УДК 539.3 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 4

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ БАЛКИ*

П. Е. Товстик[1], *Т. П. Товстик*[2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
[2] Институт проблем машиноведения Российской Академии наук (ИПМаш РАН),
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

Предложен вывод уравнений свободных колебаний балки-полоски, изготовленной из анизотропного материала общего вида, основанный на асимптотическом разложении неизвестных функций по степеням малой относительной тонкостенности. Ранее вывод этих уравнений был основан на обобщенных гипотезах Тимошенко—Рейсснера. В рассматриваемой задаче поперечные и продольные колебания оказываются связанными между собой, однако эта связь является слабой. Поэтому в нулевом приближении рекомендуется игнорировать эту связь и рассматривать балку как изотропную с приведенным модулем Юнга, учитывающим анизотропию. Библиогр. 14 назв. Табл. 1.

Ключевые слова: балка, свободные колебания, анизотропия.

1. Введение. Выводу двухмерных приближенных моделей тонких пластин и оболочек из трехмерных уравнений теории упругости посвящены многочисленные исследования, из которых назовем монографии [1–4]. Для трансверсально-изотропного материала указанная задача рассмотрена в [5, 6]. В [1–3, 5, 6] рассмотрены частные случаи анизотропии, при которых срединная плоскость является плоскостью симметрии упругих свойств материала. Анизотропия общего вида (с 21 упругим модулем) возникает при армировании пластины нитями, расположенными под углом к поверхности пластины [7], а также имеет место в многослойных нанотрубках [9]. Показано [7, 8, 10], что использование как гипотез Кирхгофа—Лява, так и гипотез Тимошенко—Рейсснера в случае анизотропии общего вида не приводит к корректным уравнениям изгиба и поперечных колебаний в сравнении с асимптотическим решением трехмерных уравнений и предложена обобщенная гипотеза Тимошенко—Рейсснера. С применением этой гипотезы были выведены и исследованы двухмерные уравнения анизотропных оболочек [11, 12].

Ниже предложен другой вывод системы одномерных уравнений, описывающих малые свободные колебания анизотропной балки-полоски, из уравнений плоской задачи теории упругости. Этот метод (в отличие от применявшегося ранее метода гипотез) основан на асимптотическом разложении по степеням малого параметра относительной тонкостенности. Построено два первых приближения, которые уточняют уравнения, получающиеся при использовании метода гипотез, а также позволяют оценить их асимптотическую погрешность. Уравнения колебаний балки в случае анизотропии общего вида не распадаются на уравнения продольных и поперечных колебаний. Для двух вариантов граничных условий исследованы особенности спектра частот свободных колебаний балки, связанные с ее анизотропией.

2. Уравнения равновесия и соотношения упругости. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях балки-полоски $0 \le x \le L,\ -h/2 \le z \le h/2$ из анизотропного материала общего вида. Лицевые плоскости $z = \pm h/2$ считаем свободными, а на концах $x = 0$ и $x = L$ рассматриваем различные варианты граничных условий.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13.01.00523а).

Уравнения равновесия и соотношения упругости после отделения зависящего от времени t множителя $e^{i\omega t}$ (ω — частота колебаний) принимают вид

$$\frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\,\sigma_{13}}{\partial z}+\rho\omega^2 u=0, \qquad \frac{\partial\,\sigma_{13}}{\partial x}+\frac{\partial\,\sigma_{33}}{\partial z}+\rho\omega^2 w=0; \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}&=E_{11}\varepsilon_{11}+H_1\varepsilon_{13}+E_{13}\varepsilon_{33},\\ \sigma_{13}&=H_1\varepsilon_{11}+G_{13}\varepsilon_{13}+H_3\varepsilon_{33},\\ \sigma_{33}&=E_{13}\varepsilon_{11}+H_3\varepsilon_{13}+E_{33}\varepsilon_{33}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{13}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_{33}=\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{2.3}$$

где $u(x,z)$, $w(x,z)$ — проекции перемещения, $\sigma_{jk}(x,z)$, $\varepsilon_{jk}(x,z)$ — напряжения и деформации,

$$E_{11},\ E_{13},\ E_{33},\ G_{13},\ H_1,\ H_3 \tag{2.4}$$

— модули упругости, причем для ортотропного материала $H_1=H_3=0$. Предполагается, что плотность упругой энергии

$$2\Pi=E_{11}\varepsilon_{11}^2+G_{13}\varepsilon_{13}^2+E_{33}\varepsilon_{33}^2+2E_{13}\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}+2H_1\varepsilon_{11}\varepsilon_{13}+2H_3\varepsilon_{13}\varepsilon_{33} \tag{2.5}$$

является положительно определенной.

Граничные условия на лицевых поверхностях имеют вид

$$\sigma_{13}=\sigma_{33}=0 \quad \text{при} \quad z=\pm h/2. \tag{2.6}$$

3. Система уравнений свободных колебаний балки, полученная методом гипотез. В [8] для вывода одномерных уравнений равновесия и колебаний балки были приняты гипотезы о равенстве нулю нормальных напряжений,

$$\sigma_{33}=0, \tag{3.1}$$

и о распределении деформаций поперечного сдвига

$$\varepsilon_{13}=\gamma_0+\gamma_1\frac{z}{h}+\gamma_2\left(\frac{z^2}{h^2}-\frac{1}{12}\right), \tag{3.2}$$

где γ_0 — средний угол сдвига, а коэффициенты γ_1 и γ_2 подбираются таким образом, чтобы граничные условия (2.6) были выполнены. Также было принято, что $w(x,z)\approx w_0(x)$.

Исключая деформацию ε_{33} из соотношений (2.2), получаем

$$\sigma_{11}=E_{11}^*\varepsilon_{11}+H_1^*\varepsilon_{13}, \qquad \sigma_{13}=H_1^*\varepsilon_{11}+G_{13}^*\varepsilon_{13}, \tag{3.3}$$

где

$$E_{11}^*=E_{11}-\frac{E_{13}^2}{E_{33}}, \quad H_1^*=H_1-\frac{E_{13}H_3}{E_{33}}, \quad G_{13}^*=G_{13}-\frac{H_3^2}{E_{33}}. \tag{3.4}$$

Выбирая постоянные интегрирования по z таким образом, чтобы $u_0(x)$ и $w_0(x)$ были равны средним по сечению тангенциальным и нормальным перемещениям, находим

$$
\begin{aligned}
&u(x,z) = u_0(x) + \gamma_0(x)z + \gamma_1(x)h\left(\frac{z^2}{2h^2} - \frac{1}{24}\right) + \gamma_2(x)\left(\frac{z^3}{3h^2} - \frac{z}{12}\right) - z\frac{dw_0}{dx},\\
&\varepsilon_{11} = \frac{du_0}{dx} + \frac{d\gamma_0}{dx}z + \frac{d\gamma_1}{dx}h\left(\frac{z^2}{2h^2} - \frac{1}{24}\right) + \frac{d\gamma_2}{dx}\left(\frac{z^3}{3h^2} - \frac{z}{12}\right) - z\frac{d^2w_0}{dx^2},\\
&\sigma_{11} = E_{11}^*\varepsilon_{11} + H_1^*\varepsilon_{13}, \qquad \sigma_{13} = H_1^*\varepsilon_{11} + G_{13}^*\varepsilon_{13}.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Теперь условия (2.6) дают

$$
H_1^*\frac{d\varphi}{dx} + G_{13}^*\frac{\gamma_1}{h} = 0, \quad H_1^*\frac{du_0}{dx} + G_{13}^*\left(\gamma_0 + \frac{\gamma_2}{6}\right) = 0, \quad \varphi = \gamma_0 - \frac{dw_0}{dx}. \tag{3.6}
$$

Во втором соотношении (3.6) малое слагаемое $(H_1^*h/12)\,(d\gamma_1/dx)$ опущено.

Интегрирование по толщине уравнений (2.1), а также интегрирование первого уравнения (2.1), умноженного на z, дает систему уравнений колебаний балки

$$
\begin{aligned}
&\frac{dP_1}{dx} + \rho h\omega^2 u_0 = 0, \quad \frac{dQ_1}{dx} + \rho h\omega^2 w_0 = 0,\\
&\frac{dM_1}{dx} - Q_1 + J\omega^2\left(\varphi - \frac{\gamma_2}{30}\right) = 0, \quad J = \frac{\rho h^3}{12},
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

где введены продольное усилие $P_1(x)$, перерезывающее усилие $Q_1(x)$ и изгибающий момент $M_1(x)$, вычисляемые по формулам

$$
\begin{aligned}
&P_1 = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{11}dz = E_{11}^*h\frac{du_0}{dx} + H_1^*h\gamma_0, \quad Q_1 = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{13}dz = H_1^*h\frac{du_0}{dx} + G_{13}^*h\gamma_0,\\
&M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{11}dz = \frac{E_{11}^*h^3}{12}\left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{1}{30}\frac{d\gamma_2}{dx}\right) + \frac{H_1^*h^3\gamma_1}{12}.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

После преобразований система уравнений (3.7) записывается в виде [8]

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2u_0}{dx^2} = -\frac{\rho\omega^2}{E_{11}^{**}}\left(u_0 - \frac{H_1^*}{G_{13}^*}w_0)\right), \quad \frac{d\gamma_0}{dx} = -\frac{\rho\omega^2}{E_{11}^{**}G_{13}^*}(E_{11}^*w_0 - H_1^*u_0),\\
&-\frac{E_{11}^{**}h^3}{12}\frac{d^4w_0}{dx^4} + \rho h\omega^2 w_0 - J\omega^2\left(\left(1 + \frac{E_{11}^*}{kG_{13}^*}\right)\frac{d^2w_0}{dx^2} + \frac{\rho\omega^2 w_0}{kG_{13}^*}\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

где

$$
k = \frac{5}{6}, \quad E_{11}^{**} = E_{11}^* - \frac{(H_1^*)^2}{G_{13}^*}. \tag{3.10}
$$

Возможные варианты граничных условий следуют из таблицы:

$$
\begin{array}{lll}
u_0 = 0 & \text{или} & P_1 = 0,\\
w_0 = 0 & \text{или} & Q_1 = 0,\\
\varphi = 0 & \text{или} & M_1 = 0,
\end{array}
\tag{3.11}
$$

в которой слева стоят условия заделки, а справа — условия свободного края.

Второе уравнение (3.9) для угла сдвига γ_0 включено в систему (3.9) в связи с тем, что в силу (3.8) от угла сдвига зависят величины P_1 и Q_1, входящие в граничные условия (3.11).

Ниже дается другой вывод одномерной системы уравнений малых свободных колебаний анизотропной балки.

4. Преобразование системы уравнений. Построим решение системы уравнений (2.1)–(2.3) свободных колебаний, не прибегая к гипотезам о распределении перемещений и напряжений по толщине балки. Для построения приближенного решения используется метод асимптотического интегрирования [6, 8, 13, 14], основанный на предположении о малости толщины по отношению к длине волны продольной деформации.

Перейдем к безразмерным координатам по формулам

$$\{z,\, u,\, w\} = h\{\hat{z},\, \hat{u},\, \hat{w}\}, \quad \{\sigma_{ij},\, E_{ij},\, G_{13},\, H_i\} = E\{\hat{\sigma}_{ij},\, \hat{E}_{ij},\, \hat{G}_{13},\, \hat{H}_i\}, \quad \lambda = \frac{L^2\rho\omega^2}{E}, \tag{4.1}$$

где E — характерное значение модулей упругости, λ — искомый параметр частоты. Далее значок «$\hat{\ }$» опускаем. Тогда система уравнений (2.1)–(2.3) запишется в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial z} = \mu\varepsilon_{33}, && \frac{\partial u}{\partial z} = \mu(-\partial_x w + \varepsilon_{13}), \\ &\frac{\partial\,\sigma_{13}}{\partial z} = -\mu\left(\partial_x\sigma_{11} + \lambda u\right), && \frac{\partial\,\sigma_{33}}{\partial z} = -\mu\left(\partial_x\sigma_{13} + \rho\omega^2 w\right), \end{aligned} \tag{4.2}$$

где

$$\mu = \frac{h}{L}, \qquad \partial_x(\ ) \equiv \frac{\partial(\ )}{\partial x}.$$

Основными неизвестными в системе (4.2) являются функции w, u, σ_{13}, σ_{33}. С учетом формул (2.2) выразим правые части системы (4.2) через основные неизвестные. Тогда получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial z} = \mu\left(c_1\partial_x u + K_1\sigma_{13} + K_2\sigma_{33}\right), \\ &\frac{\partial u}{\partial z} = \mu\left(-\partial_x w + c_2\partial_x u + K_3\sigma_{13} + K_1\sigma_{33}\right), \\ &\frac{\partial\,\sigma_{13}}{\partial z} = -\mu\left(E_{11}^{**}\partial_x^2 u - c_2\partial_x\sigma_{13} - c_1\partial_x\sigma_{33} + \lambda u\right) = X_3, \\ &\frac{\partial\,\sigma_{33}}{\partial z} = -\mu\left(\partial_x\sigma_{13} + \lambda w\right) = X_4, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где E_{11}^{**} то же, что и в (3.10),

$$\begin{aligned} &c_1 = \frac{H_1H_3 - E_{13}G_{13}}{\Delta}, \qquad c_2 = \frac{E_{13}H_3 - E_{33}H_1}{\Delta}, \\ &K_1 = -\frac{H_3}{\Delta}, \quad K_2 = \frac{G_{13}}{\Delta}, \quad K_3 = \frac{E_{33}}{\Delta}, \quad \Delta = G_{13}E_{33} - H_3^2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Система (4.3) интегрируется по z методом итераций. При интегрировании первых двух уравнений появляются произвольные функции $w_0(x)$ и $u_0(x)$ переменной x, которые затем находятся из условий совместности третьего и четвертого уравнений (4.3),

$$\langle X_3 \rangle = 0, \quad \langle X_4 \rangle = 0, \qquad \langle X \rangle \equiv \int_{-1/2}^{1/2} X dz, \tag{4.5}$$

следующих из граничных условий $\sigma_{13} = \sigma_{33} = 0$ при $z = \pm 1/2$.

Предполагаем, что все упругие модули имеют один асимптотический порядок. Тогда коэффициенты E_{11}^{**}, c_i, K_j в системе (4.3) имеют порядок единицы. При построении нулевого приближения берем только главные слагаемые правых частей, а при построении первого — слагаемые следующего порядка малости. При этом учитываем порядки основных неизвестных:

$$w \sim 1, \quad u \sim \mu, \quad \sigma_{13} \sim \mu^2, \quad \sigma_{33} \sim \mu^3. \tag{4.6}$$

Находим в нулевом приближении $w = w_0(x)$, $u = u_0(x) - \mu z\, \partial_x w_0(x)$. Условие совместности третьего уравнения (4.3)

$$E_{11}^{**} \partial_x^2 u_0 + \lambda u_0 = 0. \tag{4.7}$$

Далее

$$\sigma_{13} = \mu^2 \frac{4z^2 - 1}{8} (E_{11}^{**} \partial_x^3 w_0 + \lambda\, \partial_x w_0).$$

Условие совместности четвертого уравнения (4.3)

$$-\frac{\mu^2 E_{11}^{**}}{12} \partial_x^4 w_0 + \lambda w_0 - \frac{\mu^2 \lambda}{12} \partial_x^2 w_0 = 0. \tag{4.8}$$

Теперь находим

$$\sigma_{33} = \mu\lambda \frac{z(4z^2 - 1)}{2} w_0. \tag{4.9}$$

Уравнения (4.7) и (4.8) образуют нулевое приближение, причем продольные и поперечные колебания разделяются. Несмотря на анизотропию, эти уравнения содержат только один эквивалентный модуль упругости E_{11}^{**}. В уравнение (4.8) оказались включенными силы инерции вращательного движения поперечных волокон, которые имеют меньший порядок малости по μ по сравнению с другими слагаемыми. В главных членах уравнение (4.8) совпадает с третьим уравнением (3.9), полученным методом гипотез. Первое уравнение (3.9) по сравнению с уравнением (4.7) содержит дополнительное слагаемое, в результате чего продольные и поперечные колебания связаны.

5. Построение первого приближения. Первые два уравнения (4.3) дают

$$\begin{aligned} w =& w_0 + \mu c_1 z \partial_x u_0 - \mu^2 c_1 \frac{z^2}{2} \partial_x^2 w_0, \\ u =& u_0 + \mu c_2 z \partial_x u_0 + \mu^2 (c_1 + c_2^2) \frac{z^2}{2} \partial_x^2 u_0 - \\ & - \mu z \partial_x w_0 + \mu^3 c_1 \frac{z^3}{6} \partial_x^3 w_0 + K_3 \mu^3 \frac{4z^3 - 3z}{24} (E_{11}^{**} \partial_x^3 w_0 + \lambda\, \partial_x w_0). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Условие совместности третьего уравнения (4.3) дает

$$E_{11}^{**} \partial_x^2 u_0 + \lambda (u_0 + c_2 w_0) = 0. \tag{5.2}$$

Находим напряжение сдвига σ_{13} и условие совместности четвертого уравнения (4.3):

$$\sigma_{13} = \int_{-1/2}^{z} X_3 dz, \quad \int_{-1/2}^{1/2} (\lambda w - \partial_x X_3 z) dz = 0. \tag{5.3}$$

После упрощений вычисления дают

$$-\frac{\mu^2 E_{11}^{**}}{12} \partial_x^4 w_0 + \lambda w_0 - \lambda \mu^2 \partial_x^2 w_0 \left(\frac{1 + c_2^2}{12} + \frac{K_3 E_{11}^{**}}{10} - \frac{c_1}{24} \right) = 0. \tag{5.4}$$

Если считать $\lambda \sim \mu^2$, $\partial_x \sim 1$ (последняя оценка означает, что функция $w_0(x)$ не меняет своего асимптотического порядка при дифференцировании), то в уравнении (5.4) сохранены все слагаемые порядка μ^2 и μ^4 и опущены слагаемые меньшего порядка.

Как и уравнения (3.9), полученные методом гипотез, уравнения (5.2) и (5.4) описывают продольные и поперечные колебания балки. С учетом обозначений (3.4) и (4.4) уравнение (5.2) совпадает с первым уравнением (3.9), а уравнение (5.4) отличается от третьего уравнения (3.9) малыми слагаемыми.

Предложенный здесь асимптотический вывод уравнений в нулевом приближении сразу дает искомую систему уравнений, в то время как метод гипотез приводит к более сложной системе, которую еще нужно упрощать.

В работах [6, 8] исследуется дисперсионное уравнение для бесконечно длинной балки, а ниже рассмотрены колебания балки конечной длины.

6. Уравнения свободных колебаний. При переходе к безразмерным координатам по формулам (4.1) модуль упругости E не был зафиксирован. Положим $E = E_{11}^{**}$. Тогда уравнения (5.2) и (5.4) запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 u_0}{dx^2} + \lambda(u_0 + c_2 w_0) = 0, && \lambda = \frac{L^2 \rho \omega^2}{E_{11}^{**}}, \\ &-\frac{\mu^2}{12} \frac{d^4 w_0}{dx^4} + \lambda \left(w_0 - \mu^2 c \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) = 0, && c = \frac{1 + c_2^2}{12} + \frac{K_3 E_{11}^{**}}{10} - \frac{c_1}{24}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Располагая найденным выше распределением неизвестных функций по толщине балки, запишем выражения для граничных значений более точные, чем (3.11), при этом используем средние по толщине значения соответствующих функций:

— для жестко закрепленного края

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= u_0 + \frac{\mu^2 (c_1 + c_2^2)}{24} \frac{d^2 u_0}{dx^2} = 0, \\ \langle w \rangle &= w_0 - \frac{\mu^2 c_1}{24} \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0, \\ \langle z\, u \rangle &= -\frac{\mu}{12} \left(\frac{dw_0}{dx} - c_2 \frac{du_0}{dx} + \mu^2 \frac{4K_3 - c_1}{40} \frac{d^3 w_0}{dx^3} \right) = 0; \end{aligned} \tag{6.2}$$

— и для свободного края

$$\langle\sigma_{11}\rangle = \frac{du_0}{dx} + \mu^2\left(\frac{(c_1+c_2^2)}{24}\frac{d^3u_0}{dx^3} + \frac{c_2}{12}\frac{d^3w_0}{dx^3}\right) = 0,$$

$$\langle\sigma_{13}\rangle = -\frac{\mu^2}{12}\left(\frac{\partial^3 w_0}{dx^3} + \lambda\left(1 + c_2^2 + \frac{6K_3E_{11}^{**}}{5}\right)\frac{dw_0}{dx}\right) = 0, \tag{6.3}$$

$$\langle z\,\sigma_{11}\rangle = -\frac{\mu}{12}\left(\frac{d^2w_0}{dx^2} - c_2\frac{d^2u_0}{dx^2} + \mu^2\frac{4K_3 - c_1}{40}\frac{\partial^4 w_0}{dx^4} - \frac{\lambda c_1}{5}w_0\right) = 0.$$

В выражениях (6.2) и (6.3) удержаны главные слагаемые и слагаемые порядка μ^2 по сравнению с ними.

Перемещения u_0 и w_0 связаны друг с другом в уравнениях (6.1) и в граничных условиях (6.2), (6.3) только через коэффициент c_2, который отличен от нуля только в случае анизотропии общего вида. Для изотропного или ортотропного материала $H_1 = H_3 = 0$ и в силу формулы (4.4) $c_2 = 0$.

7. Решение краевых задач. Найдем частоты и формы колебаний для ряда вариантов граничных условий при $x = 0$ и $x = 1$. Рассмотрим балку из анизотропного материала, получающегося при армировании изотропной матрицы с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν малорастяжимыми волокнами, наклоненными под углом α к оси x. Модули упругости в обозначениях (2.2) имеют вид [8]

$$\begin{aligned}
&E_{11} = \frac{E(1-\delta)}{1-\nu^2} + E_n\delta\cos^4\alpha, && E_{13} = \frac{E\nu(1-\delta)}{1-\nu^2} + E_n\delta\sin^2\alpha\cos^2\alpha,\\
&E_{33} = \frac{E(1-\delta)}{1-\nu^2} + E_n\delta\sin^4\alpha, && G_{13} = \frac{E(1-\delta)}{2(1+\nu)} + E_n\delta\sin^2\alpha\cos^2\alpha,\\
&H_1 = E_n\delta\sin^3\alpha\cos\alpha, && H_3 = E_n\delta\sin\alpha\cos^3\alpha,
\end{aligned} \tag{7.1}$$

где E_n — модуль Юнга волокон, δ — доля объема материала, занятого волокнами. В качестве примера возьмем

$$E = 1, \quad \nu = 0.3, \quad E_n = 100, \quad \delta = 0.1, \quad \alpha = \pi/4. \tag{7.2}$$

Формулы (7.1), (7.2) описывают анизотропный однородный по толщине материал. Для него $E_{11} = E_{33} = 3.489$, $E_{13} = 2.797$, $G_{13} = 2.846$, $H_1 = H_3 = 2.5$, $c_1 = -0.811$, $c_2 = -0.821, K_3 = 1.655$, $c = 0.781$.

Шарнирно опертые края. Пусть

$$u = w = M_1 = 0 \quad \text{или} \quad \langle u\rangle = \langle w\rangle = \langle z\,\sigma_{11}\rangle = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ x = 1. \tag{7.3}$$

Тогда функции $u_0(x) = U\sin p_n x$, $w_0(x) = W\sin p_n x$, $p_n = n\pi$ удовлетворяют уравнениям (6.1) и граничным условиям (7.3). При этом имеем спектр продольных колебаний

$$U \neq 0, \quad W = 0, \quad \lambda_n^{(u)} = p_n^2,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{7.4}$$

и низкочастотный спектр поперечных колебаний с малой продольной составляющей

$$W \neq 0, \quad U = \frac{\lambda_n^{(w)} c_2 W}{\lambda_n^{(u)} - \lambda_n^{(w)}}, \quad \lambda_n^{(w)} = \frac{\mu^2 p_n^4}{12(1+\mu^2 c p_n^2)}. \tag{7.5}$$

С ростом n растет и амплитуда U. При $\lambda_n^{(u)} \approx \lambda_n^{(w)}$ имеет место внутренний резонанс, заключающийся в сближении частот продольных и поперечных колебаний. Однако, как показали расчеты, для граничных условий (7.3) внутренний резонанс не возбуждается и при $\mu = 0.1$ для всех n будет $|U| \le 0.1W$. Впрочем, оправданным является лишь рассмотрение тех n, для которых $\mu p_n \ll 1$, ибо в противном случае длина продольной волны будет соизмерима с толщиной балки или меньше нее.

Шарнирно опертые края, свободные в продольном направлении. Пусть заданы граничные условия

$$P_1 = w = M_1 = 0 \quad \text{или} \quad \langle \sigma_{11} \rangle = \langle w \rangle = \langle z\, \sigma_{11} \rangle = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 1/2. \tag{7.6}$$

Задача имеет тривиальное решение $\lambda = 0,\ u_0 = C,\ w_0 = 0$ и серию четных и нечетных решений. Построим четные решения задачи (6.1), (7.6) с сохранением всех явно выписанных малых слагаемых (нечетные строятся аналогично). Для заданного λ ищем решение в виде

$$\begin{gathered} w_0 = C_1 \cos px + C_2 \cosh \hat{p}x, \quad u_0 = D_1 \cos px + D_2 \cosh \hat{p}x + D_3 \cos(\sqrt{\lambda}x), \\ \lambda = \frac{\mu^2 p^4}{12(1 + \mu^2 c\, p^2)} = \frac{\mu^2 \hat{p}^4}{12(1 - \mu^2 c\, \hat{p}^2)}, \quad D_1 = \frac{\lambda c_2 C_1}{p^2 - \lambda}, \quad D_2 = -\frac{\lambda c_2 C_2}{\hat{p}^2 + \lambda}. \end{gathered} \tag{7.7}$$

Граничные условия (7.6) дают систему однородных уравнений относительно постоянных C_1, C_2, D_3 с определителем $\Delta_3(\lambda)$. Уравнение

$$\Delta_3(\lambda) = 0 \tag{7.8}$$

служит для вычисления собственных значений λ.

Значения частотного параметра λ и параметры формы

n	λ^{as}	δ	λ_b^{TR}	λ_c^{TR}
1	0.00505	0.002	0.00507	4596
3	0.394	0.007	0.408	4622
5	2.831	0.022	3.116	4673
7	9.85	0.042	11.79	4745
9	23.95	0.104	32.64	4832
1	39.54	35.5	–	–
11	46.82	0.352	74.22	4926

Для приведенных выше параметров упругости пластины и относительной толщины $\mu = 0.025$ в таблице приведены первые 7 значений параметра частоты λ с четными формами прогиба, вычисленные по различным моделям. Через λ^{as} обозначены значения, найденные из уравнения (7.8), а через $\delta = \max u / \max w$ обозначено отношение продольного и поперечного перемещений. Видим, что продольные перемещения малы по сравнению с поперечными. Исключением является случай с $\lambda^{as} = 39.54$, который соответствует преимущественно продольным колебаниям. Параметр $\lambda = 4\pi^2 = 39.48$ определяет частоту продольных колебаний, если пренебречь взаимодействием продольных и поперечных колебаний. Через λ_b^{TR} и λ_c^{TR} обозначены параметры частоты, найденные из третьего уравнения (3.9), которое в наших обозначениях дает квадратное уравнение для λ:

$$-\frac{\mu^2 (n\pi)^4}{12} + \lambda \left(1 + \mu^2 (n\pi)^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{E_{11}^*}{10 G_{13}^*}\right)\right) - \frac{\lambda^2 E_{11}^{**}}{10 G_{13}^*} = 0. \tag{7.9}$$

Это уравнение дает низкочастотную серию изгибных колебаний λ_b^{TR} и высокочастотную серию λ_c^{TR}, описывающую вращательное движение поперечных сечений. Видим хорошее совпадение первых значений λ^{as} и λ_b^{TR}. С ростом n различие между этими величинами растет. Предложенная асимптотическая модель (6.1) высокочастотное вращательное движение с параметром λ_c^{TR} не описывает. Отметим, что значения λ_c^{TR} слабо зависят от номера n.

8. Обсуждение. Построена двухмерная модель для описания свободных колебаний анизотропной балки конечной длины. Продольные и поперечные колебания связаны между собой как через уравнения движения, так и через граничные условия. Однако эта связь оказывается слабой, ибо для низкочастотной серии поперечные перемещения значительно превосходят продольные. Основной вывод состоит в том, что приближенно можно рассматривать отдельно поперечные и продольные колебания, игнорируя связь между ними. При этом анизотропную балку можно рассматривать как изотропную с приведенным модулем Юнга E_{11}^{**}.

Область применимости указанной рекомендации имеет два ограничения. Во-первых, модули упругости не должны сильно различаться, в частности, эквивалентный модуль сдвига в поперечном направлении G_{13}^{*} не может быть малым. Во-вторых, не описываются высокочастотные колебания, при которых появляется вторая серия частот, связанная с вращательным движением поперечных волокон. Модель анизотропной балки типа Тимошенко—Рейсснера свободна от этих ограничений.

Литература

1. *Доннелл Л. Г.* Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 567 с.

2. *Родионова В. А., Титаев Б. Ф., Черных К. Ф.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1996. 278 с.

3. *Аголовян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.

4. *Reddy J. N.* Mechanics of laminated composite plates and shells. CRC Press, 2004. 831 p.

5. *Товстик П. Е.* Об асимптотическом характере приближенных моделей балок, пластин и оболочек // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. № 3. С. 49–54.

6. *Tovstik P. E., Tovstik T. P.* On the 2D models of plates and shells including the transversal shear // ZAMM, 2007. Vol. 87(2). P. 160–171.

7. *Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Двухмерные модели пластин из анизотропного материала // Тр. семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». Вып. 3. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2008. С. 4–16.

8. *Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Одномерные модели балки из анизотропного материала в случае косой анизотропии // МТТ, 2011. № 6. С. 93–103.

9. *Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С.* К описанию многослойных нанотрубок в рамках моделей цилиндрически анизотропной упругости // Физическая мезомеханика. 2009. Т. 12, № 5. С. 5–14.

10. *Товстик П. Е.* Двухмерные модели пластин из анизотропного материала // ДАН, 2009. Т. 425, № 4. С. 487–491.

11. *Tovstik P. E., Tovstik T. P.* Two-dimensional linear model of elastic shell accounting for general anisotropy of material // Acta Mechanica. 2014. Vol. 225(3). P. 647–661.

12. *Tovstik P. E., Tovstik T. P.* Two-dimensional linear model of anisotropic shells // SSTA. 2013. Gdansk. Vol. 3. P. 153–156.

13. *Vetukov Y., Kuzin A., Krommer M.* Asymptotic splitting of the three-dimensional problem of elasticity for non-homogeneous piezoelectric plates // Int. J. of Solids and Structures, 2011. Vol. 40. P. 12–23.

14. *Schnieder P., Kienzler R.* An algorithm for the automatisation of pseudo reductions of PDE systems arising from the uniform-approximation technique // Shell-like structures. Non-classical theories and applications. Berlin: Springer, 2011. P. 377–390.

Статья поступила в редакцию 26 июня 2014 г.

Сведения об авторах

Товстик Петр Евгеньевич — профессор; peter.tovstik@mail.ru

Товстик Татьяна Петровна — старший научный сотрудник; tovstik_t@mail.ru

FREE VIBRATIONS OF ANISOTROPIC BEAM

Petr E. Tovstik[1], *Tatiana P. Tovstik*[2]

[1] St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; peter.tovstik@mail.ru

[2] Institute of Mekhanical Engineering RAS, Bolshoy pr. V. O., 61, St. Petersburg, 199178, Russian Federation; tovstik_t@mail.ru

Thin elastic homogeneous beam made of a material of general anisotropy is studied. Earlier to deliver 1D equations of motion the generalized Timoshenko—Reissner hypotheses are used. In this paper the 1D equations and the corresponding boundary conditions of anisotropic beam free vibrations are obtained by the asymptotic expansion of unknowns in series in powers of the relative beam thickness. The zeroes and the first approximations are constructed. The transversal and the longitudinal vibrations are connected, but for the low-frequency vibrations this connection is weak. It is recommended to ignore in a zeroes approximation this connection and to study the transversal and the longitudinal vibrations separately as for an isotropic Bernoulli—Euler beam with the modified Young module which takes anisotropy into account. Refs 14. Tables 1.

Keywords: beam, free vibrations, general anisotropy.