаленко Л. П.* Методика исследования устойчивости пологих ребристых оболочек на основе метода продолжения решения по наилучшему параметру // Вестник гражданских инженеров. № 4 (29). 2011. С. 161–164.

6. *Бауэр С. М., Зимин Б. А., Товстик П. Е.* Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000. 92 с.

7. *Аветисов С. Э., Бубнова И. А., Антонов А. А.* Исследование влияния биомеханических свойств роговицы на показатели тонометрии // Бюллетень СО РАМН. 2009. № 4. С. 30–33.

8. *Иомдина Е. Н.* Механические свойства тканей глаза человека // Современные проблемы биомеханики. Вып. 11. М.: Изд-во МГУ, 2006. С. 183–200.

9. *Катор Б. Я.* Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения. Киев: Наукова думка, 1990. 32, 95 с.

Статья поступила в редакцию 26 июня 2014 г.

Сведения об авторе

Ермаков Андрей Михайлович — кандидат физико-математических наук, докторант; ermakovamsi@gmail.com

THE BUCKLING OF THE TRANSVERSAL-ISOTROPIC SPHERICAL SEGMENT UNDER INFLUENCE OF THE LOAD WITH A FLAT BASE

Aleksandr K. Belyaev

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; ermakovamsi@gmail.com

In this paper the problem of the stress-strain state and the buckling of the transversal-isotropic segment of spherical shell with the different thicknesses under the influence of the internal preassure and the load with a flat base is studied. The spherical segment has a rigid support on the edge and previously has been loaded by internal pressure. The solution of this problem is based on the theory of the shell of moderate thickness by Paly—Spiro. This theory takes into account the influence of the cross section shear and change of the shell thickness. For modelling such large deformations the method of consequent loading is used. In this work the method of consequent loading is presented in two ways. The first of them is the method of linearization of non-linear equilibrium equations and the second — the method of minimization of elastic potential of the shell. These ways of the problem solution give us the different approaches to the estimation of the critical load. The problems of stress-strain state of soft and close to soft shells that are under the influence of a load with a flat base are important for analyzing the data related to measuring a very important in ophthalmology characteristic of intraocular pressure. Refs 9. Figs 7. Tables 1.

Keywords: nonlinear shell theory, stability, load with a flat base.