УДК 531.011 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 4

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГЛАВНЫХ КООРДИНАТ В ЗАДАЧЕ О ГАШЕНИИ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛЕЖКИ С ДВУМЯ МАЯТНИКАМИ

Е. А. Шатров

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Конструктивно применять к задаче о гашении колебаний тележки с двумя маятниками принцип максимума Понтрягина и обобщённый принцип Гаусса можно в том случае, когда система уравнений, описывающая управляемое движение тележки с двумя маятниками, записана в главных координатах. В работе показывается, что эти уравнения могут быть получены без громоздких преобразований, связанных с представлением кинетической и потенциальной энергий рассматриваемой механической системы в главных координатах. Первоначально составляются уравнения Лагранжа второго рода относительно простейших лагранжевых координат, которыми являются горизонтальное перемещение тележки и углы поворота маятников. Затем из них исключается перемещение тележки. Оставшиеся два уравнения относительно двух углов поворота маятников позволяют определить две ненулевые собственные частоты и соответствующие им формы колебаний данной механической системы. Зная эти частоты и формы, будем знать, как при собственных колебаниях углы поворота маятников связаны с главными координатами. Переходя в двух уравнениях относительно двух углов к главным координатам, получим две независимые линейные комбинации искомых уравнений в главных координатах. Это и позволяет определить их достаточно просто. Присоединяя к ним уравнение движения центра масс и переходя во всех уравнениях к безразмерным переменным, в результате получим систему трех уравнений в главных координатах, записанную в простейшей форме. Библиогр. 4 назв. Ил. 1.

Ключевые слова: теория управления, гашение колебаний, уравнения Лагранжа, главные координаты.

1. Введение. Одной из главных задач управления является задача о перемещении механической системы из одного фазового состояния в другое, причем только за счет одной управляющей силы при задании как времени, так и пути. В частности, если конечным должно быть состояние покоя, то говорят о задаче гашения колебаний. Данная задача может быть решена в том случае, когда рассматриваемая механическая система имеет s различных собственных частот и форм, а её нулевая частота соответствует прямолинейному поступательному перемещению всех её элементов. Предполагается также, что искомой управляющей силой возбуждаются все формы колебаний. Анализ данной задачи исторически начался с рассмотрения механической системы, состоящей из горизонтально перемещающейся тележки с подвешенными к ней математическими маятниками, число которых равно s [1]. Управляющей силой в данной задаче является горизонтально действующая сила, приложенная к тележке. Простейшими независимыми лагранжевыми координатами в данной задаче являются горизонтальное перемещение тележки и углы поворота маятников. В этих координатах элементарная работа управляющей силы отлична от нуля только на элементарном перемещении тележки. Учитывая, что колебания по формам с ненулевыми частотами возбуждаются в силу теоремы о движении центра масс, за новые независимые лагранжевы координаты примем перемещение центра масс и углы поворота маятников. Перемещение тележки линейно зависит от этих координат, поэтому в них все уравнения Лагранжа второго рода будут содержать управляющую силу, причем само перемещение центра масс будет первой главной координатой. Целесообразно, однако, чтобы все координаты были главными, так как это существенно облегчит процедуру построения искомой управляющей силы на основе принципа максимума Понтрягина. В работах [2, 3] предлагается новый подход к выбору искомой управляющей силы. Он основан на обобщённых принципах Гаусса и Гамильтона—Остроградского. Теоретическое обоснование возможности применения данных принципов к задачам гашения колебаний существенно опирается на то, что малые колебаний механической системы описываются в главных координатах. Таким образом, переход к главным координатам является актуальным в задаче о гашении колебаний тележки с маятниками. Этому переходу применительно к случаю двух маятников и посвящена данная работа.

2. Определение собственных частот и собственных форм колебаний тележки с двумя маятниками. Пусть m — масса горизонтально расположенной тележки, к которой приложена сила F, а m_1, m_2 — массы маятников и l_1, l_2 — их длины. Полагая, что x — перемещение тележки, а φ_1 и φ_2 — малые углы отклонений маятников (см. рисунок), в результате получим следующие выражения для кинетической и потенциальной энергии и для обобщенных сил:

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_1}{2}(\dot{x} - l_1\dot{\varphi}_1)^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x} - l_2\dot{\varphi}_2)^2,$$

$$\Pi = \frac{m_1 g l_1}{2}\varphi_1^2 + \frac{m_2 g l_2}{2}\varphi_2^2, \quad Q_x = F, \quad Q_{\varphi_1} = Q_{\varphi_2} = 0,$$

$$\begin{cases} M\ddot{x} - m_1 l_1 \ddot{\varphi}_1 - m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 = F, \\ l_1\ddot{\varphi}_1 + g\varphi_1 = \ddot{x}, \\ l_2\ddot{\varphi}_2 + g\varphi_2 = \ddot{x}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $M = m_1 + m_2 + m_3$.

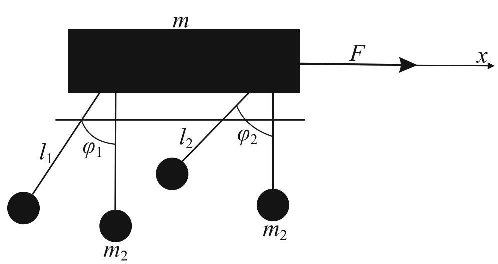
Выражая $\ddot{x}$ из первого уравнения и подставляя во второе и третье, в результате получим

$$\begin{cases} l_1\ddot{\varphi}_1 + g\varphi_1 = \dfrac{F}{M} + \dfrac{m_1 l_1 \ddot{\varphi}_1}{M} + \dfrac{m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2}{M}, \\ l_2\ddot{\varphi}_2 + g\varphi_2 = \dfrac{F}{M} + \dfrac{m_1 l_1 \ddot{\varphi}_1}{M} + \dfrac{m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2}{M}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Введем в рассмотрение перемещение x_c центра масс. По определению имеем

$$x_c = x - \frac{m_1 l_1 \varphi_1}{M} - \frac{m_2 l_2 \varphi_2}{M}. \tag{2.3}$$

Перемещение x_c и углы поворота маятников будем рассматривать как новые независимые лагранжевы координаты. Из выражения (2.3) следует, что первое уравнение в



системе (2.1) может быть записано как уравнение движения центра масс

$$M\ddot{x}_c = F. \tag{2.4}$$

Воспользуемся теоремой Кёнига при составлении выражения для кинетической энергии рассматриваемой механической системы в новых координатах, а выражением (2.3) для записи в них элементарной работы. При этом окажется, что уравнениями Лагранжа второго рода относительно координат x_c, φ_1 и φ_1 являются соответственно уравнение (2.4) и система (2.2).

Для перехода к главным координатам необходимо, используя систему (2.2), определить две ненулевые собственные частоты и две собственные формы колебаний данной механической системы. С целью упрощения дальнейших вычислений представим систему (2.2) следующим образом:

$$\begin{cases} (1-\beta)\ddot{\varphi}_1 - \gamma\alpha\ddot{\varphi}_2 + k^2\varphi_1 = \dfrac{F}{Ml_1}, \\ -\beta\ddot{\varphi}_1 + \alpha(1-\gamma)\ddot{\varphi}_2 + k^2\varphi_2 = \dfrac{F}{Ml_1}, \end{cases} \tag{2.5}$$

Здесь

$$\alpha = \frac{l_2}{l_1}, \quad \beta = \frac{m_1}{M}, \quad \gamma = \frac{m_2}{M}, \quad k^2 = \frac{g}{l_1}.$$

Полагая в системе (2.5) $F = 0$, частные ее решения будем искать в форме

$$\varphi_k = C_k \cos\Omega t, \quad k = 1, 2, \tag{2.6}$$

где Ω — искомая собственная частота. Из системы (2.5) следует, что постоянные C_1 и C_2 должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{cases} (k^2 - (1-\beta)\Omega^2)C_1 + \gamma\alpha\Omega^2 C_2 = 0, \\ \beta\Omega^2 C_1 + (k^2 - \alpha(1-\gamma)\Omega^2)C_2 = 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

Полагая $\Omega^2 = k^2\lambda^2$, придем к следующему уравнению относительно λ^2:

$$\alpha(1-\beta-\gamma)\lambda^4 - (1+\alpha-\beta-\alpha\gamma)\lambda^2 + 1 = 0. \tag{2.8}$$

Следовательно, искомые собственные частоты таковы:

$$\Omega_j^2 = k^2\lambda_j^2, \quad j = 1, 2, \quad \lambda_{1,2}^2 = \frac{1+\alpha-\beta-\alpha\gamma \pm \sqrt{((1+\alpha\beta-\alpha\gamma)^2 - 4\alpha(1-\beta-\gamma))}}{2\alpha(1-\beta-\gamma)}. \tag{2.9}$$

Постоянные C_i, $i = 1, 2$, соответствующие собственному значению λ_j^2, $j = 1, 2$, обозначим как Δ_{ij}, $i, j = 1, 2$. Из первого уравнения в системе (2.7) следует, что можно положить

$$\Delta_{1j} = -\alpha\gamma\lambda_j^2, \quad \Delta_{2j} = 1 - (1-\beta)\lambda_j^2, \ \ j = 1, 2. \tag{2.10}$$

3. Введение главных координат и запись в них уравнений управляемого движения тележки с двумя маятниками. Согласно общей теории, изложенной, в частности, в учебнике [4], наличие собственных векторов, задаваемых выражениями (2.10), позволяет следующим образом связать координаты φ_1 и φ_2 с главными координатами ξ_1 и ξ_2:

$$\varphi_1 = \sum_{j=1}^{2} \Delta_{1j}\xi_j, \quad \varphi_2 = \sum_{j=1}^{2} \Delta_{2j}\xi_j. \tag{3.1}$$

Подставляя выражения (3.1) в первое уравнение системы (2.5), получаем

$$(1-\beta)\sum_{j=1}^{2} \Delta_{1j}\ddot{\xi}_j - \alpha\gamma\sum_{j=1}^{2} \Delta_{2j}\ddot{\xi}_j + k^2\sum_{j=1}^{2} \Delta_{1j}\xi_j = \frac{F}{Ml_1}.$$

Отсюда и из соотношений (2.9) и (2.10) следует, что

$$-\alpha\gamma\sum_{j=1}^{2}(\ddot{\xi}_j + \Omega_j^2\xi_j) = \frac{F}{Ml_1}. \tag{3.2}$$

Воспользуемся теперь вторым уравнением системы (2.5). Чтобы из него получить уравнение, аналогичное по своей структуре уравнению (3.2), необходимо будет учесть, что из уравнения частот (2.8) вытекают следующие соотношения:

$$(1-(1-\beta)\lambda_j^2)(1-\alpha(1-\gamma)\lambda_j^2) = \alpha\beta\gamma\lambda_j^4, \quad j=1,2.$$

Таким образом,

$$\Delta_{2j} = 1-(1-\beta)\lambda_j^2 = \frac{\alpha\beta\gamma\lambda_j^4}{1-\alpha(1-\gamma)\lambda_j^2}. \tag{3.3}$$

Используя при подстановке выражений (3.1) во второе уравнение системы (2.5) формулы (3.3), получим

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{\alpha\beta\gamma\lambda_j^2}{1-\alpha(1-\gamma)\lambda_j^2}(\ddot{\xi}_j + \Omega_j^2\xi_j) = \frac{F}{Ml_1}. \tag{3.4}$$

Рассматривая выражения (3.2) и (3.4) как систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $y = \ddot{\xi}_1 + \Omega_1^2\xi_1$, $z = \ddot{\xi}_2 + \Omega_2^2\xi_2$, получаем

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + \Omega_1^2\xi_1 = \dfrac{F(1+a_2)}{\alpha\gamma Ml_1(a_1-a_2)}, \\ \ddot{\xi}_2 + \Omega_2^2\xi_2 = \dfrac{F(1+a_1)}{\alpha\gamma Ml_1(a_2-a_1)}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Здесь

$$a_j = \frac{\beta\lambda_j^2}{1-\alpha(1-\gamma)\lambda_j^2}, \quad j=1,2.$$

Уравнение (2.4) и система (3.5) являются искомыми уравнениями в главных координатах x_c, ξ_1 и ξ_2. Целесообразно перейти в них к безразмерной переменной $x_0 = x_c/l_1$ и к безразмерному времени $\tau = \Omega_1 t$, а также положить

$$x_1 = \frac{\alpha\gamma(a_1-a_2)}{1+a_2}\xi_1, \quad x_2 = \frac{\alpha\gamma(a_2-a_1)}{1+a_1}\xi_2.$$

В результате будем иметь

$$\begin{cases} x_0'' = u, \\ x_j'' + \omega_j^2 x_j = u, \ \ j = 1, 2. \end{cases} \tag{3.6}$$

Здесь штрихи соответствуют производным по безразмерному времени и

$$u = \frac{F}{Mg\lambda_1^2}, \quad \omega_j = \frac{\Omega_j}{\Omega_1}, \quad j = 1, 2.$$

Система (3.6), описывающая управляемое движение тележки с двумя маятниками, записана в такой простой форме с той целью, чтобы ее легко можно было использовать при определении искомого управления u методами на основе как принципа максимума Понтрягина, так и обобщенного принципа Гаусса.

Литература

1. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управления колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука; Физматлит, 2009. 344 с.
3. *Зегжда С. А., Товстик П. Е., Юшков М. П.* Обобщенный принцип Гамильтона—Остроградского и его применение для гашения колебаний // Доклады РАН. 2012. Т. 447. № 3. С. 280–283.
4. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Теоретическая механика. М.: Изд-во «Высшая школа», 2000. 592 с.

Статья поступила в редакцию 26 июня 2014 г.

Сведения об авторе

Шатров Егор Александрович — аспирант; egorshatroff@yandex.ru

THE USE OF PRINCIPAL COORDINATES IN THE PROBLEM OF OSCILLATION SUPPRESION OF A TROLLEY WITH TWO PENDULUMS

Egor A. Shatrov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9,
St.Petersburg, 199034, Russian Federation; egorshatroff@yandex.ru

The Pontryagin maximum principle and the generalized Gauss principle can be applied constructively to the problem of oscillation suppression of a trolley with two pendulums in the case when a system of equations describing the controlled motion of a trolley with two pendulums is written in principal coordinates. The paper shows that these equations can be obtained without lengthy transformations connected with representation of the kinetic and potential energies of the considered mechanical system in principal coordinates. At first the Lagrange equations of the second kind are composed in the simplest Lagrange coordinates which are the horizontal displacement of a trolley and the angles of rotation of pendulums. Then the displacement of a trolley is eliminated from them. The remaining two equations in the angles of rotation of pendulums make it possible to determine two nonzero natural frequencies and corresponding to them vibration modes of the mechanical system in question. If one knows these frequencies then one will know how in natural oscillation the angles of rotation of pendulums are connected with principal coordinates. Going to principal coordinates in the two equations in angles of rotation of pendulums we get linearly independent combinations of the unknown equations in principal coordinates. This makes it possible to define these equations fairly simply. Completing them with the equation of motion of the centre of mass and going to dimensionless variables in all equations we obtain a system of three equations in principal coordinates written in the simplest form. Refs 4. Figs 1.

Keywords: control theory, oscillation suppression, Lagrange equations, principal coordinates.