

О ГРАВИТАЦИОННОМ ПОТЕНЦИАЛЕ ШАРОВОГО СЕГМЕНТА*

К. В. Холшевников^{1,2}, В. Ш. Шайдулин^{1,3}

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

² Институт прикладной астрономии РАН,

Российская Федерация, 191187, Санкт-Петербург, наб. Кутузова, 10

³ Главная (Пулковская) обсерватория РАН,

Российская Федерация, 196140, Санкт-Петербург, Пулковское шоссе, 65/1

Наиболее употребительным представлением гравитационного потенциала V компактного тела T во внешнем пространстве в сферических координатах r, θ, λ служит ряд Лапласа

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{M}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \lambda).$$

Здесь M — масса T , R — радиус объемлющей T сферы, Y_n — безразмерная сферическая функция. Для тел нерегулярной структуры известна оценка чебышёвской нормы (максимум модуля функции на сфере):

$$\langle Y_n \rangle \leq C n^{-5/2}, \quad C = \text{const}, \quad n \geq 1.$$

В работе получено явное выражение $Y_n(\theta, \lambda)$ для однородного сферического сегмента в трех системах отсчета. В тех из них, в которых ребро сегмента лежит на объемлющей сфере, справедлива указанная оценка $\langle Y_n \rangle$ при точном показателе $5/2$. Если же сегмент касается объемлющей сферы, то $\langle Y_n \rangle$ убывает значительно быстрее. Именно,

$$\langle Y_n \rangle \leq C n^{-5/2} p^n, \quad C = \text{const}, \quad n \geq 1.$$

Величина p равна расстоянию от начала координат до ребра сегмента, выраженному в радиусах объемлющей сферы. Библиогр. 4 назв. Ил. 3.

Ключевые слова: гравитационный потенциал, ряд Лапласа, скорость сходимости.

Введение. Наиболее употребительным представлением гравитационного потенциала V компактного тела T во внешнем пространстве в сферических координатах r, θ, λ служит ряд Лапласа

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{M}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \lambda). \quad (1)$$

Здесь M — масса T , R — масштабный множитель, Y_n — безразмерная сферическая функция, постоянная тяготения принята равной единице. В общем случае сферическая функция зависит от $2n + 1$ параметров (коэффициентов Стокса). В случае осевой симметрии $Y_n(\theta, \lambda) \equiv Y_n(\theta) = c_n P_n(\cos \theta)$, и остается лишь один параметр c_n . Как обычно, P_n обозначает многочлен Лежандра со стандартной нормировкой $P_n(1) = 1$. Формула (1) принимает вид

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{M}{R} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta). \quad (2)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №14-02-00804) и СПбГУ (грант 6.37.110.2011).

Как принято в теоретических исследованиях, за R примем радиус объемлющей сферы \mathbb{S} , содержащей T внутри себя и имеющей с T хотя бы одну общую точку.

Рассмотрим класс \mathcal{T} компактных тел с ограниченной интегрируемой плотностью $\varrho(r, \theta, \lambda)$, имеющей равномерно ограниченную вариацию вдоль любой окружности с центром в начале координат. Для тел $T \in \mathcal{T}$ известна оценка [1, 2]

$$\langle Y_n \rangle \leq \frac{C}{n^{5/2}}. \quad (3)$$

Через C здесь и ниже обозначены различные постоянные, зависящие от свойств плотности ϱ , $\langle \cdot \rangle$ — чебышёвская норма, максимум модуля функции на сфере. Мы считаем $n \geq 1$, так как Y_0 тождественно равно единице.

Заметим, что в осесимметричном случае

$$\langle Y_n \rangle = |c_n|. \quad (4)$$

На одном примере (однородный полушар) в [1, 2] показана точность показателя $5/2$ в оценке (3). Здесь мы приведем еще один пример тела, для которого показатель $5/2$ достигается. Одновременно построим пример тела, для которого сферические функции убывают значительно быстрее, а именно

$$\langle Y_n \rangle \leq \frac{C}{n^{5/2}} p^n, \quad 0 < p < 1. \quad (5)$$

Потенциал шарового сегмента. Рассмотрим однородный шаровой сегмент T с радиусом a и углом полураствора α , $0 < \alpha \leq \pi/2$. На рис. 1 представлено сечение T плоскостью, проходящей через ось симметрии.

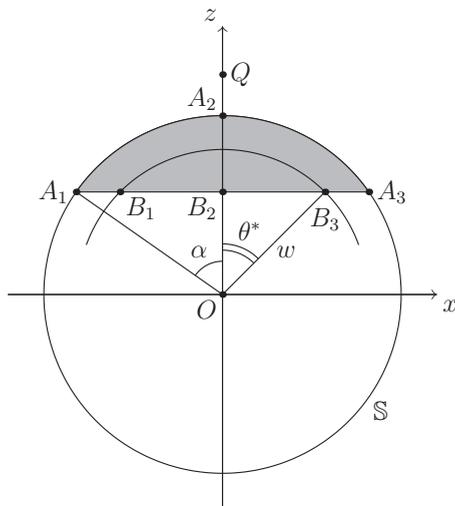


Рис. 1. Сечение шарового сегмента плоскостью, проходящей через ось симметрии z ; $OA_1 = OA_2 = OA_3 = a$, $\angle A_1OA_2 = \alpha$; $OB_2 = a \cos \alpha$; при фиксированном $w = OB_1 = OB_3$ угол θ меняется от 0 до θ^* , $\cos \theta^* = (a/w) \cos \alpha$.

В системе \mathcal{O} с началом в центре шара O сегмент T задается неравенствами

$$a \cos \alpha \leq w \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq \theta^*(w),$$

где $\cos \theta^*(w) = (a/w) \cos \alpha$. Вычислим объем сегмента

$$\tau = \int_{a \cos \alpha}^a w^2 dw \int_0^{\theta^*} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\lambda = \frac{4}{3} \pi a^3 \sin^4 \frac{\alpha}{2} (2 + \cos \alpha). \quad (6)$$

Потенциал сегмента на оси симметрии при $z \geq a$ по общей теории равен

$$\begin{aligned} V(z) &= 2\pi \varrho \int_{a \cos \alpha}^a w^2 dw \int_0^{\theta^*} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{w^2 - 2wz \cos \theta + z^2}} = \\ &= \frac{2\pi \varrho}{z} \int_{a \cos \alpha}^a \left[w(w-z) + w\sqrt{w^2 - 2az \cos \alpha + z^2} \right] dw = \\ &= \frac{2\pi \varrho}{z} \left[\frac{1}{3} w^3 - \frac{1}{2} w^2 z + \frac{1}{3} (w^2 - 2az \cos \alpha + z^2)^{3/2} \right]_{w=a \cos \alpha}^{w=a}. \end{aligned}$$

Окончательно,

$$V(z) = \frac{\pi \varrho}{3z} \left[2a^3 - 3a^2 z (1 + \cos^2 \alpha) + 6az^2 \cos \alpha - 2z^3 + 2(a^2 - 2az \cos \alpha + z^2)^{3/2} \right]. \quad (7)$$

Ряд Лапласа шарового сегмента в системе отсчета \mathcal{O} . В системе отсчета \mathcal{O} имеем $z = r$, $a = R$, и (7) переходит в

$$V(r) = \frac{\pi a^3 \varrho}{3r} \left[2 - \frac{3}{u} (1 + \cos^2 \alpha) + \frac{6}{u^2} \cos \alpha - \frac{2}{u^3} + \frac{2}{u^3} (1 - 2u \cos \alpha + u^2)^{3/2} \right], \quad (8)$$

где $u = R/r$. С учетом формулы (18)

$$V(r) = \frac{\pi a^3 \varrho}{3r} \left[4 \sin^4 \frac{\alpha}{2} (2 + \cos \alpha) + 6 \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1,2}(\cos \alpha) u^n \right], \quad (9)$$

где многочлены $P_{nk}(x)$ определены в Приложении, с. 162. Ряд (9) имеет вид (2) при

$$c_n = \frac{2\pi a^3 \varrho}{M} P_{n+1,2}(\cos \alpha) = \frac{3}{2(2 + \cos \alpha) \sin^4(\alpha/2)} P_{n+1,2}(\cos \alpha), \quad (10)$$

где использовано равенство (6). Формула (19) доставляет искомую асимптотику при $n \rightarrow \infty$:

$$c_n \sim \frac{C}{n^{5/2}} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha - \frac{\pi}{4} \right], \quad (11)$$

где

$$C = \frac{6}{2 + \cos \alpha} \sqrt{\frac{\cos^3(\alpha/2)}{\pi \sin^5(\alpha/2)}}.$$

Последовательность косинусов в (11) при любом $\alpha \leq \pi/2$ содержит подпоследовательность, отделенную от нуля, что доказывает точность оценки (3).

Ряд Лапласа шарового сегмента в системе отсчета \mathcal{O}_1 . Обратимся к системе отсчета \mathcal{O}_1 , отличающейся от \mathcal{O} сдвигом начала вверх, в точку $O_1(0, 0, b)$,

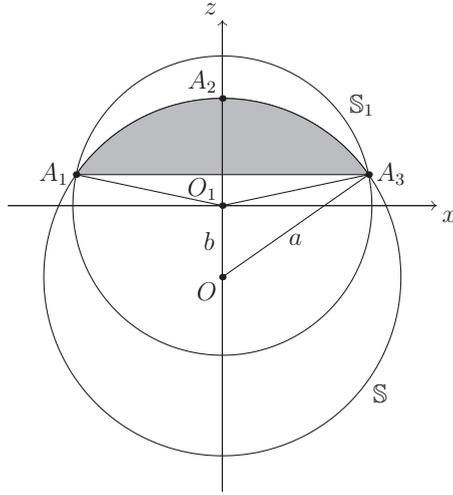


Рис. 2. Сечение шарового сегмента в системе отсчета O_1 ; $OO_1 = b$, $R = O_1A_1 = \sqrt{a^2 - 2ab \cos \alpha + b^2}$. Объемлющая сфера S_1 проходит через точки A_1, A_3 .

$b > 0$. В этой системе объемлющая сфера S_1 проходит через точки A_1, A_3 , $R = \sqrt{a^2 - 2ab \cos \alpha + b^2} > |a - b| = O_1A_2$, см. рис. 2.

Положим

$$r = z - b, \quad R = \sqrt{a^2 - 2ab \cos \alpha + b^2}, \quad u = \frac{R}{r}, \quad z = \frac{R + bu}{u}. \quad (12)$$

Формула (7) примет вид

$$V = \frac{2\pi qu}{3(R + bu)}(V_1 + V_2). \quad (13)$$

Здесь

$$V_1 = a^3 - 3a^2(1 + \cos^2 \alpha) \frac{R + bu}{2u} + 3a \cos \alpha \frac{(R + bu)^2}{u^2} - \frac{(R + bu)^3}{u^3},$$

$$V_2 = \frac{R^3}{u^3} (1 - 2\xi u + u^2)^{3/2},$$

где

$$\xi = \frac{a \cos \alpha - b}{R}, \quad |\xi| \leq 1.$$

Вспользуемся формулой (18):

$$V_2 = \frac{R^3}{u^3} \left\{ 1 - 3\xi u + \frac{3}{2}(\xi^2 + 1)u^2 + \left(\frac{1}{2}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi \right) u^3 + 3 \sum_{n=2}^{\infty} P_{n2}(\xi) u^{n+2} \right\}.$$

Отсюда

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{2} a^3 (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 2) + 3R^3 \sum_{n=2}^{\infty} P_{n2}(\xi) u^{n-1}. \quad (14)$$

Асимптотика (19) показывает, что общий член ряда (14) имеет порядок $n^{-5/2}$. Делитель $R + bu$ в (13) не влияет на показатель степени общего члена ряда Лапласа, поскольку особая точка $u = -R/b$ лежит вне единичного круга $|u| = 1$. Это доказывает точность показателя $5/2$ в оценке (3) для тела T .

Ряд Лапласа шарового сегмента в системе отсчета O_2 . Обратимся к системе отсчета O_2 , отличающейся от O сдвигом начала вниз, в точку $O_2(0, 0, -b)$, $b > 0$. В этой системе объемлющая сфера S_2 проходит через точку A_2 , касаясь сегмента; $R = O_2A_2 = a + b$, см. рис. 3. Ниже понадобится расстояние $R_0 = O_2A_1 = \sqrt{a^2 + 2ab \cos \alpha + b^2}$. Очевидно,

$$a < R_0, \quad b < R_0, \quad R_0 < R. \quad (15)$$

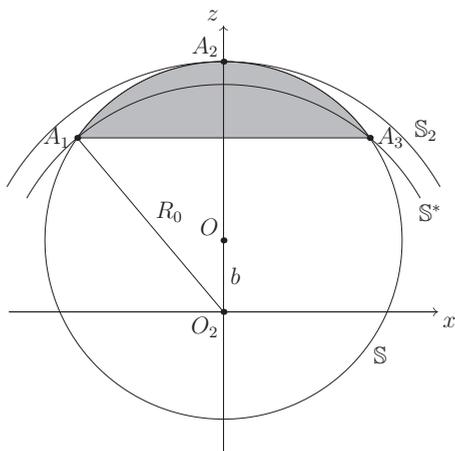


Рис. 3. Сечение шарового сегмента в системе отсчета O_2 ; $O_2O = b$, $R_0 = O_2A_1 = \sqrt{a^2 + 2ab \cos \alpha + b^2}$, $R = a + b$, $R > R_0$. Объемлющая сфера S_2 проходит через точку A_2 ; проходящая через A_1, A_3 окружность с центром в O_2 представляет сечение границы области сходимости ряда Лапласа S^* .

Положим

$$r = z + b, \quad R = a + b, \quad u = \frac{R_0}{r}, \quad z = \frac{R_0 - bu}{u}. \quad (16)$$

Формулы (13)–(14) остаются в силе, если сделать подстановку $R \mapsto R_0$, $b \mapsto -b$. По-прежнему $R_0/b > 1$. Это опять приводит к точному показателю $5/2$ при замене R на R_0 . Это значит, что вместо (3) мы приходим к оценке (5) при

$$p = \frac{R_0}{R} = \frac{\sqrt{a^2 + 2ab \cos \alpha + b^2}}{a + b} < 1. \quad (17)$$

Границей сходимости ряда Лапласа S^* служит сфера с центром O_2 , проходящая через точки A_1, A_3 . Заметим, что на рисунках изображено сечение сегмента и сфер. В пространстве точкам A_1, A_3 отвечает ребро сегмента, так что сфера и сегмент имеют общую окружность.

Таким образом, ряд Лапласа сегмента T сходится и под объемлющей сферой при $r > R_0$, как и должно быть согласно [2], поскольку ребро T находится под ней, а выше

поверхность T аналитична, причем она касается объемлющей сферы в общей точке. Заметим, что область сходимости ряда Лапласа определяется ребром поверхности T (рис. 3).

Заключение. Мы исследовали скорость сходимости ряда Лапласа (1) одного тела вращения — сферического сегмента — в различных системах отсчета, различающихся выбором начала координат. Установлены следующие свойства, которые, возможно, справедливы для широкого класса тел. Обозначим через ∂T поверхность тела T , предполагаемого компактным, а через \mathcal{S} пересечение ∂T и объемлющей сферы \mathbb{S} .

- Если \mathcal{S} состоит из одной точки, в окрестности которой ∂T аналитична, то $\langle Y_n \rangle$ убывает в геометрической прогрессии согласно (5), причем p равно расстоянию до ближайшей угловой точки ∂T , деленному на радиус объемлющей сферы R .
- Если \mathcal{S} состоит из некоторой кривой, содержащей ребро поверхности ∂T , то $\langle Y_n \rangle$ убывает по степенному закону (3) при равном $5/2$ показателе.
- Если \mathcal{S} состоит из части сферы \mathbb{S} положительной площади, и граница \mathcal{S} представляет собой ребро поверхности ∂T , то $\langle Y_n \rangle$ убывает по степенному закону (3) при равном $5/2$ показателе.

Приложение

1. Производящие функции.

На произведении отрезка $-1 \leq x \leq 1$ и круга $|z| < 1$ справедливы разложения

$$(1 - 2xz + z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n,$$

$$(1 - 2xz + z^2)^{1/2} = 1 - xz - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n1}(x)z^{n+1},$$

$$(1 - 2xz + z^2)^{3/2} = 1 - 3xz + \frac{3}{2}(x^2 + 1)z^2 + \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)z^3 + 3 \sum_{n=2}^{\infty} P_{n2}(x)z^{n+2}. \quad (18)$$

Здесь P_n — многочлен Лежандра, P_{nk} — последовательные интегралы

$$P_{nk}(x) = \int_{-1}^x P_{n,k-1}(y) dy.$$

2. Асимптотика P_{nk} :

$$P_{nk}(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin^{k-1/2} \theta}{n^{k+1/2}} \left\{ \cos \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \theta + \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} \right] + \frac{r_k(n, \theta)}{n \sin^{k+1} \theta} \right\}. \quad (19)$$

где $r_k(n, \theta)$ ограничены при $0 \leq \theta \leq \pi$, $n \geq 2$.

Формулы (18), (19) содержатся в [3, 4].

Литература

1. *Kholshevnikov C.* On Convergence of an Asymmetrical Body Potential Expansion in Spherical Harmonics // *Celestial Mechanics*, 16, 1, 1977, 45–60.
2. *Антонов В. А., Тимошкова Е. И., Холшевников К. В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988. 270 с.
3. *Антонов В. А., Холшевников К. В., Шайдюлин В. Ш.* Об оценке производой многочлена Лежандра // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. I.* 2010. Вып. 4. С. 3–9.
4. *Холшевников К. В., Шайдюлин В. Ш.* О свойствах интегралов от многочлена Лежандра // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. I.* 2014. Т. 1(59). Вып. 1. С. 55–67.

Статья поступила в редакцию 23 октября 2014 г.

Сведения об авторах

Холшевников Константин Владиславович — доктор физико-математических наук, профессор; kvk@astro.spbu.ru

Шайдюлин Вахит Шамильевич — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник; shvak@yandex.ru

ON THE GRAVITATIONAL POTENTIAL OF A SEGMENT OF A SPHERE

Konstantin V. Kholshevnikov^{1,2}, Vakhit Sh. Shaidulin^{1,3}

¹ St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; kvk@astro.spbu.ru, shvak@yandex.ru

² Institute of Applied Astronomy RAS, nab. Kutuzova, 10, St. Petersburg, 191187, Russian Federation; kvk@astro.spbu.ru

³ Pulkovo Observatory of RAS, Pulkovskoye chaussee, 65/1, St.Petersburg, 196140, Russian Federation; shvak@yandex.ru

The Laplace series

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{M}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \lambda)$$

represents currently popular form of the representation of the gravitational potential V for a cosmic compact body T in spherical coordinates r, θ, λ . Here M, R, Y_n are the mass of T , the radius of a sphere enveloping T , and a dimensionless spherical harmonic, respectively. There exists a well-known estimate

$$\langle Y_n \rangle \leq C n^{-5/2}, \quad C = \text{const}, \quad n \geq 1$$

of the Chebyshevian norm (maximum of the modulus) for bodies of irregular structure. In the present paper an explicit representation of $Y_n(\theta, \lambda)$ for a homogeneous segment of a sphere is obtained in three reference systems. If the edge of the segment lies on the enveloping sphere, the indicated estimate $\langle Y_n \rangle$ is valid for an exponent exactly equal to $5/2$. If the segment touches the enveloping sphere, then $\langle Y_n \rangle$ decreases much faster. Namely,

$$\langle Y_n \rangle \leq C n^{-5/2} p^n, \quad C = \text{const}, \quad n \geq 1.$$

The quantity p equals the distance from the origin of the coordinate system to the edge of the segment, expressed in units of the radius of the enveloping sphere. Refs 4. Figs 3.

Keywords: gravitational potential, Laplace series, rate of convergence.

References

1. *Kholshevnikov C.*, “On Convergence of an Asymmetrical Body Potential Expansion in Spherical Harmonics”, *Celestial Mechanics* 16, 1, 45–60 (1977).
2. *Antonov V. A., Timoshkova E. I., Kholshevnikov K. V.*, “Introduction to the Theory of Newtonian Potential” (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].
3. *Antonov V. A., Kholshevnikov K. V., Shaidulin V. Sh.*, “Estimating the derivative of the Legendre polynomial”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* 43(4), 191–197 (2010).
4. *Kholshevnikov K. V., Shaidulin V. Sh.*, “On properties of the integrals of Legendre polynomial”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* 47(1), 28–38 (2014).