

О КАЧЕНИИ ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ ПО НЕПОДВИЖНОЙ АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ*

А. С. Кулешов, Г. А. Черняков

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, 1

Рассматривается классическая задача динамики неголономных систем — задача о качении динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной горизонтальной плоскости без проскальзывания. Доказано, что данная задача может быть полностью решена в случае, когда движущееся твердое тело является параболоидом вращения. Дано качественное описание движения параболоида по плоскости. Показано, что следом точки касания M на поверхности параболоида будет кривая, состоящая из периодически повторяющихся волн и прикасающаяся поочередно к двум параллелям параболоида. След точки касания на неподвижной плоскости образует кривую такого же характера, заключенную между двумя концентрическими окружностями, которых точка M поочередно касается при движении параболоида. Описаны все стационарные движения параболоида (перманентные вращения и регулярные прецессии) и доказано, что все они являются устойчивыми. Библиогр. 6 назв. Ил. 3.

Ключевые слова: параболоид вращения, анализ квадратур, стационарные движения, устойчивость.

Постановка задачи и уравнения движения. Рассмотрим задачу о движении без скольжения твердого тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной горизонтальной плоскости. Предполагаем, что центр тяжести G тела расположен на оси симметрии $G\zeta$, а моменты инерции относительно главных центральных осей инерции $G\xi$ и $G\eta$, перпендикулярных $G\zeta$, равны между собой. Движение происходит в однородном поле тяжести.

Пусть $Oxyz$ — неподвижная система координат с началом в некоторой точке плоскости Oxy , по которой движется тело. Обозначим через θ угол между осью симметрии тела и вертикалью. Расстояние (рис. 1) GQ от центра тяжести до плоскости Oxy будет функцией угла θ (см. [1, 2]):

$$GQ = f(\theta). \quad (1.1)$$

Пусть β — угол между меридианом $M\zeta$ тела и какой-либо фиксированной его меридианной плоскостью, а α — угол между горизонтальной касательной MQ меридиана $M\zeta$ и осью Ox . Положение тела будет вполне определено углами α , β и θ и координатами x и y точки M .

Теперь конкретизируем расположение осей системы координат $G\xi\eta\zeta$. Пусть ось $G\xi$ все время лежит в плоскости вертикального меридиана $M\zeta$, а ось $G\eta$ перпендикулярна этой плоскости. Очевидно, что система координат $G\xi\eta\zeta$ движется и в пространстве и в теле. Пусть ξ , η , ζ — координаты точки касания M тела и плоскости в системе координат $G\xi\eta\zeta$. Тогда (см. [1, 2]):

$$\xi = -f(\theta) \sin \theta - f'(\theta) \cos \theta, \quad \eta = 0, \quad \zeta = -f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta, \quad (1.2)$$

где штрихом обозначена производная функции $f(\theta)$ по θ . Таким образом, функция $f(\theta)$ полностью характеризует форму поверхности движущегося тела.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00230).

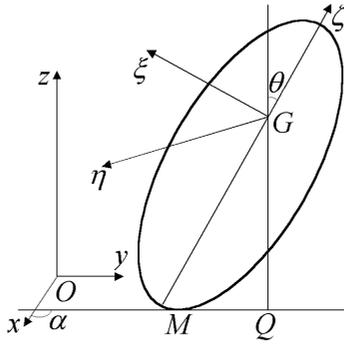


Рис. 1. Качение тела вращения: основные системы координат.

Пусть векторы скорости \mathbf{v} центра масс G и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела задаются в системе координат $G\xi\eta\zeta$ компонентами $v_\xi, v_\eta, v_\zeta; p, q, r$ соответственно. Пусть m — масса тела, A_1 — его момент инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$, а A_3 — момент инерции относительно оси симметрии. Движение тела по плоскости происходит без проскальзывания, поэтому

$$v_\xi + q\zeta = 0, \quad v_\eta + r\xi - p\zeta = 0, \quad v_\zeta - q\xi = 0,$$

а для четырех неизвестных функций времени p, q, r и θ мы имеем замкнутую систему уравнений [1]:

$$[A_1 + m(\xi^2 + \zeta^2)] \frac{dq}{dt} = mgf'(\theta) + (A_3r - A_1p \operatorname{ctg} \theta)p - mp(\zeta \operatorname{ctg} \theta + \xi)(p\zeta - r\xi) - mq \left(\xi \frac{d\xi}{dt} + \zeta \frac{d\zeta}{dt} \right), \quad (1.3)$$

$$A_1 \frac{dp}{dt} + A_3 \frac{\zeta}{\xi} \frac{dr}{dt} = (A_1p \operatorname{ctg} \theta - A_3r)q,$$

$$\frac{d}{dt}(p\zeta - r\xi) - \frac{A_3}{m\xi} \frac{dr}{dt} = (\zeta \operatorname{ctg} \theta + \xi)pq, \quad q = -\frac{d\theta}{dt}.$$

Система уравнений (1.3) обладает интегралом энергии:

$$A_1p^2 + (A_1 + m(\xi^2 + \zeta^2))q^2 + A_3r^2 + m(p\zeta - r\xi)^2 + 2mgf(\theta) = c_0^2 = \operatorname{const}. \quad (1.4)$$

Будем считать, что $\theta \neq \operatorname{const}$. Тогда, используя последнее уравнение системы (1.3), перейдем во втором и третьем уравнении этой системы к новой независимой переменной — углу θ . Получим

$$A_1 \frac{dp}{d\theta} + A_3 \frac{\zeta}{\xi} \frac{dr}{d\theta} = -A_1p \operatorname{ctg} \theta + A_3r,$$

$$\zeta \frac{dp}{d\theta} - \frac{A_3 + m\xi^2}{m\xi} \frac{dr}{d\theta} = -(\zeta \operatorname{ctg} \theta + \xi + \zeta')p + \xi'r. \quad (1.5)$$

Интегрирование системы (1.5) дает зависимость p и r от θ с двумя произвольными постоянными, после чего интегрирование задачи заканчивается в квадратурах. К

настоящему времени данная задача была полностью решена в случае, когда движущееся твердое тело представляет собой неоднородный динамически симметричный шар [1, 2] или круглый диск [2, 3]. В работах [4, 5] было показано, что эта задача может быть полностью решена также в случае, когда движущееся твердое тело является параболоидом вращения. Данная работа посвящена детальному анализу движения динамически симметричного параболоида вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

Движение параболоида вращения. Предположим, что меридиан поверхности, ограничивающей твердое тело, представляет собой параболу с параметром 2λ . Тогда по формулам (1.1) и (1.2) имеем

$$f(\theta) = \frac{\lambda}{\cos \theta}, \quad \xi = -\frac{2\lambda \sin \theta}{\cos \theta}, \quad \zeta = \frac{\lambda \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \lambda, \quad \xi^2 = 4\lambda\zeta + 4\lambda^2. \quad (2.1)$$

Катящееся по горизонтальной плоскости твердое тело является в этом случае параболоидом вращения, центр тяжести которого находится в фокусе образующей параболы. Можно показать (см. [4, 5]), что решение системы (1.5) имеет в этом случае вид

$$r(\theta) = \sqrt{\frac{K_1(\theta)}{K_2(\theta)}} (c_1 \cos \Phi(\theta) + c_2 \sin \Phi(\theta)),$$

$$p(\theta) = -\frac{\cos \theta}{2A_1 \sqrt{K_1(\theta)} \sin \theta} \left[(c_2 \cos \Phi(\theta) - c_1 \sin \Phi(\theta)) D \cos \theta + \right. \\ \left. + \frac{2A_3}{\sqrt{K_2(\theta)}} (K_1(\theta) + (2A_1 - A_3) m \lambda^2 (1 - 2 \cos^2 \theta)) (c_1 \cos \Phi(\theta) + c_2 \sin \Phi(\theta)) \right],$$

$$\Phi(\theta) = 2m\lambda^2 D \int_0^\theta \frac{\sin^3 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi}{K_1(\varphi) \sqrt{K_2(\varphi)}}, \quad D = \sqrt{2A_1 A_3 (A_3 + 4m\lambda^2) (2A_1 - A_3)},$$

$$K_1(\theta) = (A_1 A_3 + 4A_1 m \lambda^2) \cos^4 \theta - 2A_3 m \lambda^2 \cos^2 \theta + A_3 m \lambda^2,$$

$$K_2(\theta) = (A_1 A_3 + 4m\lambda^2 (A_3 - A_1)) \cos^4 \theta - 4m\lambda^2 (A_3 - A_1) \cos^2 \theta + A_3 m \lambda^2.$$

Здесь c_1 и c_2 — произвольные постоянные, а функция $\Phi(\theta)$ выражается через эллиптические интегралы. Видно, что функции $p(\theta)$ и $r(\theta)$ имеют довольно сложный вид. Они упрощаются только в частном случае, когда моменты инерции параболоида связаны соотношением $A_3 = 2A_1$. В этом случае имеем

$$D = 0, \quad \Phi(\theta) = 0, \quad r(\theta) = c_1 = \text{const}, \quad p(\theta) = -\frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} c_1.$$

Указанный частный случай был полностью исследован в работе Х. М. Муштары [6]. Однако представляет интерес исследование движения параболоида, когда $D \neq 0$ и, следовательно, $\Phi(\theta) \neq 0$. Эллиптические интегралы, через которые выражается функция $\Phi(\theta)$, не упрощаются ни при каких соотношениях на моменты инерции, кроме указанного выше. Таким образом, исследование движения параболоида

вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости происходит одинаково для всех значений моментов инерции, не связанных соотношением $A_3 = 2A_1$. Поэтому будем считать, что движущийся параболоид является однородным. Плоскостью, перпендикулярной к оси симметрии параболоида, можно отсечь от него такой сегмент, что его центр тяжести будет как раз в фокусе образующей параболы. Простые вычисления показывают, что для этого секущая плоскость должна определяться условием $\zeta = \lambda/2$. Экваториальный и осевой главные центральные моменты инерции соответствующего сегмента будут равны

$$A_1 = \frac{9}{8}m\lambda^2, \quad A_3 = 2m\lambda^2. \quad (2.2)$$

При качении данного сегмента по плоскости пределы изменения угла θ будут иметь вид

$$-\theta_* \leq \theta \leq \theta_*, \quad \theta_* = \arccos \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Функции $p(\theta)$, $r(\theta)$ и $\Phi(\theta)$ запишутся следующим образом:

$$r(\theta) = \sqrt{\frac{27 \cos^4 \theta - 16 \cos^2 \theta + 8}{23 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 8}} (c_1 \cos \Phi(\theta) + c_2 \sin \Phi(\theta)),$$

$$p(\theta) = -\frac{4 \cos \theta}{\sin \theta \sqrt{27 \cos^4 \theta - 16 \cos^2 \theta + 8}} \left[\frac{\sqrt{3} \cos \theta}{3} (c_2 \cos \Phi(\theta) - c_1 \sin \Phi(\theta)) + \right. \\ \left. + \frac{4(3 \cos^4 \theta - 2 \cos^2 \theta + 1)}{\sqrt{23 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 8}} (c_1 \cos \Phi(\theta) + c_2 \sin \Phi(\theta)) \right],$$

$$\Phi(\theta) = \int_0^\theta \frac{24\sqrt{3} \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi}{(27 \cos^4 \varphi - 16 \cos^2 \varphi + 8) \sqrt{23 \cos^4 \varphi - 14 \cos^2 \varphi + 8}}.$$

Из интеграла энергии (1.4) с учетом явных величин (2.2) моментов инерции A_1 и A_3 получаем

$$\frac{m\lambda^2(8 + 9 \cos^4 \theta)}{8 \cos^4 \theta} q^2 = \left(c_0^2 - \frac{2mg\lambda}{\cos \theta} \right) - m\lambda^2 \left[\frac{9}{8} p^2 + 2r^2 + \left(\frac{2 \sin \theta}{\cos \theta} r + \frac{(1 - 2 \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta} p \right)^2 \right].$$

Умножая это равенство на $\sin^2 \theta$ и учитывая последнее уравнение системы (1.3), получаем

$$\frac{m\lambda^2}{8} (9 + 8u^4) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 = u^2 (u^2 - 1) (c_0^2 - 2mg\lambda u) - K_0, \quad (2.4)$$

где введено обозначение $u = 1/\cos \theta$, а функция K_0 определяется равенством

$$K_0 = m\lambda^2 u^2 \left[\frac{9}{8} u^2 p_1^2 + 2(u^2 - 1)r^2 + (2(u^2 - 1)r + u(u^2 - 2)p_1)^2 \right], \quad p_1 = p \sin \theta.$$

Если $c_1 = c_2 = 0$, то во все время движения $p = r = 0$. Движение параболоида происходит так, что его ось симметрии $G\zeta$ находится в фиксированной вертикальной плоскости. Изменение со временем угла θ , составляемого осью $G\zeta$ с вертикалью, определяется уравнением (2.4), в котором нужно положить $K_0 = 0$:

$$\frac{m\lambda^2}{8} (9 + 8u^4) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 = F(u) = u^2 (u^2 - 1) (c_0^2 - 2mg\lambda u).$$

При $u = 1$ центр масс параболоида занимает наинизшее положение, поэтому при $c_0^2 < 2mg\lambda$ движение параболоида невозможно. При $c_0^2 > 2mg\lambda$ ось симметрии параболоида совершает колебательное движение в вертикальной плоскости с амплитудой, не превосходящей значения θ_* , при этом следом точки касания на плоскости будет отрезок прямой. Поскольку мы предполагаем, что при качении параболоид постоянно опирается о плоскость своей поверхностью, должны выполняться неравенства

$$1 \leq u \leq \sqrt{\frac{5}{2}}, \quad (2.5)$$

поэтому в действительном движении $2mg\lambda \leq c_0^2 \leq \sqrt{10}mg\lambda$.

Параболоид может совершать стационарные движения, при которых его ось симметрии составляет постоянный угол θ_0 с вертикалью. Такие движения будут рассмотрены ниже.

Исследуем характер движения параболоида в общем случае. Для этого заметим, что в действительном движении выполняются неравенства (2.5) и правая часть уравнения (2.4) должна быть неотрицательной. Иными словами, в действительном движении

$$F(u) > 0, \quad F\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \leq 0.$$

Анализируя функцию $F(u)$, видим, что

$$F(-\infty) > 0, \quad F(-1) < 0, \quad F(0) = 0, \quad F(1) < 0, \quad F(+\infty) < 0.$$

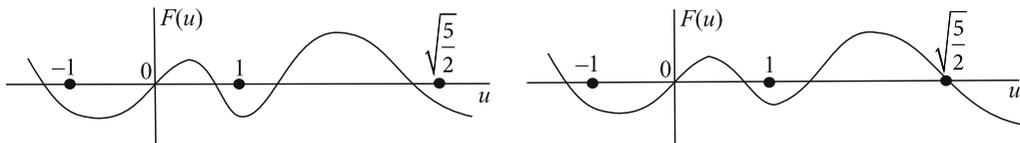


Рис. 2. Возможные виды графиков функции $F(u)$.

Следовательно, возможны два типа графиков функции $F(u)$, представленные на рис. 2. Таким образом, функция $F(u)$ имеет два корня на отрезке (2.5) и представляет собой однозначную функцию. Отсюда следует, что $u(t) = 1/\cos\theta(t)$ есть периодическая функция от времени.

В рассматриваемом движении u колеблется между значениями u_1 и u_2 , то есть $u_1 \leq u \leq u_2$, причем $u \neq 1$, если $p_1 \neq 0$. Нетрудно заметить, что следом точки касания на поверхности параболоида будет кривая, состоящая из периодически повторяющихся волн и прикасающаяся поочередно к двум параллелям параболоида. След точки

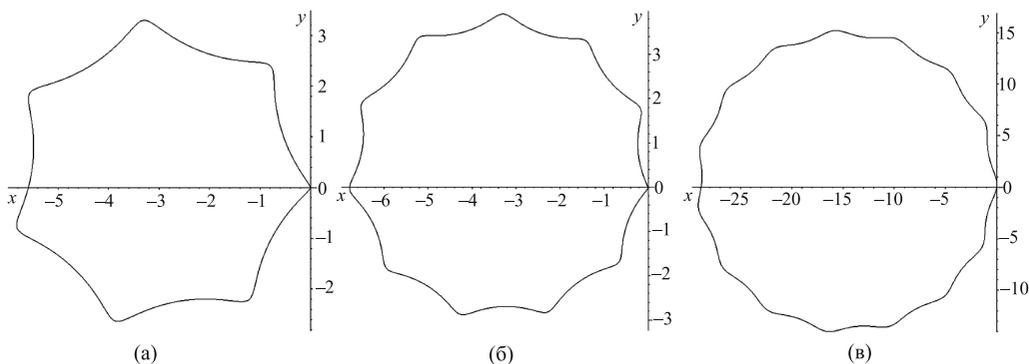


Рис. 3. Траектории точки касания параболоида на опорной плоскости, построенные при различных начальных условиях: а — $\theta(0) = \pi/6$, $q(0) = 0.05$, $p(0) = 0.2$, $r(0) = 0.7$; б — $\theta(0) = \pi/8$, $q(0) = 0.08$, $p(0) = 0.2$, $r(0) = 1$; в — $\theta(0) = \pi/4$, $q(0) = 0.05$, $p(0) = 0.2$, $r(0) = 1.3$.

касания на неподвижной плоскости образует кривую такого же характера, заключенную между двумя концентрическими окружностями, которых точка M поочередно касается при движении параболоида. Рисунок 3 иллюстрирует этот факт.

Стационарные движения параболоида и их устойчивость. При $\theta = 0$ система уравнений (1.3) допускает частное решение

$$p = 0, \quad r = \omega = \text{const}, \quad q = 0, \quad \theta = 0. \quad (3.1)$$

В этом движении параболоид вращается вокруг своей неподвижной вертикально расположенной оси симметрии с произвольной постоянной угловой скоростью ω . Можно показать (см. [1]), что для произвольного тела вращения условие устойчивости соответствующего стационарного движения имеет вид

$$(A_3 + m f_0 (f_0 + f_0''))^2 \omega^2 + 4 m g f_0' (A_1 + m f_0^2) > 0, \quad (3.2)$$

где индексом 0 обозначены значения функции и ее второй производной по θ при $\theta = 0$. Учитываем, что в случае параболоида

$$f''(\theta)|_{\theta=0} = \left. \frac{\lambda (1 + \sin^2 \theta)}{\cos^3 \theta} \right|_{\theta=0} = \lambda > 0,$$

следовательно, в левой части неравенства (3.2) стоит положительное выражение и решение (3.1) будет устойчивым при любом значении постоянной ω .

Из уравнений (1.3) видно, что параболоид может совершать стационарные движения, при которых угол θ , составляемый осью симметрии параболоида с вертикалью, остается постоянным:

$$\theta = \theta_0 \neq 0, \quad q = 0, \quad p = p_0, \quad r = r_0, \quad \theta_0 \in (-\theta_*, \theta_*), \quad (3.3)$$

если постоянные θ_0 , p_0 и r_0 удовлетворяют уравнению [1]

$$a_{11} p_0^2 + a_{12} p_0 r_0 - m g f_0' = 0, \quad (3.4)$$

$$a_{11} = \left(A_1 - \frac{m \zeta_0}{\cos \theta_0} f_0 \right) \text{ctg} \theta_0, \quad a_{12} = - \left(A_3 - \frac{m \xi_0}{\sin \theta_0} f_0 \right).$$

Решению (3.3) отвечает регулярная прецессия параболоида. Условие устойчивости решения (3.3) имеет вид [1]

$$\begin{aligned}
 & b_{11}p_0^2 + b_{12}p_0r_0 + b_{22}r_0^2 + m g f'' > 0, \tag{3.5} \\
 b_{11} = & \frac{(A_1 + m\zeta_0^2)(1 + 2\cos^2\theta_0)}{\sin^2\theta_0} + \frac{m\xi_0(\xi_0\sin\theta_0 + 3\zeta_0\cos\theta_0)}{\sin\theta_0} + \\
 & + \frac{A_3m\zeta_0(\xi_0 + \zeta'_0)((A_1 + m\zeta_0^2)\cos\theta_0 + m\xi_0\zeta_0\sin\theta_0)}{(A_1A_3 + A_1m\xi_0^2 + A_3m\zeta_0^2)\sin\theta_0}, \\
 b_{12} = & - (3A_3 + 3m\xi_0^2 + m\xi'_0\zeta_0) \frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0} - \frac{m\xi_0\zeta_0(1 + \cos^2\theta_0)}{\sin^2\theta_0} + \\
 & + \frac{m\xi_0(2A_3 + 2m\xi_0^2 + m\xi'_0\zeta_0)}{A_1A_3 + A_1m\xi_0^2 + A_3m\zeta_0^2} \left(A_1\xi_0 \frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0} - A_3\zeta_0 \right) - \\
 & - \frac{A_3m\zeta_0\zeta'_0}{A_1A_3 + A_1m\xi_0^2 + A_3m\zeta_0^2} \left(A_3 + m\xi_0^2 + \frac{m\xi_0\zeta_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0} \right), \\
 b_{22} = & \left(A_3 + m\xi_0^2 + \frac{m\xi_0\zeta_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0} \right) \frac{A_3(A_3 + m\xi_0^2 + m\xi'_0\zeta_0)}{A_1A_3 + A_1m\xi_0^2 + A_3m\zeta_0^2}.
 \end{aligned}$$

Легко видеть, что коэффициенты b_{ij} , входящие в неравенство (3.5), являются довольно громоздкими. Можно показать, что для однородного параболоида, моменты инерции которого определяются равенствами (2.2), а угол θ меняется в пределах (2.3), коэффициенты b_{ij} удовлетворяют следующим неравенствам:

$$b_{11} > 0, \quad b_{22} > 0, \quad b_{12}^2 - 4b_{11}b_{22} < 0.$$

Это означает, что квадратичная форма $b_{11}p_0^2 + b_{12}p_0r_0 + b_{22}r_0^2$ является положительно определенной при всех значениях постоянных p_0 , r_0 , θ_0 . Учитывая, что слагаемое $m g f''$ также является положительным, заключаем, что регулярные прецессии (3.3) однородного параболоида являются устойчивыми.

Таким образом, нами полностью исследована задача о качении однородного параболоида по неподвижной абсолютно шероховатой плоскости. Дано качественное описание движения параболоида по шероховатой плоскости. Указаны все стационарные движения параболоида (перманентные вращения и регулярные прецессии) и доказано, что все они являются устойчивыми.

Литература

1. Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.
2. Чаплыгин С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1897. Т. 9. Вып. 1. С. 10–16.
3. Appell P. Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de révolution roulant par une arête circulaire sur un plane horizontal; cas particulier du cerceau // Rend. circ. mat. di Palermo. 1900. Vol. 14. P. 1–6.
4. Кулешиов А. С. Первые интегралы в задаче о движении параболоида вращения по шероховатой плоскости // Доклады РАН. 2005. Т. 400, № 1. С. 46–48.

5. Кулешов А. С., Черняков Г. А. Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Математика, механика, астрономия, 2013. Вып. 4. С. 93–102.

6. Муштару Х. М. О катании тяжелого твердого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости // Мат. сборник. 1932. Т. 39, № 1–2. С. 105–126.

Статья поступила в редакцию 26 июня 2014 г.

Сведения об авторах

Кулешов Александр Сергеевич — кандидат физико-математических наук, доцент;
kuleshov@mech.math.msu.su

Черняков Глеб Анатольевич — аспирант; glchern@gmail.com

MOTION OF A DYNAMICALLY SYMMETRIC PARABOLOID ON A PERFECTLY ROUGH PLANE

Alexander S. Kuleshov, Gleb A. Chernyakov

Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991,
Russian Federation; kuleshov@mech.math.msu.su, glchern@gmail.com

We consider the classical problem of nonholonomic system dynamics—the problem of motion of a dynamically symmetric body bounded by a surface of rotation on a fixed perfectly rough plane. We prove that this problem can be completely solved in quadratures in the case when the moving body is a paraboloid of revolution. The qualitative description of motion of a paraboloid on the plane is given. The trajectory of the point of contact M on the surface of paraboloid is the curve consisting of periodically repeating waves and tangent to two parallels of the paraboloid. The trajectory of the point of contact on the supporting plane has the same pattern and it is situated between two concentric circles. During the motion of the paraboloid the point of contact M touches these two circles in turn. The steady motions of the paraboloid on a perfectly rough plane are found and their stability is investigated. It is proved that all the steady motions of the paraboloid (permanent rotations and regular precessions) are stable. Refs 6. Figs 3.

Keywords: rolling paraboloid of revolution, analysis of quadratures, steady motions, stability.