АСТРОНОМИЯ

УДК 524.31-655

ОБРАЗОВАНИЕ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЛИНИЙ: ФАКТОРИЗАЦИЯ ФАЗОВОЙ МАТРИЦЫ ХАНЛЕ И ЗАКОН $\sqrt{\epsilon}$ В ОБЩЕМ ВИДЕ

С. И. Грачев

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Рассматривается задача о переносе поляризованного излучения при резонансном рассеянии в среде со слабым магнитным полем при учете эффекта Ханле. В последнее время эта задача приобрела большую актуальность в связи с обнаружением заметной поляризации в многочисленных фраунгоферовых линиях в спектре Солнца. Фазовая матрица Ханле описывает перераспределение излучения по направлениям и состояниям поляризации при однократном рассеянии в случаях, когда перераспределение по частоте может быть отделено от перераспределения по направлениям, как, например, при полном перераспределении по частоте. Фазовая матрица Ханле зависит от угловых аргументов параметров Стокса падающего и рассеянного излучения, а также от направления и величины магнитного поля. Получено представление фазовой матрицы Ханле в виде произведения матриц 3×6 и 6×6, каждая из которых зависит только от одного из угловых аргументов. Эта факторизация существенно упрощает решение задачи о переносе поляризованного излучения в слабом магнитном поле. Она позволяет свести эту задачу к нахождению векторной функции источников, зависящей только от оптической глубины.

Дан также простой вывод так называемого закона $\sqrt{\epsilon}$ в самой его общей матричной форме. Показано, что из него вытекают в качестве частных случаев известные из литературы скалярные соотношения, связывающие различные компоненты векторной функции источников на границе полубесконечной среды с равномерно распределенными первичными источниками частично поляризованного излучения. Этот общий закон $\sqrt{\epsilon}$ дает один из очень немногих точных аналитических результатов теории переноса поляризованного излучения. Он может также использоваться и для тестирования программ численного расчета переноса поляризованного излучения. Библиогр. 13 назв.

Ключевые слова: спектральные линии, перенос излучения, поляризация излучения, магнитные поля, спектр Солнца.

1. Введение. В последнее тридцатилетие в связи с обнаружением заметной поляризации в многочисленных фраунгоферовых линиях в спектре Солнца большую актуальность приобрела задача о переносе поляризованного излучения при резонансном рассеянии в среде со слабым магнитным полем при учете эффекта Ханле. В тех случаях, когда перераспределение по частотам при рассеянии может быть отделено от перераспределения по направлениям и состояниям поляризации, угловое распределение параметров Стокса в результате однократного рассеяния описывается фазовой матрицей Ханле. Аналитическому представлению матрицы Ханле посвящено довольно много работ (см. библиографию, например, в работе Фриш [1]). В настоящей работе предлагается факторизация фазовой матрицы Ханле по всем угловым переменным как падающего, так и рассеянного излучения. Она содержит произведения матриц 3×6 и 6×6 и, как будет показано ниже, вытекает из интегральных уравнений для шестикомпонентной приведенной функции источников, выведенных Ланди Дел'Инноченти и др. [2], Форобер-Шоль [3] и Фриш [4]. Мы также приводим простой вывод так называемого закона $\sqrt{\epsilon}$ в самой его общей матричной форме и показываем, что из него вытекают в качестве частных случаев полученные ранее другими авторами скалярные соотношения между компонентами векторной функции источников на границе полупространства с равномерно распределенными первичными источниками частично поляризованного излучения.

2. Факторизация фазовой матрицы Ханле. Итак, справедлива следующая факторизация фазовой матрицы Ханле:

$$\hat{P}_{\mathrm{H}}(\mu,\varphi;\mu',\varphi';\mu_{\mathrm{B}},\varphi_{\mathrm{B}},\gamma_{\mathrm{B}}) = \hat{A}(\mu,\varphi)\hat{\lambda}\hat{H}_{\mathrm{B}}(\mu_{\mathrm{B}},\varphi_{\mathrm{B}},\gamma_{\mathrm{B}})\hat{E}_{12}\hat{A}^{\mathrm{T}}(\mu',\varphi'), \tag{1}$$

где $\vartheta = \arccos\mu$ и φ — полярный и азимутальный углы направления рассеянного излучения, аналогичные штрихованные переменные относятся к падающему излучению, а переменные с индексом B — к магнитному полю, $\hat{A}(\mu,\varphi)$ — матрица 3×6, посредством которой можно переписать в матричном виде три скалярных соотношения (формулы (119)–(121) в работе Фриш [4]), связывающих три компонета вектора Стокса функции источников с шестью компонентами некоторой (приведенной) функции источников (см. ниже формулу (7)). В явном виде эта матрица была выписана в нашей статье [5]. Далее, $\hat{\lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda,\lambda_p,\lambda_p,\lambda_p,\lambda_p,\lambda_p\}$ — матричное альбедо однократного рассеяния, λ — обычное альбедо, $\lambda_p = \lambda/(1+\lambda\delta^{(2)})$ — альбедо с учетом упругих деполяризующих столкновений, $\hat{E}_{12} = \mathrm{diag}\{1,1,2,2,2,2\}$.

В (1) фигурирует матрица $\hat{H}_{\mathrm{B}}$ размерности 6×6, которая при $\varphi_{\mathrm{B}} = 0$ переходит в матрицу $\hat{M}_{\mathrm{B}}$, введенную в [3]. Для $\hat{H}_{\mathrm{B}}$ справедлива факторизация (см. [6])

$$\hat{H}_{\mathrm{B}}(\mu_{\mathrm{B}},\varphi_{\mathrm{B}},\gamma_{\mathrm{B}}) = \hat{R}(\varphi_{\mathrm{B}})\hat{M}_{\mathrm{B}}(\mu_{\mathrm{B}},\gamma_{\mathrm{B}})\hat{R}(-\varphi_{\mathrm{B}}), \tag{2}$$

где $\hat{R}(\varphi)$ — блочно-диагональная матрица 6×6, состоящая из трех матриц 2×2: $\hat{R}(\varphi) = \mathrm{diag}\{\hat{E},\hat{r}(-\varphi),\hat{r}(2\varphi)\}$, где $\hat{E} = \mathrm{diag}\{1,1\}$, $\hat{r}(\varphi)$ — матрица вращения на угол φ.

Мы обнаружили, что матрица $\hat{A}$ в (1) факторизуется следующим образом:

$$\hat{A}(\mu,\varphi) = \hat{A}(\mu,0)\hat{R}(-\varphi). \tag{3}$$

Вводя обозначение $\hat{A}(\mu) \equiv \hat{A}(\mu,0)$, из (1) получаем

$$\hat{P}_{\mathrm{H}}(\mu,\varphi;\mu',\varphi';\mu_{\mathrm{B}},\varphi_{\mathrm{B}},\gamma_{\mathrm{B}}) = \hat{A}(\mu)\hat{R}(\varphi_{\mathrm{B}}-\varphi)\hat{\lambda}\hat{M}_{\mathrm{B}}(\mu_{\mathrm{B}},\gamma_{\mathrm{B}})\hat{R}(\varphi'-\varphi_{\mathrm{B}})\hat{E}_{12}\hat{A}^{\mathrm{T}}(\mu'). \tag{4}$$

Матрица $\hat{M}_{\mathrm{B}}(\mu_{\mathrm{B}},\gamma_{\mathrm{B}})$ (матрица 6×6), описывающая влияние магнитного поля, имеет следующий блочно-диагональный вид: $\hat{M}_{\mathrm{B}} = \mathrm{diag}\{1,\hat{M}^p_{\mathrm{B}}\}$, где $\hat{M}^p_{\mathrm{B}}$ — матрица 5×5. Факторизация этой последней матрицы более простыми матрицами 5×5 представлена в [4].

Вывод формулы (1) основывается на следующих соображениях. Рассмотрим уравнение переноса поляризованного излучения в плоскопараллельной среде для вектора Стокса $\boldsymbol{i} = (I,Q,U)^{\mathrm{T}}$:

$$\mu\frac{\partial\boldsymbol{i}}{\partial\tau} = \phi(x)[\boldsymbol{i}(\tau,\mu,\varphi,x) - \boldsymbol{s}(\tau,\mu,\varphi)], \tag{5}$$

где (в приближении полного перераспределения по частоте)

$$\boldsymbol{s}(\tau,\mu,\varphi)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x')dx'\int_{-1}^{1}d\mu'\int_{0}^{2\pi}d\varphi'\hat{P}_{\mathrm{H}}(\mu,\varphi;\mu',\varphi';\mu_{\mathrm{B}},\varphi_{\mathrm{B}},\gamma_{\mathrm{B}})\boldsymbol{i}(\tau,\mu',\varphi',x')+\boldsymbol{s}_{*}. \tag{6}$$

Из формул (119)–(121) в [4] следует, что трехкомпонентная векторная функция источников факторизуется посредством упомянутой выше матрицы $\hat{A}(\mu,\varphi)$:

$$\boldsymbol{s}(\tau,\mu,\varphi)=\hat{A}(\mu,\varphi)\boldsymbol{S}(\tau), \tag{7}$$

где $\boldsymbol{S}(\tau)$ — некоторый шестикомпонентный вектор, зависящий только от оптической глубины. Тогда ясно, что и вектор Стокса можно представить в виде

$$\boldsymbol{i}(\tau,\mu,\varphi,x)=\hat{A}(\mu,\varphi)\boldsymbol{I}(\tau,\mu,x), \tag{8}$$

где $\boldsymbol{I}(\tau,\mu,x)$ — шестикомпонентный вектор, и уравнение переноса принимает вид

$$\mu\frac{\partial\boldsymbol{I}}{\partial\tau}=\phi(x)[\boldsymbol{I}(\tau,\mu,x)-\boldsymbol{S}(\tau)]. \tag{9}$$

Кроме того, сравнивая (6) с (7), видим, что справедлива факторизация

$$\hat{P}_{\mathrm{H}}(\mu,\varphi;\mu',\varphi';\mu_{\mathrm{B}},\varphi_{\mathrm{B}},\gamma_{\mathrm{B}})=\hat{A}(\mu,\varphi)\hat{D}(\mu',\varphi';\mu_{\mathrm{B}},\varphi_{\mathrm{B}},\gamma_{\mathrm{B}}), \tag{10}$$

так что формула (6) принимает вид

$$\boldsymbol{S}(\tau)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x')dx'\int_{-1}^{1}d\mu'\int_{0}^{2\pi}d\varphi'\hat{D}(\mu',\varphi';\mu_{\mathrm{B}},\varphi_{\mathrm{B}},\gamma_{\mathrm{B}})\hat{A}(\mu',\varphi')\boldsymbol{I}(\tau,\mu',x')+\boldsymbol{S}_{*}. \tag{11}$$

Подставляя сюда формальное решение уравнения (9), получаем интегральное уравнение для $\boldsymbol{S}(\tau)$:

$$\boldsymbol{S}(\tau)=\int_{0}^{\tau_0}\hat{K}(|\tau-\tau'|)\boldsymbol{S}(\tau')d\tau'+\boldsymbol{S}_{*}, \tag{12}$$

где

$$\hat{K}(\tau)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi^2(x)dx\int_{0}^{1}\frac{d\mu}{\mu}\int_{0}^{2\pi}d\varphi e^{-\tau\phi(x)/\mu}\hat{D}(\mu,\varphi;\mu_{\mathrm{B}},\varphi_{\mathrm{B}},\gamma_{\mathrm{B}})\hat{A}(\mu,\varphi). \tag{13}$$

Сравнив эту ядерную функцию с найденной в [3] и [4] (см. также формулы (28)–(30) в [6]), можно предположить, что

$$\hat{D}(\mu,\varphi;\mu_{\mathrm{B}},\varphi_{\mathrm{B}},\gamma_{\mathrm{B}})=\hat{\lambda}\hat{H}_{\mathrm{B}}(\mu_{\mathrm{B}},\varphi_{\mathrm{B}},\gamma_{\mathrm{B}})\hat{Q}(\mu,\varphi). \tag{14}$$

Остается определить матрицу $\hat{Q}(\mu,\varphi)$ размерности 6×3. Естественно предположить, что $\hat{Q}(\mu,\varphi)=\hat{A}^{\mathrm{T}}(\mu,\varphi)$. Однако при этом элементы ядерной матрицы $K_{ii}(\tau)$ при $i=3,4,5,6$ оказываются в два раза меньше, чем у Форобер-Шоль [3] и Фриш [4]. Поэтому приходится вводить дополнительную диагональную матрицу $\hat{E}_{12}=\mathrm{diag}\{1,1,2,2,2,2\}$, так что в итоге мы получаем формулу (1), и основное векторное уравнение переноса принимает вид

$$\boldsymbol{S}(\tau)=\hat{\lambda}\hat{H}_{\mathrm{B}}\int_{0}^{\tau_0}\hat{K}_{\mathrm{sc}}(|\tau-\tau'|)\boldsymbol{S}(\tau')d\tau'+\boldsymbol{S}_{*}, \tag{15}$$

где (с учетом факторизации матрицы $\hat{A}(\mu,\varphi)$ (формула (3)))

$$\hat{K}_{\rm sc}(\tau) = \frac{1}{4\pi}\hat{E}_{12}\int_{-\infty}^{\infty}\phi^2(x)dx\int_0^1\frac{d\mu}{\mu}\int_0^{2\pi}d\varphi e^{-\tau\phi(x)/\mu}\hat{R}(\varphi)\hat{A}^{\rm T}(\mu)\hat{A}(\mu)\hat{R}(-\varphi), \tag{16}$$

причем видно, что матрица $\hat{K}_{\rm sc}(\tau)$ симметричная. Здесь

$$\hat{A}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{W_2}{8}}(1-3\mu^2) & \frac{\sqrt{3W_2}}{2}\mu\sqrt{1-\mu^2} & 0 & \frac{\sqrt{3W_2}}{4}(1-\mu^2) & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{W_2}{8}}3(1-\mu^2) & \frac{\sqrt{3W_2}}{2}\mu\sqrt{1-\mu^2} & 0 & -\frac{\sqrt{3W_2}}{4}(1+\mu^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3W_2}}{2}\sqrt{1-\mu^2} & 0 & \frac{\sqrt{3W_2}}{2}\mu \end{pmatrix}. \tag{17}$$

В результате для элементов ядерной матрицы получаются выражения, совпадающие с найденными ранее (см., например, формулы (28)–(30) в [6]).

При отсутствии магнитного поля из формулы (4) вытекает следующая факторизация фазовой матрицы обобщенного рэлеевского рассеяния:

$$\hat{P}_{\rm R}(\mu,\varphi;\mu',\varphi') = \hat{A}(\mu)\hat{R}(\varphi'-\varphi)\hat{E}_{12}\hat{A}^{\rm T}(\mu'), \tag{18}$$

что переходит в чандрасекаровскую фазовую матрицу рэлеевского рассеяния, но с заменой $\varphi'-\varphi\to\varphi-\varphi'$. Правую часть формулы (18) можно симметризовать, если ввести матрицу $\hat{a}(\mu)\equiv\hat{A}(\mu)\hat{E}_{12}^{1/2}\equiv\hat{A}(\mu){\rm diag}\{1,1,\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2}\}$. Тогда

$$\hat{P}_{\rm R}(\mu,\varphi;\mu',\varphi') = \hat{a}(\mu)\hat{R}(\varphi'-\varphi)\hat{a}^{\rm T}(\mu'), \tag{19}$$

что соответствует факторизации, полученной Лоскутовым [7], с учетом указанной выше замены. Аналогичный переход можно сделать и для матрицы Ханле (формула (4)). Тогда, учитывая, что матрицы $\hat{E}_{12}^{\pm1/2}$ коммутируют с матрицами $\hat{R}(\varphi)$ и $\hat{\lambda}$ из (4), имеем

$$\hat{P}_{\rm H}(\mu,\varphi;\mu',\varphi';\mu_{\rm B},\varphi_{\rm B},\gamma_{\rm B}) = \hat{a}(\mu)\hat{R}(\varphi_{\rm B}-\varphi)\hat{\lambda}\hat{m}_{\rm B}(\mu_{\rm B},\gamma_{\rm B})\hat{R}(\varphi'-\varphi_{\rm B})\hat{a}^{\rm T}(\mu'), \tag{20}$$

где $\hat{m}_{\rm B}(\mu_{\rm B},\gamma_{\rm B})\equiv\hat{E}_{12}^{-1/2}\hat{M}_{\rm B}(\mu_{\rm B},\gamma_{\rm B})\hat{E}_{12}^{1/2}$. Если воспользоваться исправленным выражением для матрицы $\hat{M}_{\rm B}$ из статьи Нагендры и др. [8] (формула (38)), то матрица $\hat{m}_{\rm B}$ оказывается симметричной с точностью до знака шести ее элементов. Обратная же ей матрица оказывается суммой единичной и антисимметричной матриц, если использовать для матрицы $\hat{M}_{\rm B}^{-1}$ формулы (67) и (68) из [4]. Так, согласно первой из этих формул $\hat{M}_{\rm B}^{-1}=\hat{E}+\gamma_{\rm B}\hat{L}$, где матрица $\hat{E}={\rm diag}\{1,1,1,1,1,1\}$. Тогда

$$\hat{m}_{\rm B}^{-1}(\mu_{\rm B},\gamma_{\rm B})\equiv\hat{E}_{12}^{-1/2}\hat{M}_{\rm B}^{-1}(\mu_{\rm B},\gamma_{\rm B})\hat{E}_{12}^{1/2}=\hat{E}+\gamma_{\rm B}\hat{l}(\mu_{\rm B}), \tag{21}$$

где $\hat{l}(\mu_{\rm B})\equiv\hat{E}_{12}^{-1/2}\hat{L}(\mu_{\rm B})\hat{E}_{12}^{1/2}$. Используя здесь для матрицы $\hat{L}$ упомянутую выше формулу (68) из [4], убеждаемся, что матрица $\hat{l}$ антисимметричная:

$$\hat{l}(\mu_{\rm B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}S_{\rm B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{\rm B} & 0 & S_{\rm B} \\ 0 & -\sqrt{3}S_{\rm B} & -C_{\rm B} & 0 & S_{\rm B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S_{\rm B} & 0 & -2C_{\rm B} \\ 0 & 0 & -S_{\rm B} & 0 & 2C_{\rm B} & 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

где $C_{\rm B} = \cos\vartheta_{\rm B} \equiv \mu_{\rm B}$, $S_{\rm B} = \sin\vartheta_{\rm B} = \sqrt{1-\mu_{\rm B}^2}$. Умножая основное интегральное уравнение (15) слева на матрицу $\hat{H}_{\rm B}^{-1}$ и учитывая, что матрицы $\hat\lambda$ и $\hat{H}_{\rm B}$ коммутируют, получаем интегральное уравнение, выведенное в нашей статье [4] из комплексного уравнения, полученного Ланди Дел'Инноченти и др. [2]. В результате в новой нормировке основное векторное интегральное уравнение и его ядерная матрица переписываются в виде

$$[\hat{E} + \gamma_{\rm B}\hat{R}(\varphi_{\rm B})\hat{l}(\mu_{\rm B})\hat{R}(-\varphi_{\rm B})]\boldsymbol{S}(\tau) = \hat\lambda\int_0^{\tau_0}\hat{K}_{\rm sc}(|\tau-\tau'|)\boldsymbol{S}(\tau')d\tau' + \boldsymbol{S}_*, \tag{23}$$

$$\hat{K}_{\rm sc}(\tau) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi^2(x)dx\int_0^1\frac{d\mu}{\mu}\int_0^{2\pi}d\varphi e^{-\tau\phi(x)/\mu}\hat{R}(\varphi)\hat{a}^{\rm T}(\mu)\hat{a}(\mu)\hat{R}(-\varphi), \tag{24}$$

причем вместо формул (7) и (8) имеем теперь

$$\boldsymbol{s}(\tau,\mu,\varphi) = \hat{a}(\mu)\hat{R}(-\varphi)\boldsymbol{S}(\tau), \quad \boldsymbol{i}(\tau,\mu,\varphi,x) = \hat{a}(\mu)\hat{R}(-\varphi)\boldsymbol{I}(\tau,\mu,x), \tag{25}$$

а $\boldsymbol{I}(\tau,\mu,x)$ выражается через $\boldsymbol{S}(\tau)$ из формального решения уравнения (9).

3. Закон $\sqrt{\epsilon}$ в общей форме. Так называемый закон $\sqrt{\epsilon}$ представляет собой соотношение между компонентами функции источников на границе полупространства с равномерно распределенными первичными источниками. В скалярном случае он дает значение функции источников на границе: $S(0) = S_*/\sqrt{\epsilon}$, где S_* — функция первичных источников, ϵ – вероятность гибели фотона при однократном рассеянии. В случае немагнитной поляризации ядер резонасных линий закон $\sqrt{\epsilon}$ был сформулирован Ивановым [9] сначала в векторной форме, а затем в матричной форме [10] в задаче об обобщенном рэлеевском рассеянии. Различные обобщения закона $\sqrt{\epsilon}$ на случай резонансной поляризации в магнитном поле были получены Ланди Дел'Инноченти и Бомье [11], Фриш [4], Штепаном и Бомье [12] в виде скалярных соотношений между компонентами векторной функции источников. Важность закона $\sqrt{\epsilon}$ определяется тем, что он может использоваться и для тестирования программ численного расчета переноса поляризованного излучения.

Следует однако отметить, что упомянутые скалярные соотношения являются на самом деле частными случаями более общего матричного соотношения (так называемый матричный закон $\sqrt{\epsilon}$), полученного в нашей работе [13] на основе идеи матричного уравнения переноса излучения, предложенной Ивановым [10]. Этот общий матричный закон имеет следующий вид ([13], формула (44)):

$$\hat{S}_2(0)\hat{S}_1(0) = \hat{S}_2^*\hat{\epsilon}^{-1}\hat{S}_1^*, \tag{26}$$

где $\hat{S}_1(\tau)$ и $\hat{S}_2(\tau)$ — решения матричных интегральных уравнений

$$\hat{S}_1(\tau) = \hat{S}_1^* + \int_0^{\infty}\hat{K}(\tau-\tau')\hat{S}_1(\tau')d\tau', \tag{27}$$

$$\hat{S}_2(\tau) = \hat{S}_2^* + \int_0^{\infty}\hat{S}_2(\tau')\hat{K}(\tau'-\tau)d\tau' \tag{28}$$

при $\hat{S}_1^*$ и $\hat{S}_2^*$, не зависящих от τ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{K}(\tau)d\tau \equiv \hat{E} - \hat{\epsilon}, \tag{29}$$

$\hat{E} = \mathrm{diag}\{1\}$. При этом никаких ограничений на размерность и симметрию ядерной матрицы $\hat{K}(\tau)$ не накладывается. В [13] из общего матричного закона был также выведен и матричный закон для случая резонансной поляризации в слабом магнитном поле (эффект Ханле), из которого вытекает и скалярный закон $\sqrt{\epsilon}$, найденный ранее в [4]

В сравнительно недавней работе Штепана и Бомье [12] рассматривалась задача о переносе поляризованного излучения при резонансном рассеянии в полубесконечной плоскопараллельной атмосфере с постоянным (однородным) магнитным полем при учете нетепловых столкновений рассеивающих атомов с возмущающими частицами. В этой работе получено скалярное соотношение между компонентами функции источников на поверхности атмосферы, которое авторы называют обобщенным законом $\sqrt{\epsilon}$.

Можно показать, что закон $\sqrt{\epsilon}$, полученный в [12] в скалярном виде (формула (23)), является частным следствием формулы (26). Действительно, основное векторное уравнение в [12] (формула (18)) можно записать в следующей обобщенной матричной форме:

$$\hat{a}\hat{S}(\tau) = \hat{b} + \int_0^\infty \hat{\hat{K}}(\tau - \tau')\hat{S}(\tau')d\tau', \tag{30}$$

где в частном случае (как, например, в [12]) матрицы $\hat{a} = \mathrm{diag}\{a_i\}$, $\hat{b} = \mathrm{diag}\{b_i\}$, $\hat{S} = \mathrm{diag}\{S_i\}$, а в общем случае они могут быть произвольными, но не зависящими от τ. Важно подчеркнуть, что ядерная матрица в (30) — симметричная: $\hat{\hat{K}}^{\mathrm{T}}(-\tau) = \hat{\hat{K}}(\tau)$. Умножая (30) слева на $\hat{a}^{-1}$, приводим это уравнение к виду (27) при $\hat{K}(\tau) = \hat{a}^{-1}\hat{\hat{K}}(\tau)$ и $\hat{S}_1^* = \hat{a}^{-1}\hat{b}$. Если теперь ввести нормировку ядра $\hat{\hat{K}}(\tau)$ в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\hat{K}}(\tau)d\tau \equiv \hat{E} - \hat{\hat{\epsilon}} \equiv \hat{a}(\hat{E} - \hat{\epsilon}), \tag{31}$$

то матричный закон (26) можно переписать:

$$\hat{S}_2(0)\hat{S}(0) = \hat{S}_2^*[\hat{E} - \hat{a}^{-1}(\hat{E} - \hat{\hat{\epsilon}})]^{-1}\hat{a}^{-1}\hat{b}. \tag{32}$$

Это самый общий (матричный) закон $\sqrt{\epsilon}$ для уравнения вида (30). В частном случае при $\hat{a}^{\mathrm{T}} = \hat{a}$ и $\hat{S}_2^* = (\hat{a}^{-1}\hat{b})^{\mathrm{T}}$ из (28) имеем $\hat{S}_2(\tau) = \hat{S}^{\mathrm{T}}(\tau)$, и тогда формула (32) принимает вид

$$\hat{S}^{\mathrm{T}}(0)\hat{S}(0) = \hat{b}^{\mathrm{T}}\hat{a}^{-1}[\hat{a} - (\hat{E} - \hat{\hat{\epsilon}})]^{-1}\hat{b}, \tag{33}$$

или

$$\hat{a}\hat{S}^{\mathrm{T}}(0)\hat{S}(0) = \hat{a}\hat{b}^{\mathrm{T}}\hat{a}^{-1}[\hat{a} - (\hat{E} - \hat{\hat{\epsilon}})]^{-1}\hat{b}. \tag{34}$$

Если же и $\hat{b}^{\mathrm{T}} = \hat{b}$, то отсюда получаем

$$\hat{a}\hat{S}^{\mathrm{T}}(0)\hat{S}(0) = \hat{b}[\hat{a} - (\hat{E} - \hat{\hat{\epsilon}})]^{-1}\hat{b}, \tag{35}$$

что при $\hat{a} = \mathrm{diag}\{a_i\}$, $\hat{b} = \mathrm{diag}\{b_i\}$, $\hat{S} = \mathrm{diag}\{S_i\}$ переходит в формулу (23) в [12].

Литература

1. *Frisch H.* The Hanle effect. Decomposition of the Stokes parameters into irreducible components // Astron. Astrophys. 2007. Vol. 476. P. 665–674.

2. *Landi Degl'Innocenti E., Bommier V., Sahal-Brechot S.* Resonance line polarization and the Hanle effect in optically thick media. I. Formulation for the two-level atom // Astron. Astrophys. 1990. Vol. 235. P. 459–471.

3. *Faurobert-Scholl M.* Hanle effect with partial frequency redistribution. I. Numerical methods and first applications // Astron. Astrophys. 1991. Vol. 246. P. 469–480.

4. *Frisch H.* The Hanle effect. The density matrix and scattering approaches to the $\sqrt{\epsilon}$-law // Astron. Astrophys. 1998. Vol. 338. P. 683–693.

5. *Грачев С. И.* Образование поляризованных линий: учет эффекта Ханле // Астрон. журн. 2001. Т. 78. С. 1092–1098.

6. *Frisch H.* Resonance polarization and Hanle effect // Proceedings of the 2nd Solar Polarization Workshop: Solar Polarization. 1999. P. 97–113. Kluwer Academic Publishers.

7. *Лоскутов В. М.* Поляризация в резонансных линиях: диффузное отражение // Астрон. журн. 2004. Т. 81. С. 24–32.

8. *Nagendra K. N., Frisch H., Faurobert-Scholl M.* An operator perturbation method for polarized line transfer. III. Applications to the Hanle effect in 1D media // Astron. Astrophys. 1998. Vol. 332. P. 610–628.

9. *Иванов В. В.* Немагнитная поляризация допплеровских ядер резонансных фраунгоферовых линий // Астрон. журн. 1990. Т. 67. С. 1233–1242.

10. *Ivanov V. V.* Generalized Rayleigh scattering. I. Basic theory // Astron. Astrophys. 1995. Vol. 303. P. 609–620.

11. *Landi Degl'Innocenti E., Bommier V.* Resonance line polarization for arbitrary magnetic fields in optically thick media. III. A generalization of the $\sqrt{\epsilon}$-law // Astron. Astrophys. 1994. Vol. 284. P. 865–873.

12. *Štěpán J., Bommier V.* Generalized $\sqrt{\epsilon}$-law. The role of unphysical source terms in resonance line polarization transfer and its importance as an additional test of NLTE radiative transfer codes // astro-ph 0704.157301. Apr. 2007. P. 1–5.

13. *Грачев С. И.* Перенос поляризованного излучения: нелинейные интегральные уравнения для I-матриц в общем случае и при резонансном рассеянии в слабом магнитном поле // Астрофизика. 2001. Т. 44. С. 455–467.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВЫВОД ФОРМУЛЫ (26)

Формула (26) была выведена в [13] при помощи матричного соотношения Хопфа—Бронштейна—Райбики, полученного в [10]. Однако ее можно вывести гораздо проще, используя резольвенту $\hat{\Gamma}(\tau, \tau')$ и резольвентные функции $\hat{\Phi}_1(\tau) = \hat{\Gamma}(\tau, 0)$, $\hat{\Phi}_2(\tau) = \hat{\Gamma}(0, \tau)$ матричных интегральных уравнений (27) и (28).

Дифференцируя уравнение (27), имеем $\hat{S}_1'(\tau) = \hat{\Phi}_1(\tau)\hat{S}_1(0)$, где

$$\hat{\Phi}_1(\tau) = \hat{K}(\tau) + \int_0^\infty \hat{K}(\tau - \tau')\hat{\Phi}_1(\tau')d\tau' \tag{36}$$

или, после интегрирования,

$$\hat{S}_1(\infty) = \left[\hat{E} + \int_0^\infty \hat{\Phi}_1(\tau)d\tau\right]\hat{S}_1(0). \tag{37}$$

С другой стороны,

$$\hat{S}_1(\tau) = \hat{S}_1^* + \int_0^\infty \hat{\Gamma}(\tau, \tau')\hat{S}_1^* d\tau' \tag{38}$$

или

$$\hat{S}_1(0) = \left[\hat{E} + \int_0^\infty \hat{\Phi}_2(\tau)d\tau\right]\hat{S}_1^*. \tag{39}$$

Из (27) непосредственно следует, что

$$\hat{S}_1(\infty) = \hat{\epsilon}^{-1}\hat{S}_1^*, \tag{40}$$

и (37) переписывается в виде

$$\hat{\epsilon}^{-1}\hat{S}_1^* = \left[\hat{E} + \int_0^\infty \hat{\Phi}_1(\tau)d\tau\right]\hat{S}_1(0). \tag{41}$$

Подставляя сюда в правую часть вместо $\hat{S}_1(0)$ правую часть (39), получаем

$$\left[\hat{E} + \int_0^\infty \hat{\Phi}_1(\tau)d\tau\right]\left[\hat{E} + \int_0^\infty \hat{\Phi}_2(\tau)d\tau\right] = \hat{\epsilon}^{-1}. \tag{42}$$

Аналогичным образом из уравнения (28) можно вывести формулы, связывающие $\hat{S}_2(0)$ с $\hat{S}_2(\infty)$ и являющиеся аналогами формул (41) и (39):

$$\hat{S}_2^*\hat{\epsilon}^{-1} = \hat{S}_2(0)\left[\hat{E} + \int_0^\infty \hat{\Phi}_2(\tau)d\tau\right], \tag{43}$$

$$\hat{S}_2(0) = \hat{S}_2^*\left[\hat{E} + \int_0^\infty \hat{\Phi}_1(\tau)d\tau\right]. \tag{44}$$

Перемножая правые и левые части формул (44) и (39) и используя (42), получаем формулу (26).

Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (грант № 6.38.18.2014).

Статья поступила в редакцию 26 июня 2014 г.

Сведения об авторах

Грачев Станислав Иванович — доктор физико-математических наук; s.grachev@spbu.ru

THE FORMATION OF POLARIZED LINES: FACTORIZATION OF THE HANLE PHASE MATRIX AND $\sqrt{\epsilon}$ LAW IN THE MOST GENERAL FORM

Stanislav I. Grachev

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9,
St.Petersburg, 199034, Russian Federation; s.grachev@spbu.ru

We consider the problem of the transfer polarized radiation under resonance scattering in a medium with a weak magnetic field, taking into account the Hanle effect. In the past, this problem has become very important in connection with the high degrees of polarization discovered in numerous Fraunhofer lines observed in the solar spectrum. The Hanle phase matrix describes redistribution of radiation in direction and polarization in a single scattering in cases when frequency redistribution can be separated from redistribution in direction and polarization, as for example in the case of complete frequency redistribution. The Hanle phase matrix depends on the angular dependence of the Stokes parameters for incoming and scattered radiation, as well as on the direction and magnitude of the magnetic field. We derive the factorization of the Hanle phase matrix as a product of 3×6 and 6×6 matrices. Each of these matrices depends only on one of the angular dependences. This factorization greatly simplifies the problem of polarized radiative transfer in a weak magnetic field. It allows reduction of the problem to finding a vector source function that depends only on optical depth.

We also give a simple derivation of the so-called $\sqrt{\epsilon}$ law in its most general matrix form. We show that in some cases it contains previously published scalar equations that connect different components of the vector source function for the surface of a semi-infinite medium with homogeneously distributed primary sources of partially polarized radiation. This general $\sqrt{\epsilon}$ law gives one of only a few exact analytical results in the theory of polarized radiation transfer. It can also be used also for predicting the radiation field and testing numerical codes of radiative transfer. Refs 13.

Keywords: spectral lines, radiative transfer, polarization, magnetic fieldes, solar spectrum.