УДК 531.01 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 4

О СВЯЗИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ С НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИКОЙ

М. П. Юшков[1], *С. А. Зегжда*[1], *Ш. Х. Солтаханов*[2], *А. А. Пашкина*[1]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
[2] Чеченский государственный университет,
Российская Федерация, 364051, Грозный, ул. А. Шерипова, 32

Рассматривается переход механической системы за заданное время из одного состояния, в котором заданы обобщенные координаты и скорости, в другое состояние, в котором система должна иметь требуемые координаты и скорости. Предполагается, что этот переход может быть обеспечен одной управляющей силой. Показывается, что если находить эту силу с помощью принципа максимума Понтрягина из условия минимальности интеграла по времени от её квадрата за время движения, то при найденном движении выполняется неголономная связь высокого порядка.

Следовательно, для решения этой же задачи может быть использована теория движения неголономных систем со связями высокого порядка. Согласно этой теории оптимальным на множестве различных движений со связью того же самого порядка является движение, при котором выполняется обобщенный принцип Гаусса. Таким образом, из множества сил, при которых возможен переход механической системы за заданное время из одного состояния в другое, управляющая сила может быть выбрана как на основе принципа максимума Понтрягина, так и на основе обобщенного принципа Гаусса. Основное внимание уделяется сравнению результатов, получаемых этими двумя методами. Данный материал иллюстрируется на примере горизонтального движения тележки с маятниками, к которой приложена искомая сила. Для получения управляющей силы, не имеющей скачков в начале и конце движения, формулируется расширенная краевая задача, в которой в начальный и конечный моменты времени заданными являются не только координаты и скорости, но и производные от координат по времени до порядка $n \geqslant 2$. Эта расширенная краевая задача с помощью принципа максимума Понтрягина решена быть не может, так как при этом число произвольных постоянных будет меньше общего числа сформулированных краевых условий. В то же время с помощью обобщенного принципа Гаусса задача решается, так как в этом случае требуется лишь увеличить порядок принципа до значения, согласованного с числом заданных краевых условий.

Приводятся результаты численных расчетов.

Ключевые слова: теория управления, неголономная механика, связи высокого порядка, обобщенный принцип Гаусса, обобщенный принцип Гамильтона—Остроградского.

1. Введение. Одной из важнейших задач теории управления является отыскание управляющей силы, переводящей за заданное время систему из одного фазового состояния, в котором известны обобщенные координаты и скорости системы, в другое заданное фазовое состояние, в котором система должна иметь требуемые координаты и скорости. Обычно подобные задачи решаются с помощью применения принципа максимума Понтрягина [1, 2].

В предлагаемой статье показывается, что при применении данного принципа в процессе движения системы выполняется неголономная связь высокого порядка. Но тогда для решения этой же задачи целесообразно применить теорию движения неголономных систем со связями высокого порядка, развитую в монографии [3]. Особую роль играет при этом возможность использования обобщенного принципа Гаусса, изложенного в статье [4]. Сравнению результатов, получаемых на основе применения обобщенного принципа Гаусса и принципа максимума Понтрягина, и посвящена данная работа. Материал иллюстрируется на примере управляемого горизонтального движения тележки с маятниками, к которой приложена искомая сила. Для получе-

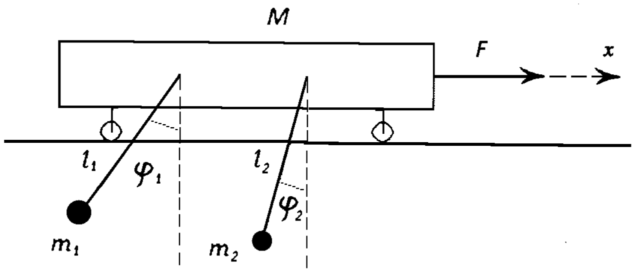

Рис. 1. Тележка с двумя маятниками.

ния управляющей силы, не имеющей скачков в начале и конце движения, формулируется расширенная краевая задача, в которой в начальный и конечный моменты времени заданными являются не только координаты и скорости, но и производные от координат по времени до порядка $n \geqslant 2$. Отмечается, что поставленная расширенная краевая задача не может быть решена с помощью принципа максимума Понтрягина, так как в этом случае число произвольных постоянных будет меньше числа сформулированных краевых условий. В то же время с помощью обобщенного принципа Гаусса задача решается, так как в этом случае требуется лишь увеличить порядок используемого принципа до значения, согласованного с числом заданных краевых условий.

Приводятся результаты численных расчетов.

2. Постановка задачи. Для иллюстрации рассматриваемых теорий рассмотрим следующую конкретную задачу. Пусть на тележке подъемного крана, имеющей массу M и движущейся по горизонтальным рельсам вдоль оси x, укреплены два троса длиной l_1 и l_2, на которых подвешены грузы массой m_1 и m_2 соответственно (см. рис. 1). За фиксированное время $\widetilde{T}$ требуется выбором горизонтальной силы $F(t)$, приложенной к тележке, переместить висящие грузы на заданное расстояние a из состояния покоя снова в состояние покоя.

Уравнения движения рассматриваемой системы при малых колебаниях запишутся следующим образом (g — ускорение силы тяжести):

$$\begin{gathered}(M+m_1+m_2)\ddot{x} - m_1 l_1 \ddot{\varphi}_1 - m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 = F\,,\\ \ddot{x} - l_1\ddot{\varphi}_1 = g\varphi_1\,,\\ \ddot{x} - l_2\ddot{\varphi}_2 = g\varphi_2\,.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Для обеспечения прекращения колебаний при остановке системы и при наличии покоя системы в начальный момент управляющая сила должна быть такой, чтобы выполнялись следующие краевые условия:

$$\begin{gathered}\varphi_1(0) = \varphi_1(\widetilde{T}) = 0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_1(\widetilde{T}) = 0\,,\\ \varphi_2(0) = \varphi_2(\widetilde{T}) = 0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = \dot{\varphi}_2(\widetilde{T}) = 0\,,\\ x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(\widetilde{T}) = 0, \quad x(\widetilde{T}) = a\,.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Рассматриваемая механическая система имеет две ненулевые собственные частоты Ω_1 и Ω_2. Используя собственные формы колебаний, соответствующие этим частотам, введем главные безразмерные координаты x_1 и x_2, задавая их как линейную комбинацию углов φ_1 и φ_2 (этот довольно сложный переход подробно описан в статье Е. А. Шатрова «Использование главных координат в задаче о гашении колебаний тележки с двумя маятниками», помещенной в этом же номере журнала). Переходя к безразмерному времени $\tau = \Omega_1 t$ и вводя третью безразмерную главную координату x_0, пропорциональную перемещению центра масс рассматриваемой механической системы, в результате получим

$$\begin{gathered} x_0'' = u\,, \\ x_\sigma'' + \omega_\sigma^2\, x_\sigma = u\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь u — управление, пропорциональное силе F, штрихи соответствуют производным по безразмерному времени τ, $\omega_\sigma = \Omega_\sigma/\Omega_1$, а $s = 2$ в случае двух маятников. В дальнейшем для общности количество маятников, равное s, можно считать любым целым числом.

Решение задачи (2.1)–(2.2) линейно зависит от a, поэтому, не умаляя общности, можно принять, что

$$x_0(T) = 1\,, \quad \text{где} \quad T = \Omega_1\, \widetilde{T}\,.$$

Таким образом, граничные условия для системы (2.3) таковы:

$$\begin{gathered} x_0(0) = x_0'(0) = x_0'(T) = 0\,, \quad x_0(T) = 1\,, \\ x_\sigma(0) = x_\sigma'(0) = x_\sigma(T) = x_\sigma'(T) = 0\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,. \end{gathered} \tag{2.4}$$

3. Решение задачи с использованием принципа максимума Понтрягина. Для решения поставленной задачи (2.3)–(2.4) необходимо добавить еще одно условие. Оно должно выражать тот принцип, который положен в основу выбора силы $F(t)$ из всего множества сил, при которых рассматриваемая задача имеет решение. В монографии [1] при решении подобных задач выбор управления подчиняется условию минимальности функционала

$$J = \int_0^T u^2 dt\,. \tag{3.1}$$

В соответствии с принципом максимума Понтрягина управление u, входящее в систему (2.3), будет обеспечивать минимальность функционала (3.1) в том случае, когда оно найдено следующим образом.

Система (2.3) записывается в виде

$$q_k' = f_k(q, u)\,, \quad k = \overline{1, 2s+2}\,,$$

где

$$\begin{gathered} q_1 = x_0\,, \quad q_2 = x_0'\,, \quad q_{2\sigma+1} = x_\sigma\,, \quad q_{2\sigma+2} = x_\sigma'\,, \\ f_1 = q_2\,, \quad f_2 = u\,, \quad f_{2\sigma+1} = q_{2\sigma+2}\,, \quad f_{2\sigma+2} = u - \omega_\sigma^2\, q_{2\sigma+1}\,, \\ \sigma = \overline{1, s}\,. \end{gathered}$$

В рассмотрение вводятся присоединенные функции $p_k(\tau)$, $k = \overline{1, 2s+2}$, и функция Гамильтона—Понтрягина

$$H = -u^2 + \sum_{k=1}^{2s+2} p_k \, f_k \, (q, u) \, .$$

Переменные $p_k(\tau)$ подчиняются уравнениям

$$p_k' = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \, , \quad k = \overline{1, 2s+2} \, ,$$

а искомое управление $u(\tau)$ определяется из условия

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \, . \tag{3.2}$$

В рассматриваемом случае имеем

$$H = -u^2 + p_1 \, q_2 + p_2 \, u + \sum_{\sigma=1}^{s} p_{2\sigma+1} \, q_{2\sigma+2} + \sum_{\sigma=1}^{s} p_{2\sigma+2} \, (u - \omega_\sigma^2 \, q_{2\sigma+1}) \, , \tag{3.3}$$

$$p_1' = 0 \, , \quad p_2' = -p_1 \, , \quad p_{2\sigma+1}' = \omega_\sigma^2 \, p_{2\sigma+2} \, , \quad p_{2\sigma+2}' = -p_{2\sigma+1} \, , \quad \sigma = \overline{1, s} \, . \tag{3.4}$$

Из выражений (3.2) и (3.3) следует, что

$$u(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{s+1} p_{2n}(\tau) \, .$$

Функции $p_{2n}(\tau)$, $n = \overline{1, s+1}$, в соответствии с системой (3.4) удовлетворяют уравнениям

$$p_2'' = 0 \, , \quad p_{2\sigma+2}'' + \omega_\sigma^2 \, p_{2\sigma+2} = 0 \, , \quad \sigma = \overline{1, s} \, .$$

Таким образом, минимизация функционала (3.1) достигается при

$$u(\tau) = C_1 + C_2 \tau + \sum_{\sigma=1}^{s} (C_{2\sigma+1} \cos \omega_\sigma \tau + C_{2\sigma+2} \sin \omega_\sigma \tau) \, . \tag{3.5}$$

Здесь C_k, $k = \overline{1, 2s+2}$, — произвольные постоянные. Выбрав эти постоянные таким образом, чтобы удовлетворялись краевые условия (2.4), однозначно найдем искомое управление $u(\tau)$.

4. Связь решения, полученного с помощью принципа максимума Понтрягина, с неголономной задачей. Обсудим теперь решение, полученное с помощью принципа максимума Понтрягина, с новой, принципиально важной точки зрения.

Рассмотрим подробнее найденное управление (3.5). Как можно заметить, функция $u(\tau)$ есть общее решение уравнения

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_2^2 \right) \, \ldots \, \left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_s^2 \right) u = 0 \, . \tag{4.1}$$

Возвращаясь к размерным переменным и к случаю, когда $s=2$, получаем

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\Omega_1^2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}+\Omega_2^2\right)F=0\,.$$

Если подставить сюда выражение для F из первого уравнения первоначальной системы (2.1), то получим дифференциальное уравнение восьмого порядка относительно обобщенных координат x, φ_1 и φ_2

$$\begin{gathered}a_{8,x}\,\frac{d^8x}{dt^8}+a_{8,\varphi_1}\,\frac{d^8\varphi_1}{dt^8}+a_{8,\varphi_2}\,\frac{d^8\varphi_2}{dt^8}+a_{6,x}\,\frac{d^6x}{dt^6}+a_{6,\varphi_1}\,\frac{d^6\varphi_1}{dt^6}+a_{6,\varphi_2}\,\frac{d^6\varphi_2}{dt^6}+\\+a_{4,x}\,\frac{d^4x}{dt^4}+a_{4,\varphi_1}\,\frac{d^4\varphi_1}{dt^4}+a_{4,\varphi_2}\,\frac{d^4\varphi_2}{dt^4}=0\,.\end{gathered}\tag{4.2}$$

Здесь постоянные коэффициенты определяются параметрами механической системы по формулам:

$$\begin{gathered}a_{8,x}=M+m_1+m_2\,,\quad a_{8,\varphi_1}=-m_1\,l_1\,,\quad a_{8,\varphi_2}=-m_2\,l_2\,,\\ a_{6,x}=(\Omega_1^2+\Omega_2^2)(M+m_1+m_2)\,,\quad a_{6,\varphi_1}=-(\Omega_1^2+\Omega_2^2)\,m_1\,l_1\,,\quad a_{6,\varphi_2}=-(\Omega_1^2+\Omega_2^2)\,m_2\,l_2\,,\\ a_{4,x}=\Omega_1^2\,\Omega_2^2\,(M+m_1+m_2)\,,\quad a_{4,\varphi_1}=-\Omega_1^2\,\Omega_2^2\,m_1\,l_1\,,\quad a_{4,\varphi_2}=-\Omega_1^2\,\Omega_2^2\,m_2\,l_2\,.\end{gathered}$$

Отметим, что задав другое число s, получим соответственно вместо уравнения (4.2) уравнение порядка $2s+4$.

Таким образом, решению поставленной задачи с использованием принципа максимума Понтрягина соответствует решение некоторой неголономной задачи при наложении связи (4.2) восьмого порядка. Другими словами: если рассматриваемая механическая система движется под действием управления, найденного с помощью принципа максимума Понтрягина, то в процессе этого движения непрерывно выполняется неголономная связь восьмого порядка (4.2), а в общем случае — порядка $2s+4$.

Итак, решение краевой задачи (2.3), (2.4) при минимизации функционала (3.1) с помощью принципа максимума Понтрягина оказалось эквивалентным решению задачи о движении механической системы при наложении неголономной связи порядка $2s+4$. Поэтому представляется целесообразным попытаться решать эту же механическую задачу, опираясь на теорию движения неголономных систем со связями высокого порядка, развитую в монографии [3]. Согласно этой теории при наличии связи порядка $2s+4$ можно составить уравнение порядка $2s+2$ относительно реакции этой связи. Таким образом, если рассматривать связь (4.2) как некоторую программу движения, которую должна выполнять механическая система, то реакция этой связи оказывается управляющей силой, обеспечивающей выполнение заданной программы. Следовательно, дифференциальное уравнение порядка $2s+2$ относительно управления можно трактовать как дифференциальное уравнение относительно реакции связи. Но если мы начали пользоваться теорией движения неголономных систем со связями высокого порядка, то естественно вместо минимизации функционала (3.1) с помощью принципа максимума Понтрягина воспользоваться вариационным принципом, свойственным этой теории. Таковым принципом является обобщенный принцип Гаусса [4].

5. Решение задачи с использованием обобщенного принципа Гаусса. Система уравнений (2.3), как отмечается в работе [5], описывает управляемое движение той механической системы, которая имеет нулевую собственную частоту и s различных ненулевых собственных частот. Необходимо только, чтобы управляющей силой возбуждались все собственные формы колебаний. Это, конечно, достаточно широкий класс механических систем, в который как классический пример входит и тележка с маятниками. Система (2.3) записана в безразмерной форме, и потому имеет простой вид. Благодаря этой простоте выше на основе несложных выкладок было показано, что минимальность функционала (3.1) в соответствии с принципом максимума Понтрягина достигается при отыскании искомого управления в виде (3.5). Обобщенный принцип Гаусса, как и принцип максимума Понтрягина, никак, конечно, не связан с тем, в размерной или в безразмерной форме записаны уравнения движения и какие координаты используются — главные или обычные. Учитывая это, для простоты обобщенный принцип Гаусса сформулируем применительно к системе уравнений (2.3), полагая, что в ней берутся обычные производные по времени t.

Системе (2.3) в касательном пространстве соответствует одно векторное равенство [3]

$$\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}\,, \tag{5.1}$$

где

$$\mathbf{W} = \sum_{\alpha=0}^{s} \ddot{x}_\alpha\,\mathbf{i}_\sigma\,, \quad \mathbf{Y} = -\sum_{\sigma=1}^{s} \omega_\sigma^2\, x_\sigma\,\mathbf{i}_\sigma\,, \quad \mathbf{R} = \sum_{\alpha=0}^{s} u\,\mathbf{i}_\sigma\,.$$

Здесь $\mathbf{i}_\sigma$, $\sigma = \overline{1,s}$, — единичные векторы, являющиеся базисом касательного пространства.

Выше отмечалось, что управление u, удовлетворяющее уравнению (4.1), можно рассматривать как реакцию линейной неголономной связи порядка $2s+4$. Поэтому в векторном уравнении (5.1) вектор, соответствующий наличию управления u, обозначен буквой $\mathbf{R}$, которая используется обычно для обозначения вектора реакции связи. Согласно обобщенному принципу Гаусса порядка $2s+2$ линейная неголономная связь порядка $2s+4$ является идеальной, если минимальной оказывается величина [4]

$$\left(\overset{(2s+2)}{\mathbf{W}} - \overset{(2s+2)}{\mathbf{Y}}\right)^2 = \left(\overset{(2s+2)}{u} \sum_{\alpha=0}^{s} \mathbf{i}_\alpha\right)^2. \tag{5.2}$$

Здесь индекс $(2s+2)$ над буквами означает порядок производной по времени.

Из всех возможных линейных неголономных связей порядка $2s+4$ выделим такое подмножество, для всех элементов которого величина (5.2) равна своей нижней границе, равной нулю. Всем этим элементам соответствует то управление u, которое удовлетворяет уравнению

$$\overset{(2s+2)}{u} = 0\,.$$

Общее решение этого уравнения таково:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{2s+2} C_k t^{k-1}\,. \tag{5.3}$$

В отличие от управления $u(t)$, задаваемого формулой (3.5), управление, отыскиваемое в виде полинома (5.3), не будет иметь осцилляций, соответствующих собственным частотам системы. Найденная функция будет достаточно гладкой, в чем состоит ее несомненное достоинство.

6. Анализ численных результатов. На рисунках 2–3 графически представлены результаты двух расчетов, полученных по обоим методам. Рис. 2 соответствуют короткому времени движения, когда $T = T_2$, а рис. 3 — длительному движению, когда $T = 16\,T_2$. Помимо этого принималось, что $T_2 = 0.5\,T_1$ и учитывалось, что $\omega_1 = 1$. Решения, полученные с помощью принципа максимума Понтрягина, изображены пунктирными кривыми, а решениям, полученным с привлечением обобщенного принципа Гаусса, соответствуют сплошные линии.

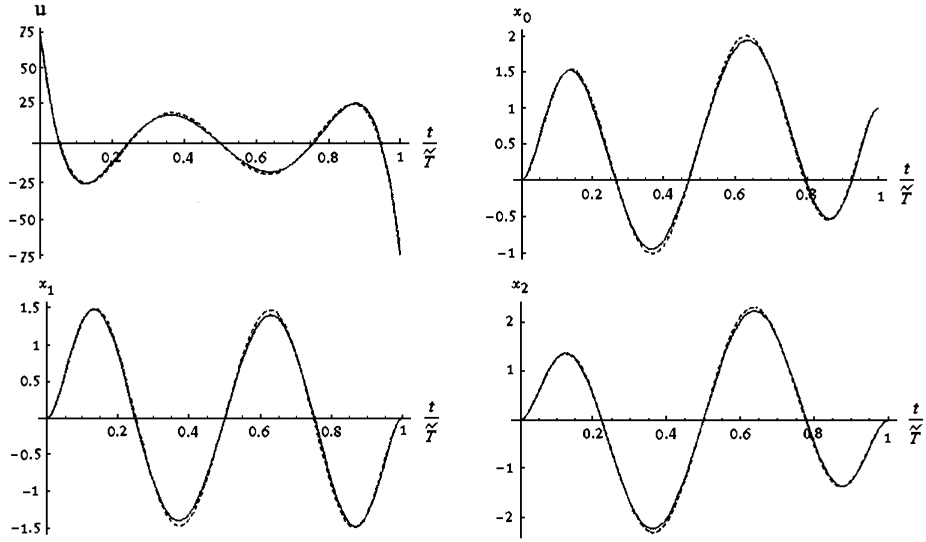

Рис. 2. Кратковременное движение механической системы: $T = T_2$, $T_2 = 0.5\,T_1$.

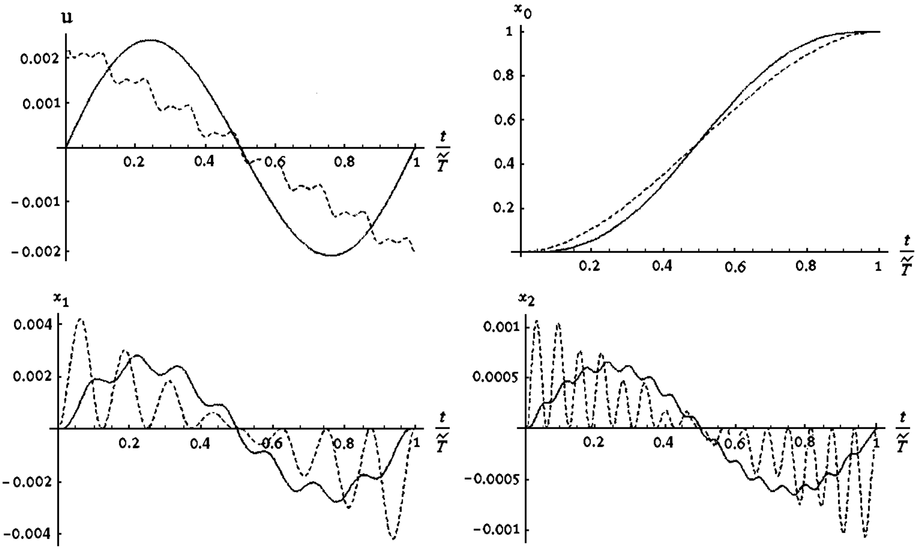

Рис. 3. Длительное движение механической системы: $T = 16\,T_2$, $T_2 = 0.5\,T_1$.

Из сравнения этих двух случаев движения видно, что при кратковременном движении решения, полученные обоими методами, практически совпадают, а при длительном движении резко различаются. Это различие можно объяснить тем, что управление, полученное с помощью использования принципа максимума Понтрягина, содержит гармоники с собственными частотами системы, что вводит систему в резонанс. В то же время управление, созданное применением обобщенного принципа Гаусса, задается полиномом, что обеспечивает сравнительно плавное движение системы.

Интересно обратить внимание еще на одно обстоятельство — применение принципа максимума Понтрягина всегда создает скачки управляющей силы в начале и в конце движения. Если же используется обобщенный принцип Гаусса, то при длительном времени движения подобные скачки исчезают. Поэтому возникает вопрос, нельзя ли удалить скачки управления и при кратковременном движении системы? Этому вопросу посвящен следующий пункт статьи.

7. Постановка и решение расширенной (обобщенной) краевой задачи. Особые точки. Оказывается, что с помощью применения обобщенного принципа Гаусса возможно найти управление без скачков в начале и в конце движения и при кратковременном движении тележки с маятниками. Для этого следует к граничным условиям (2.4) дополнительно потребовать выполнения следующих требований:

$$x_0''(0) = x_0''(T) = 0\,. \tag{7.1}$$

Обратим внимание на то, что поставленную таким образом расширенную (обобщенную) краевую задачу (2.3), (2.4), (7.1) невозможно решить минимизацией функционала (3.1) с помощью принципа максимума Понтрягина, так как в этом случае количество произвольных постоянных в решении оказывается недостаточным. В отличие от этого решение подобной расширенной краевой задачи с помощью обобщенного принципа Гаусса построить можно, для этого достаточно увеличить его порядок на две единицы. Результат расчета обобщенной краевой задачи для случая $T = T_2$, $T_2 = 0.5\,T_1$ представлен на рис. 4. Как видно из графика безразмерного управления, действительно удалось устранить скачки управляющей силы в начале и в конце движения системы.

Таким образом, применение обобщенного принципа Гаусса для гашения колебаний рассматриваемой механической системы становится предпочтительным. Однако область его применения оказывается несколько ограниченной. При проведении расчетов оказалось, что решения зависят коренным образом от параметра $\lambda = T/T_1$. В статье [5] показано, что в случае применения обобщенного принципа Гаусса при решении краевых задач существует счетное множество особых значений λ, в окрестности которых управляющая сила неограниченно возрастает. На рис. 5 сплошной линией представлено перемещение тележки, выраженное в долях a, при $\lambda = 1.5$. Оно соответствует решению краевой задачи (2.1), (2.2) на основе обобщенного принципа Гаусса при

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{4}\,, \qquad \frac{m_1}{M+m_1+m_2} = \frac{4}{5}\,, \qquad \frac{m_2}{M+m_1+m_2} = \frac{1}{10}\,,$$

когда $\Omega_2/\Omega_1 = 2.242$.

В то же время, если при данных параметрах системы расширить краевые условия, полагая, что у всех точек системы ускорения в начале и в конце пути равны нулю, то окажеется, что выбранный параметр $\lambda = 1.5$ лежит вблизи первого критического числа, равного 1.522. Развитие в этом случае интенсивных колебаний тележки

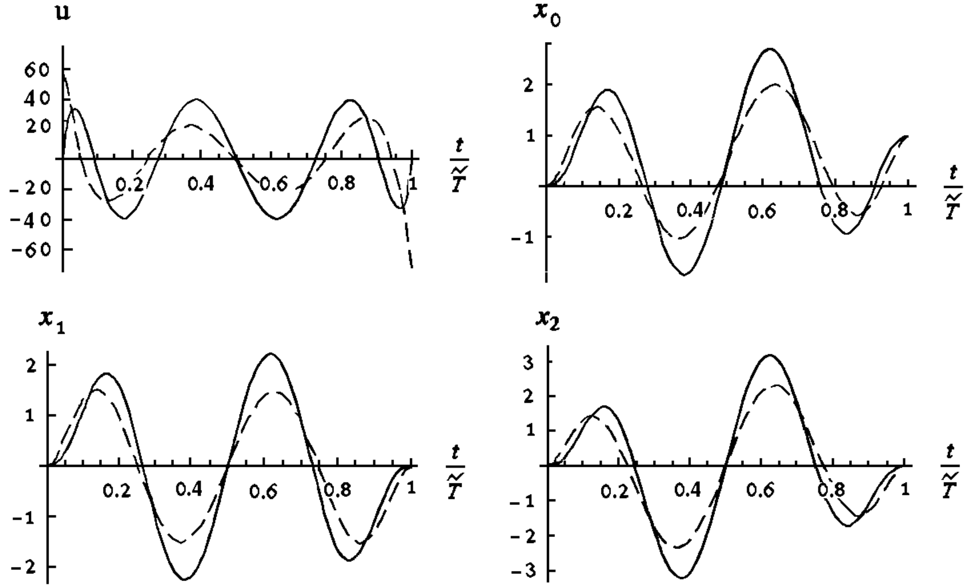

Рис. 4. Кратковременное движение без скачков управляющей силы, $T = T_2$, $T_2 = 0.5\,T_1$.

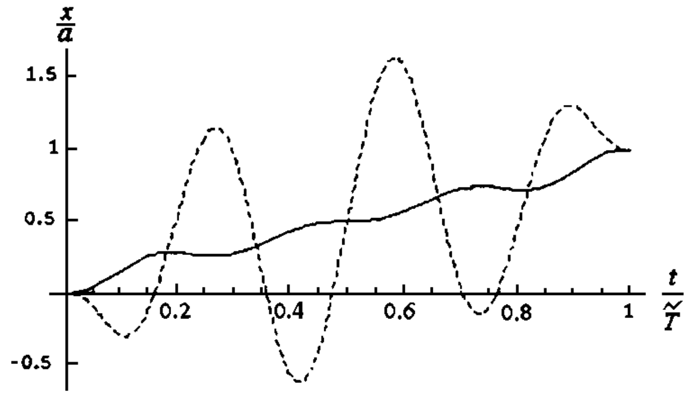

Рис. 5. Движение тележки вблизи особой точки.

отражено на рис. 5 пунктирной линией. Как видно, в этом случае тележка трижды заходит левее своего первоначального положения и трижды правее своего конечного положения. Отметим, однако, что даже при подобных интенсивных колебаниях поставленная расширенная задача решается, и полученная управляющая сила не имеет скачков в начале и в конце движения.

Управление без особых точек можно получить, применяя обобщенный принцип Гамильтона—Остроградского [6]. В этом случае управление строится с помощью базисных функций. Оно так же является полиномом по времени, но порядок полинома равен $4s + 3$.

Литература

1. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.

2. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

3. *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука, Физматлит, 2009. 344 с.

4. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков // Доклады АН СССР. 1983. Т. 269, № 6. С. 1328–1330.

5. *Гаврилов Д. Н., Зегжда С. А.* Гашение колебаний упругого тела при его перемещении // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2012. Вып. 3. С. 77–83.

6. *Зегжда С. А., Товстик П. Е., Юшков М. П.* Обобщенный принцип Гамильтона—Остроградского и его применение для гашения колебаний // Доклады РАН. 2012. Т. 447, № 3. С. 280–283.

Статья поступила в редакцию 26 июня 2014 г.

Сведения об авторах

Юшков Михаил Петрович — профессор; yushkovmp@mail.ru

Зегжда Сергей Андреевич — профессор; zegzhdasa@mail.ru

Солтаханов Шервани Хусаинович — профессор; soltakhanov@ya.ru

Пашкина Анна Андреевна — магистрант; pashkina_anna@bk.ru

ON RELATIONSHIP BETWEEN THE CONTROL THEORY AND NONHOLONOMIC MECHANICS

Mikhail P. Yushkov[1], *Sergey A. Zegzhda*[1], *Shervani Kh. Soltakhanov*[2], *Anna A. Pashkina*[1]

[1] St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9,
St.Petersburg, 199034, Russian Federation;
yushkovmp@mail.ru, zegzhdasa@mail.ru, pashkina_anna@bk.ru

[2] Chechen State University, ul. A. Sheripova, 32,
Grozny, 364051, Russian Federation; soltakhanov@ya.ru

The transition of a mechanical system from one state in which the generalized coordinates and velocities are given to another one in which the required coordinates and velocities are prescribed to the system is considered. It is assumed that this transition can be provided by a single control force. It is shown that if one determines the force with the help of the Pontryagin maximum principle (from the minimality condition of the time integral of the force squared during the time of motion) then a nonholonomic high-order constraint is realized in the defined process of motion of the system.

Hence, the theory of motion of nonholonomic systems with high-order constraints can be applied for solving the same problem. According to the theory, in the set of different motions with a constraint of the same order the optimal motion is that one in the process of which a generalized Gauss principle is fulfilled. Thus, a control force chosen from the set of forces providing the transition of a mechanical system from one state to another during the given time can be defined both on the basis of the Pontryagin maximum principle and on the basis of a generalized Gauss principle.

The paper focuses on the comparison of the results obtained by these two principles. The material is illustrated with the example of a horizontal motion of a trolley with pendulums to which a required force is applied. To obtain the control force without jumps in the beginning and in the end of motion, an extended boundary problem is formulated in which at these time moments not only the coordinates and velocities are given but also the derivatives of coordinates with respect to time up to the order n. This extended boundary problem can't be solved with the help of the Pontryagin maximum principle as in this case the number of arbitrary constants is less than the total number of boundary conditions formulated. At the same time the problem can be solved with the help of the generalized Gauss principle, as in this case one should only increase the order of the principle up to the value which is consistent with the number of given boundary conditions.

The results of numerical calculations are presented. Refs 6. Figs 5.

Keywords: control theory, nonholonomic mechanics, high-order constraints, generalized Gauss principle, generalized principle of Hamilton—Ostrogradsky.