УДК 517.925

Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 1

ОБОБЩЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ СИСТЕМ ОДУ С НЕВОЗМУЩЕННОЙ ЧАСТЬЮ $(x_2, \pm x_1^{2n-1})$

В. В. Басов, Л. С. Михлин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Конструктивным методом получены все структуры обобщенных нормальных форм, к которым почти тождественной заменой может быть сведена двумерная автономная система ОДУ с невозмущенной частью $(x_2,\ \pm x_1^{2n-1})$ для $\forall\, n \geq 2$. Библиогр. 3 назв.

Ключевые слова: обобщенная нормальная форма, квазиоднородные многочлены, резонансные уравнения.

1. Введение. В работе рассматривается вещественная двумерная аналитическая в нуле система

$$\dot x_1 = x_2 + \sum_{k=n}^{\infty} X_1^{[k]}(x_1,x_2), \quad \dot x_2 = \sigma x_1^{2n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} X_2^{[k]}(x_1,x_2) \qquad (\sigma = \pm 1,\ n \geq 2), \tag{1}$$

невозмущенная часть которой $(x_2, \sigma x_1^{2n-1})$ является квазиоднородным многочленом обобщенной степени $n-1$ с весом $\gamma = (1,n)$, а возмущения $X_i(x_1,x_2)$ разложены в суммы квазиоднородных многочленов $X_i^{[k]}(x_1,x_2)$ обобщенной степени k $(k \geq n)$ с тем же весом, т. е. $X_i^{[k]} = \sum_{q_1+nq_2=k+\gamma_i} X_i^{[q_1,nq_2]} x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ $(i=1,2)$.

Вопросы, связанные с нормализацией системы (1) в частном случае, когда $n=2$, были исследованы в работах [1, 2]. Определения веса, обобщенной степени и квазиоднородного многочлена (КОМ) можно найти, например, в [2, разд. 2].

Пусть формальная почти тождественная замена

$$x_i = y_i + \sum_{k=n}^{\infty} h_i^{[k-n+1]}(y_1,y_2) \qquad (i=1,2), \tag{2}$$

в которой $h_i^{[k-n+1]} = \sum_{q_1+nq_2=k-n+1+\gamma_i} h_i^{[q_1,nq_2]} y_1^{q_1} y_2^{q_2}$, преобразует (1) в систему

$$\dot y_1 = y_2 + Y_1(y_1,y_2), \quad \dot y_2 = \sigma y_1^{2n-1} + Y_2(y_1,y_2) \qquad (\sigma = \pm 1,\ n \geq 2), \tag{3}$$

где возмущения $Y_i = \sum_{k=n}^{\infty} Y_i^{[k]}(y_1,y_2)$, а КОМ $Y_i^{[k]} = \sum_{q_1+nq_2=k+\gamma_i} Y_i^{[q_1,\,nq_2]} y_1^{q_1} y_2^{q_2}$.

Задача заключается в том, чтобы методом резонансных уравнений, подробно описанном, например, в [2, разд. 4], в явном виде указать все структуры обобщенных нормальных форм (3), к которым можно привести систему (1) почти тождественными заменами (2). При этом с определениями резонансных уравнений, резонансных наборов и обобщенной нормальной формы (ОНФ) можно ознакомиться также в [2, разд. 4].

Таким образом, предлагаемая работа является обобщением работ [1, 2] на случай произвольного n. Кроме того, она непосредственно усиливает полученные в [1, 2] результаты, так как более чем в два раза уменьшает число не установленных точно резонансных коэффициентов системы.

2. Получение связующей системы. Дифференцируя замену (2) в силу систем (1), (3) и выделяя члены обобщенной степени $k \geq n$, получаем тождества

$$\begin{gathered}\frac{\partial h_1^{[k-n+1]}}{\partial y_1}y_2+\frac{\partial h_1^{[k-n+1]}}{\partial y_2}\sigma y_1^{2n-1}-h_2^{[k-n+1]}+Y_1^{[k]}=\widetilde{Y}_1^{[k]},\\ \frac{\partial h_2^{[k-n+1]}}{\partial y_1}y_2+\frac{\partial h_2^{[k-n+1]}}{\partial y_2}\sigma y_1^{2n-1}-(2n-1)\sigma y_1^{2n-2}h_1^{[k-n+1]}+Y_2^{[k]}=\widetilde{Y}_2^{[k]},\end{gathered}\tag{4}$$

причем величины $\widetilde{Y}_1^{[k]}$ и $\widetilde{Y}_2^{[k]}$ при последовательных относительно k вычислениях коэффициентов уже известны, так как содержат только предшествующие КОМ.

Приравнивая коэффициенты при $y_1^{q_1}y_2^{q_2}$, получаем линейную связующую систему

$$\begin{gathered}(q_1+1)h_1^{[q_1+1,\,n(q_2-1)]}+\sigma(q_2+1)h_1^{[q_1-(2n-1),\,n(q_2+1)]}-\\ -h_2^{[q_1,\,nq_2]}=\widehat{Y}_1^{[q_1,nq_2]}\quad(q_1+nq_2=k+\gamma_1),\\ (q_1+1)h_2^{[q_1+1,\,n(q_2-1)]}+\sigma(q_2+1)h_2^{[q_1-(2n-1),\ n(q_2+1)]}-\\ -(2n-1)\sigma h_1^{[q_1-(2n-2),\,nq_2]}=\widehat{Y}_2^{[q_1,nq_2]}\quad(q_1+nq_2=k+\gamma_2),\end{gathered}\tag{5}$$

в которой $\widehat{Y}_i^{[q_1,nq_2]}=\widetilde{Y}_i^{[q_1,nq_2]}-Y_i^{[q_1,nq_2]}$ $(i=1,2)$, $\gamma_1=1$, $\gamma_2=n$.

Поскольку $k \geq n$, а $q_1 \in \mathbb{Z}_+$, для k и q_1 удобно ввести следующее разложение:

$$k=2nr+v-n\ \ (r\in\mathbb{N},\ v=0,1,\dots,2n-1),\quad q_1=2ns+l\ \ (s\in\mathbb{Z}_+,\ l=0,1,\dots 2n-1).$$

Тогда $q_2=2r-2s-1+(\gamma_i+v-l)/n$.

Таким образом, для $\forall\, k\geq n\geq 2$ индекс $q_2\in\mathbb{Z}_+$ в следующих двух случаях:

a) $l=(v+1 \mod 2n)$, $q_1=2ns+v+1$, $q_2=2r-2s-1$ $(s=\overline{\tau_1^{va},r-1}\,)$ при $i=1$ и $l=v$, $q_1=2ns+v$, $q_2=2r-2s$ $(s=\overline{0,r})$ при $i=2$;

b) $l=(v+n+1 \mod 2n)$, $q_1=2ns+v+n+1$, $q_2=2r-2s-2$ $(s=\overline{\tau_1^{vb},r-1})$ при $i=1$ и $l=(v+n \mod 2n)$, $q_1=2ns+v+n$, $q_2=2r-2s-1$ $(s=\overline{\tau_2^{vb},r-1})$ при $i=2$.

Здесь $\tau_1^{va}=\{0$ при $v=\overline{0,2n-2}$; -1 при $v=2n-1\}$, $\tau_1^{vb}=\{0$ при $v=\overline{0,n-2}$; -1 при $v=\overline{n-1,2n-1}\}$, $\tau_2^{vb}=\{0$ при $v=\overline{0,n-1}$; -1 при $v=\overline{n,2n-1}\}$.

3. Структура связующей системы в случае *a*. Введем новые обозначения: $h_{1,s}^{va}=h_1^{[2n(s-1)+v+2,\,2n(r-s)]}$ $(s=\overline{\tau^{va},r})$, где $\tau^{va}=\{1$ при $v=\overline{0,2n-3}; 0$ при $v=\overline{2n-2,2n-1}\}$; $h_{2,s}^{va}=h_2^{[2ns+v+1,\,2n(r-s-1)+n]}$, $Y_{2,s}^{va}=\widehat{Y}_2^{[2ns+v,\,2n(r-s)]}$ $(s=\overline{0,r})$, $Y_{1,s}^{va}=\widehat{Y}_1^{[2ns+v+1,\,2n(r-s-1)+n]}$ $(s=\overline{\tau_1^{va},r-1}\,)$. Тогда система (5) примет вид

$$\begin{gathered}\sigma(2r-2s)h_{1,s}^{va}+(2ns+v+2)h_{1,s+1}^{va}-h_{2,s}^{va}=Y_{1,s}^{va}\quad(s=\overline{\tau_1^{va},r-1}),\\ -(2n-1)\sigma h_{1,s}^{va}+\sigma(2r-2s+1)h_{2,s-1}^{va}+(2ns+v+1)h_{2,s}^{va}=Y_{2,s}^{va}\quad(s=\overline{0,r}).\end{gathered}\tag{6}$$

Подставляя $h_{2,s-1}^{va}$ и $h_{2,s}^{va}$ из (6_1) в (6_2), получаем трехдиагональную систему

$$a_s^{va}h_{1,s-1}^{va}+b_s^{va}h_{1,s}^{va}+c_s^{va}h_{1,s+1}^{va}=Y_{0,s}^{va}\qquad(s=\overline{0,r}\,),\tag{7}$$

в которой

$a_s^{va}=(2r-2s+1)(2r-2s+2)$ $(s=\overline{\tau^{va}+1,r}\,)$,
$b_s^{va}=\sigma((2r-2s)(4ns-2n+2v+3)+2ns-4n+v+3)$ $(s=\overline{\tau^{va},r}\,)$,
$c_s^{va}=(2ns+v+1)(2ns+v+2)$ $(s=\overline{\tau^{va}-1,r-1}\,)$;

$Y^{va}_{0,s} = \sigma(2r-2s+1)Y^{va}_{1,s-1}+(2ns+v+1)Y^{va}_{1,s}+Y^{va}_{2,s}$ $(s=\overline{0,r}\,)$, причем $Y^{va}_{1,-1}, Y^{va}_{1,r}=0$ для всех v, кроме $Y^{2n-1\,a}_{1,-1}$.

Запишем (7) в матричном виде, выделяя при $v=\overline{0,2n-3}$ первое уравнение:

$$c^{va}_0 h^{va}_{1,1} = Y^{va}_{0,0} \quad (v=\overline{0,2n-3}), \qquad A^{va}h^{va}_1 = Y^{va}_0 \quad (v=\overline{0,2n-1}), \tag{8}$$

где $A^{va} = \begin{pmatrix} b^{va}_{\tau^{va}} & c^{va}_{\tau^{va}} & 0 & \ldots & 0 \\ a^{va}_{\tau^{va}+1} & b^{va}_{\tau^{va}+1} & c^{va}_{\tau^{va}+1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a^{va}_{r-1} & b^{va}_{r-1} & c^{va}_{r-1} \\ 0 & \ldots & 0 & a^{va}_r & b^{va}_r \end{pmatrix}_{(r-\tau^{va}+1)}$, $\quad \begin{array}{l} h^{va}_1 = (h^{va}_{1,\tau^{va}},\ldots,h^{va}_{1,r}), \\ Y^{va}_0 = (Y^{va}_{0,\tau^{va}},\ldots,Y^{va}_{0,r}). \end{array}$

Методом Гаусса аннулируем в A^{va} элементы $a^{va}_{\tau^{va}+1}, a^{va}_{\tau^{va}+2},\ldots$, получая d^{va}_s вместо b^{va}_s и $\overline{Y}^{va}_{0,s}$ вместо $Y^{va}_{0,s}$, пока $d^{va}_{s-1}\neq 0$ $(s\geq\tau^{va})$, по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} &d^{va}_{\tau^{va}} = b^{va}_{\tau^{va}}, \quad \overline{Y}^{va}_{0,\tau^{va}} = Y^{va}_{0,\tau^{va}}; \\ &d^{va}_s = b^{va}_s - \frac{a^{va}_s\,c^{va}_{s-1}}{d^{va}_{s-1}}, \quad \overline{Y}^{va}_{0,s} = Y^{va}_{0,s} - \frac{\overline{Y}^{va}_{0,s-1}\,a^{va}_s}{d^{va}_{s-1}} \quad (s=\tau^{va}+1,\ \tau^{va}+2,\ldots). \end{aligned} \tag{9}$$

Лемма 1. *В формуле* (9) *элементы* $\sigma d^{va}_{\tau^{va}},\ldots,\sigma d^{va}_{r-1}>0$, *а элемент* $\sigma d^{va}_r<0$, *кроме* $d^{2n-3\,a}_1=0$ *при* $r=1$.

Доказательство. Из (7) и (9) получаем $d^{2n-3\,a}_1=0$ при $r=1$. Пусть теперь $r>1$.

Для оценки снизу элементов σd^{va}_s при $s=\overline{\tau^{va},r-1}$ введем положительные функции $\zeta^{va}_s=(2r-2s-1)(2ns+v+1)$.

Покажем методом математической индукции, что $\sigma d^{va}_s\geq\zeta^{va}_s$ при $s=\overline{\tau^{va},r-1}$.

В (9) $\sigma d^{va}_1 = 4nr+4vr+6r-6n-3v-3 > 4nr+2vr+2r-6n-3v-3=\zeta^{va}_1$ $(v=\overline{0,2n-3})$, $\sigma d^{va}_0 = 4rv+6r-4rn-4n+v+3\geq 2vr+2r-v-1=\zeta^{va}_0$ $(v=2n-2,2n-1)$.

Пусть для некоторого $s-1=\overline{\tau^{va},r-2}$ верно неравенство $\sigma d^{va}_{s-1}\geq\zeta^{va}_{s-1}$. Тогда согласно (9) имеем $\sigma d^{va}_s=\sigma b^{va}_s - a^{va}_s c^{va}_{s-1}(\sigma d^{va}_{s-1})^{-1}\geq(2r-2s)(4ns-2n+2v+3)+2ns-4n+v+3-(2r-2s+2)(2ns-2n+v+2)=\zeta^{va}_s$.

Для оценки сверху элементов σd^{va}_s при $s=\overline{\tau^{va},r}$ введем функции $\eta^{va}_s=\{(2r-2s)(2ns+2v+3)$ при $v=\overline{0,2n-3}$; $(2r-2s)(2ns+v+4)$ при $v=2n-2,2n-1\}$.

Покажем методом математической индукции, что $\sigma d^{va}_s<\eta^{va}_s$ при $s=\overline{\tau^{va}+1,r}$.

В (9) $\sigma d^{va}_1=4nr+4vr+6r-6n-3v-3\leq 4nr+4vr+6r-4n-4v-6=\eta^{va}_1$ $(v=\overline{0,2n-3})$, $\sigma d^{va}_0=4rv+6r-4rn-4n+v+3<2vr+8r=\eta^v_0$ $(v=2n-2,2n-1)$.

Пусть для некоторого $s-1=\overline{\tau^{va},r-1}$ верно неравенство $\sigma d^{va}_{s-1}\leq\eta^{va}_{s-1}$. Тогда согласно (9) имеем $\sigma d^{va}_s=\sigma b^{va}_s-a^{va}_s c^{va}_{s-1}(\sigma d^{va}_{s-1})^{-1}\leq\sigma b^{va}_s-a^{va}_s c^{va}_{s-1}(\eta^{va}_{s-1})^{-1}$, а так как $\eta^{va}_{s-1}>0$, достаточно доказать, что $a^{va}_s c^{va}_{s-1}>\eta^{va}_{s-1}(\sigma b^{va}_s-\eta^{va}_s)$, что равносильно верным неравенствам $(2r-2s+1)(v^2+3v+2)+(2n-v-3)(2ns-2n+2v+3)>0$ $(v=\overline{0,2n-3})$ и $6(2r-2s+1)+(2n-4)(2ns-2n+v+4)>0$ $(v=2n-2,2n-1)$. $\square$

Теперь согласно формулам (9) имеем

$$\overline{Y}^{va}_{0,s}=\sum_{m=1}^{s}\theta^{va}_{s,m}Y^{va}_{0,m}, \quad \theta^{va}_{s,m}=(-1)^{s-m}\prod_{j=m+1}^{s}(a^{va}_j/d^{va}_{j-1}) \qquad (s\geq 1). \tag{10}$$

В результате система (8) равносильна системе

$$c^{va}_0 h^{va}_{1,1}=Y^{va}_{0,0} \quad (v=\overline{0,2n-3}), \qquad \overline{A}^{va}h^{va}_1=\overline{Y}^{va}_0 \quad (v=\overline{0,2n-1}), \tag{11}$$

в которой $\overline{A}^{va}$ — квадратная двухдиагональная матрица с элементами d_s^{va} и c_s^{va} на диагоналях, $\overline{Y}_0^{va}=(\overline{Y}_{0,\tau^{va}}^{va},\overline{Y}_{0,\tau^{va}+1}^{va},\dots,\overline{Y}_{0,r}^{va})$, компоненты $\overline{Y}_{0,s}^{va}$ определены в (10).

4. Совместность связующей системы в случае *a*. При $v=2n-2,2n-1$ (11) совместна, так как уравнение (11_1) отсутствует, а $\det\overline{A}^{va}\neq 0$ по лемме 1.

Пусть теперь $v=\overline{0,2n-3}$. Введем $A_{s,1}^{va}$ — алгебраическое дополнение матрицы $\overline{A}^{va}$ и Δ^{va} — ее определитель. Имеем

$$A_{s,1}^{va}=(-1)^{s+1}\prod_{j=1}^{s-1}c_j^{va}\prod_{j=s+1}^{r}d_j^{va},\quad \Delta^{va}=\prod_{j=1}^{r}d_j^{va}\neq 0\ \text{ при } r>1.$$

Тогда по формуле Крамера в (11_2) $\Delta^{va}h_{1,1}^{va}=\sum_{s=1}^{r}A_{s,1}^{va}\overline{Y}_{0,s}^{va}$.

Подставляя $h_{1,1}^{va}$ в (11_1), в силу (10) имеем $0=\sum_{s=1}^{r}A_{s,1}^{va}\overline{Y}_{0,s}^{va}-(\Delta^{va}/c_0^{va})Y_{0,0}^{va}=\sum_{s=1}^{r}A_{s,1}^{va}\big(\sum_{m=1}^{s}\theta_{s,m}^{va}Y_{0,m}^{va}\big)-(\Delta^{va}/c_0^{va})Y_{0,0}^{va}$ или

$$\sum_{m=0}^{r}\gamma_m^{va}Y_{0,m}^{va}=0,\quad \gamma_0^{va}=-\Delta^{va}/c_0^{va},\quad \gamma_m^{va}=\sum_{s=m}^{r}A_{s,1}^{va}\theta_{s,m}^{va}\quad (m=\overline{1,r}). \tag{12}$$

Лемма 2. *Множители γ_m^{va} из (12) представимы в виде*

$$\gamma_m^{va}=\phi_m^{va}\psi_m^{va}\in\mathbb{Z}\quad (m=\overline{1,r}), \tag{13}$$

где $\phi_m^{va}=(-1)^{m+1}\prod_{j=1}^{m-1}c_j^{va}\neq 0\ \ (m=\overline{r,1})$; $\psi_r^{va}=1,\ \psi_{r-1}^{va}=b_r^{va},\ \psi_{m-1}^{va}=b_m^{va}\psi_m^{va}-a_{m+1}^{va}c_m^{va}\psi_{m+1}^{va}\ \ (m=\overline{r-1,2})$.

Доказательство. Покажем, что для констант ψ_m^{va} справедлива прямая формула

$$\psi_m^{va}=\sum_{s=m}^{r}\prod_{j=m}^{s-1}c_j^{va}\prod_{j=s+1}^{r}d_j^{va}\prod_{j=m+1}^{s}(a_j^{va}/d_{j-1}^{va})\qquad (m=\overline{r,1}). \tag{14}$$

В (14) $\psi_r^{va}=\sum_{s=r}^{r}1=1,\psi_{r-1}^{va}=\sum_{s=r-1}^{r}\prod_{j=r-1}^{s-1}c_j^{va}\prod_{j=s+1}^{r}d_j^{va}\prod_{j=r}^{s}(a_j^{va}/d_{j-1}^{va})=d_r^{va}+a_r^{va}c_{r-1}^{va}/d_{r-1}^{va}=b_r^{va}$ согласно (9), что совпадает с (13) и дает базу индукции.

Пусть для всех $s=\overline{m,r}$ верно равенство (14). Тогда согласно (13) и (9) имеем $\psi_{m-1}^{va}=b_m^{va}\psi_m^{va}-a_{m+1}^{va}c_m^{va}\psi_{m+1}^{va}=b_m^{va}\sum_{s=m}^{r}\prod_{j=m}^{s-1}c_j^{va}\prod_{j=s+1}^{r}d_j^{va}\prod_{j=m+1}^{s}(a_j^{va}/d_{j-1}^{va})-a_{m+1}^{va}c_m^{va}\sum_{s=m+1}^{r}\prod_{j=m+1}^{s-1}c_j^{va}\prod_{j=s+1}^{r}d_j^{va}\prod_{j=m+2}^{s}(a_j^{va}/d_{j-1}^{va})=(d_m^{va}+a_m^{va}c_{m-1}^{va}/d_{m-1}^{va})\times$ $\times\sum_{s=m}^{r}\prod_{j=m}^{s-1}c_j^{va}\prod_{j=s+1}^{r}d_j^{va}\prod_{j=m+1}^{s}(a_j^{va}/d_{j-1}^{va})-d_m^{va}\sum_{s=m+1}^{r}\prod_{j=m}^{s-1}c_j^{va}\prod_{j=s+1}^{r}d_j^{va}\times$ $\times\prod_{j=m+1}^{s}(a_j^{va}/d_{j-1}^{va})=\sum_{s=m-1}^{r}\prod_{j=m-1}^{s-1}c_j^{va}\prod_{j=s+1}^{r}d_j^{va}\prod_{j=m}^{s}(a_j^{va}/d_{j-1}^{va})$.

Теперь с учетом равенств (12) и (10) получаем

$$\gamma_m^{va}=\sum_{s=m}^{r}A_{s,1}^{va}\theta_{s,m}^{va}=\sum_{s=m}^{r}(-1)^{s+1}\prod_{j=1}^{s-1}c_j^{va}\prod_{j=s+1}^{r}d_j^{va}(-1)^{s-m}\prod_{j=m+1}^{s}(a_j^{va}/d_{j-1}^{va})=\phi_m^{va}\psi_m^{va}.$$

□

Перейдем от коэффициентов $Y_{0,m}^{va}$ к коэффициентам $Y_{1,m}^{va}$ и $Y_{2,m}^{va}$.

В равенстве (12) согласно формулам (7): $\sum_{m=1}^{r-1}\gamma_m^{va}(\sigma(2r-2m+1)Y_{1,m-1}^{va}+(2nm+v+1)Y_{1,m}^{va}+Y_{2,m}^{va})+\gamma_0^{va}((v+1)Y_{1,0}^{va}+Y_{2,0}^{va})+\gamma_r^{va}(\sigma Y_{1,r-1}^{va}+Y_{2,r}^{va})=0$. Отсюда получаем гарантирующую совместность системы (11) резонансную связь

$$v=\overline{0,2n-3}:\quad \sum_{m=0}^{r-1}\big(\alpha_m^{va}Y_{1,m}^{va}+\beta_m^{va}Y_{2,m}^{va}\big)+\beta_r^{va}Y_{2,r}^{va}=0, \tag{15}$$

где $\alpha_m^{va}=(2nm+v+1)\gamma_m^{va}+\sigma(2r-2m-1)\gamma_{m+1}^{va}$ $(m=\overline{0,r-1})$, $\beta_m^{va}=\gamma_m^{va}$ $(m=\overline{0,r})$, а γ_m^{va} из (13).

5. Структура связующей системы в случае *b*. Положим для краткости $h_{1,s}^{vb}=h_1^{[2n(s-1)+v+n+2,\,2n(r-s-1)+n]}$ $(s=\overline{\tau^{vb},r-1})$, где $\tau^{vb}=\{1$ при $v=\overline{0,n-3}$; 0 при $v=\overline{n-2,2n-1}\}$; $h_{2,s}^{vb}=h_2^{[2ns+v+n+1,\,2n(r-s-1))]}$, $Y_{1,s}^{vb}=\widehat{Y}_1^{[2ns+v+n+1,\,2n(r-s-1)]}$ $(s=\overline{\tau_1^{vb},r-1})$; $Y_{2,s}^{vb}=\widehat{Y}_2^{[2ns+v+n,2n(r-s-1)+n]}$ $(s=\overline{\tau_2^{vb},r-1})$. Тогда (5) примет вид

$$\begin{gathered}\sigma(2r-2s-1)h_{1,s}^{vb}+(2ns+v+n+2)h_{1,s+1}^{vb}-h_{2,s}^{vb}=Y_{1,s}^{vb}\quad(s=\overline{\tau_1^{vb},r-1}),\\ \sigma(2r-2s)h_{2,s-1}^{vb}+(2ns+v+n+1)h_{2,s}^{vb}-(2n-1)\sigma h_{1,s}^{vb}=Y_{2,s}^{vb}\quad(s=\overline{\tau_2^{vb},r-1}).\end{gathered}\tag{16}$$

Подставляя $h_{2,s-1}^{vb}$ и $h_{2,s}^{vb}$ из (16_1) в (16_2), получаем трехдиагональную систему

$$a_s^{vb}h_{1,s-1}^{vb}+b_s^{vb}h_{1,s}^{vb}+c_s^{vb}h_{1,s+1}^{vb}=Y_{0,s}^{vb}\qquad(s=\overline{\tau_2^{vb},r-1}\ ),\tag{17}$$

в которой

$a_s^{vb}=(2r-2s)(2r-2s+1)$ $(s=\overline{\tau^{vb}+1,r}\,)$,

$b_s^{vb}=\sigma((2r-2s-1)(4ns+2v+3)+2ns+v-3n+3)$ $(s=\overline{\tau^{vb},r-1}\,)$,

$c_s^{vb}=(2ns+v+n+1)(2ns+v+n+2)$ $(s=\overline{\tau^{vb}-1,r-1}\,)$;

$Y_{0,s}^{vb}=\sigma(2r-2s)Y_{1,s-1}^{vb}+(2ns+v+n+1)Y_{1,s}^{vb}+Y_{2,s}^{vb}$ $(s=\overline{\tau_2^{vb},r-1}\,)$.

Введем $Y_{0,-1}^{n-2\,b},Y_{0,-1}^{n-1\,b}=0$, тогда (17) можно рассмотреть для $s=\overline{\tau^{vb}-1,r-1}$ при всех $v=\overline{0,2n-1}$, так как $c_{-1}^{n-2\,b}$, $c_{-1}^{n-1\,b}=0$, и записать ее в матричном виде

$$A^{vb}h_1^{vb}=Y_0^{vb},\tag{18}$$

где матрица $A^{vb}=\begin{pmatrix} c_{\tau^{vb}-1}^{vb} & 0 & 0 & \dots & 0\\ b_{\tau^{vb}}^{vb} & c_{\tau^{vb}}^{vb} & 0 & \dots & 0\\ a_{\tau^{vb}+1}^{vb} & b_{\tau^{vb}+1}^{vb} & c_{\tau^{vb}+1}^{vb} & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & a_{r-2}^{vb} & b_{r-2}^{vb} & c_{r-2}^{vb}\\ 0 & \dots & 0 & a_{r-1}^{vb} & b_{r-1}^{vb}\end{pmatrix}_{(r-\tau^{vb}+1)\times(r-\tau^{vb})}$,

$h_1^{vb}=(h_{1,\tau^{vb}}^{vb},\dots,h_{1,r-1}^{vb})$, $Y_0^{vb}=(Y_{0,\tau^{vb}-1}^{vb},\dots,Y_{0,r-1}^{vb})$.

Методом Гаусса в A^{vb} аннулируем элементы $c_{r-2}^{vb},c_{r-3}^{vb},\dots,$ получая d_s^{vb} вместо b_s^{vb} и $\overline{Y}_{0,s}^{vb}$ вместо $Y_{0,s}^{vb}$, пока $d_{s+1}^{vb}\neq 0$ $(s\geq\tau^{vb}+1)$, используя рекуррентные формулы

$$\begin{gathered}d_{r-1}^{vb}=b_{r-1}^{vb},\quad \overline{Y}_{0,r-1}^{vb}=Y_{0,r-1}^{vb};\\ d_s^{vb}=b_s^{vb}-\frac{a_{s+1}^{vb}\,c_s^{vb}}{d_{s+1}^{vb}},\quad \overline{Y}_{0,s}^{vb}=Y_{0,s}^{vb}-\frac{\overline{Y}_{0,s+1}^{vb}\,c_s^{vb}}{d_{s+1}^{vb}}\quad(s=r-2,\ r-3,\ \dots).\end{gathered}\tag{19}$$

Лемма 3. *Для элементов* d_s^{vb} *из* (19) *верна следующая прямая формула:*

$$d_s^{vb}=\sigma(2r-2s+1)(2ns+v-n+2)\qquad(s=\overline{r-1,\tau^{vb}}).\tag{20}$$

Доказательство. В (20) $d_{r-1}^{vb}=3\sigma(2nr+v-3n+2)$, что совпадает с d_{r-1}^{vb} из (19) и дает базу индукции. Пусть для некоторого $s+1=\overline{r,\tau^{vb}+1}$ верна формула (20).

Тогда согласно (19) $d_s^{vb} = b_s^{vb} - a_{s+1}^{vb} c_s^{vb} (d_{s+1}^{vb})^{-1} = \sigma((2r-2s-1)(4ns+2v+3)+2ns+v-3n+3-(2r-2s-2)(2ns+v+n+1)) = \sigma(2r-2s+1)(2ns+v-n+2)$. $\square$

Следствие 1. *В формуле* (20) *все элементы* $d_s^{vb} \neq 0$, *кроме* $d_0^{n-2\,b} = 0$.

В результате система (18) равносильна системе

$$\overline{A}^{vb} h_1^{vb} = \overline{Y}_0^{vb}, \tag{21}$$

в которой $\overline{A}^{vb}$ — двухдиагональная $(r-\tau^{vb}+1)\times(r-\tau^{vb})$-матрица с элементами d_s^{vb} и a_s^{vb} на диагоналях и нулевой первой строкой, а $\overline{Y}_0^{vb} = (\overline{Y}_{0,\tau^{vb}-1}^{vb}, \overline{Y}_{0,\tau^{vb}}^{vb}, \ldots, \overline{Y}_{0,r-1}^{vb})$ и $\overline{Y}_{0,s}^{vb}$ определены в (19), кроме $\overline{Y}_{0,-1}^{n-2\,b}, \overline{Y}_{0,-1}^{n-1\,b}$, которые введем равными нулю.

6. Совместность связующей системы в случае *b*. Согласно следствию 1 из формул (19) с использованием (17), (20) и (7) получаем:

$$\overline{Y}_{0,0}^{vb} = \sum_{m=0}^{r-1} \theta_m^{vb} Y_{0,m}^{vb}, \quad \theta_m^{vb} = (-1)^m \prod_{j=1}^{m} (c_{j-1}^{vb}/d_j^{vb}) \neq 0. \tag{22}$$

Выразим коэффициент $\overline{Y}_{0,0}^{vb}$ через коэффициенты $Y_{1,m}^{vb}$ и $Y_{2,m}^{vb}$ из системы (17): $\overline{Y}_{0,0}^{vb} = \sum_{m=0}^{r-1} \theta_m^{vb} Y_{0,m}^{vb} = \sum_{m=0}^{r} \theta_m^{vb} (\sigma(2r-2m)) Y_{1,m-1}^{vb} + (2nm+v+n+1) Y_{1,m}^{vb} + Y_{2,m}^{vb}) = -\sigma \sum_{m=0}^{r-2} (4r-4m-3) \theta_{m+1}^{vb} Y_{1,m}^{vb} + \theta_{r-1}^{vb} Y_{1,r-1}^{vb} + \sum_{m=0}^{r-1} \theta_m^{vb} Y_{2,m}^{vb}$. При этом имеем $2\sigma(r-m+1)\theta_{m+1}^{vb} + (2nm+v+n+1)\theta_m^{vb} = -\sigma(4r-4m-3)\theta_{m+1}^{vb}$ $(m = \overline{0, r-2})$.

Пусть $v = \overline{0, n-2}$. Тогда в системе (21) при $s = 0$ получаем уравнение $0 = \overline{Y}_{0,0}^{vb}$, причем, если $v = n-2$, то это уравнение имеет вид $0 \cdot h_{1,0}^{n-2\,b} = \overline{Y}_{0,0}^{n-2\,b}$ и в (21) возникает еще тривиальное уравнение при $s = -1$ вида $0 = 0$. Возвращаясь от системы (21) к (16) и используя (22), выпишем обеспечивающую совместность системы (16) резонансную связь:

$$v = \overline{0, n-2}: \quad \sum_{m=0}^{r-1} \left(\alpha_m^{vb} Y_{1,m}^{vb} + \beta_m^{vb} Y_{2,m}^{vb} \right) = 0, \tag{23}$$

где $\alpha_m^{vb} = -\sigma(4r-4m-3)\theta_{m+1}^{vb}$ $(m = \overline{0, r-2})$, $\alpha_{r-1}^{vb} = \theta_{r-1}^{vb}$, $\beta_m^{vb} = \theta_m^{vb}$ $(m = \overline{0, r-1})$; $\theta_m^{vb} \neq 0$ из (22), причем коэффициент $h_{1,0}^{n-2\,b}$ не имеет ограничений.

При $v = n-1$ система (21) однозначно разрешима, так как $d_0^{n-1\,b} \neq 0$.

Пусть теперь $v = \overline{n, 2n-1}$. Тогда первое уравнение системы (21) $(s = -1)$ имеет вид $0 = \overline{Y}_{0,-1}^{vb}$. Согласно (19) $\overline{Y}_{0,-1}^{vb} = Y_{0,-1}^{vb} - \overline{Y}_{0,0}^{vb} c_{-1}^{vb} (d_0^{vb})^{-1} = (v-n+1) Y_{1,0}^{vb} + Y_{2,-1}^{vb} - \sigma(v-n+1)(2r+1)^{-1} \big(-\sigma \sum_{m=0}^{r-2} (4r-4m-3) \theta_{m+1}^{vb} Y_{1,m}^{vb} + \theta_{r-1} Y_{1,r-1}^{vb} + \sum_{m=0}^{r-1} \theta_m^{vb} Y_{2,m}^{vb} \big)$, что позволяет, возвращаясь к системе (16), выписать для нее резонансную связь

$$v = \overline{n, 2n-1}: \quad \sum_{m=-1}^{r-1} \left(\alpha_m^{vb} Y_{1,m}^{vb} + \beta_m^{vb} Y_{2,m}^{vb} \right) = 0, \tag{24}$$

в которой $\alpha_{-1}^{vb} = v-n+1$, $\alpha_m^{vb} = (v-n+1)(2r+1)^{-1}(4r-4m-3)\theta_{m+1}^{vb}$ $(m = \overline{0, r-2})$, $\alpha_{r-1}^{vb} = -\sigma(v-n+1)(2r+1)^{-1}\theta_{r-1}^{vb}$; $\beta_{-1}^{vb} = 1$, $\beta_m^{vb} = -\sigma(v-n+1)(2r+1)^{-1}\theta_m^{vb}$ $(m = \overline{0, r-1})$; $\theta_m^{vb} \neq 0$ из (22).

7. Резонансные уравнения и резонансные наборы. Запишем найденные резонансные связи через коэффициенты системы (3), используя обозначения, введенные для системы (5) и полученных из нее систем (6) и (16).

Для $\forall\, k = 2nr + v - n$ $(r \geq 1,\ v = \overline{0, 2n-1},\ n \geq 2)$ в случае a из (15) получаем резонансное уравнение, связывающее следующие коэффициенты КОМ $Y^{[k]}$:

$$\sum_{m=0}^{r-1} \left(\alpha_m^{va} Y_1^{[2nm+v+1,\, 2n(r-m-1)+n]} + \beta_m^{va} Y_2^{[2nm+v, 2n(r-m)]}\right) + \beta_r^{va} Y_2^{[2nr+v,0]} = \tilde{c}_r^{va} \tag{25}$$

для значений $v \in \{\overline{0, 2n-3}\}$, где множители α_m^{va} и β_m^{va} определены в (15), число $\tilde{c}_r^{va} = \sum_{m=0}^{r-1} \left(\alpha_m^{va} \widetilde{Y}_1^{[2nm+v+1,\, 2n(r-m-1)+n]} + \beta_m^{va} \widetilde{Y}_2^{[2nm+v, 2n(r-m)]}\right) + \beta_r^{va} \widetilde{Y}_2^{[2nr+v,0]}$ уже известно, что пояснялось в (4).

В случае b, объединяя связи (23) и (24), существующие при различных значениях v, получаем резонансное уравнение с другими коэффициентами КОМ $Y^{[k]}$:

$$\sum_{m=\tau_2^{vb}}^{r-1} \left(\alpha_m^{vb} Y_1^{[2nm+v+n+1,\, 2n(r-m-1)]} + \beta_m^{vb} Y_2^{[2nm+v+n,\, 2n(r-m-1)+n)]}\right) = \tilde{c}_r^{vb} \tag{26}$$

для $v \in \{\overline{0, n-2};\ \overline{n, 2n-1}\}$, где множители α_m^{vb} и β_m^{vb} определены в (23) и в (24), $\tau_2^{vb} = \{0$ при $v = \overline{0, n-1}$; -1 при $v = \overline{n, 2n-1}\}$, $\tilde{c}_r^{vb}$ аналогично $\tilde{c}_r^{va}$; при этом при $v = n-2$ коэффициенты $h_1^{[0,2nr-n]}$ КОМ $h_1^{[2nr-n-1]}$ в замене (2) произвольны.

В частности, при $r = 1$ резонансные уравнения после упрощения принимают вид

$$(2n-1) Y_1^{[v+1,\, n]} + (2n-v-3)(v+1)^{-1} Y_2^{[v,\, 2n]} + \sigma(v+2) Y_2^{[2n+v,\, 0]} = \tilde{c}_1^{va} \qquad (v = \overline{0, 2n-3});$$

$$(v+n+1) Y_1^{[v+n+1,\, 0]} + Y_2^{[v+n,\, n]} = \tilde{c}_1^{vb} \quad (v = \overline{0, n-2}),$$

$$3\sigma Y_1^{[v-n+1,\, 2n]} - (v+n+1) Y_1^{[v+n+1,\, 0]} + 3\sigma(v-n+1)^{-1} Y_2^{[v-n,\, 3n]} - Y_2^{[v+n,\, n]} = \tilde{c}_1^{vb} \qquad (v = \overline{n, 2n-1}). \tag{27}$$

Для $\forall k \geq n$ наборы коэффициентов КОМ $Y^{[k]}$, входящие в уравнения (25) и (26), не пересекаются. Кроме того, коэффициент является резонансным, если реально входит в одно из уравнений, т. е. множители α или β при нем отличны от нуля.

При $r = 1$, очевидно, все коэффициенты в резонансных уравнениях (27) резонансные, кроме коэффициента $Y_2^{[v,\, 2n]}$ с $v = 2n-3$, имеющего в (27_1) нулевой множитель.

Лемма 4. *При $r \geq 2$ в резонансном уравнении (25) заведомо не равны нулю множители α_{r-1}^{va}, β_0^{va}, β_{r-1}^{va}, β_r^{va}; α_m^{va} $(m = \overline{0, r-2})$, β_m^{va} $(m = \overline{1, r-2})$ при четных v; β_{r-2}^{va} при n, кратных 3. В уравнении (26) все α_m^{vb} и β_m^{vb} отличны от нуля.*

Доказательство. Очевидно, что отличны от нуля $\alpha_{r-1}^{va} = \sigma(-1)^r(-2n + 1)(2nr - 2n + v + 1)\prod_{j=1}^{r-2} c_j^{va}$, $\beta_0^{va} = -\Delta^{va}/c_0^{va}$, $\beta_{r-1}^{va} = (-1)^{r-1} b_r^{va} \prod_{j=1}^{r-2} c_j^{va}$, $\beta_r^{va} = (-1)^r \prod_{j=1}^{r-1} c_j^{va}$.

Согласно (7) все a_m^{va} четны, а все b_m^{va} нечетны при четных v. В этом случае в (13) все ψ_m^{va} нечетны и, тем самым, отличны от нуля. А значит, $\beta_m^{va} = \gamma_m^{va} = \phi_m^{va}\psi_m^{va} \neq 0$.

Теперь с учетом (12) в (15) при $m = 0$: $\alpha_0^{va} = (-(v+1)\Delta^{va} + c_0^{va}\sigma(2r-1)\gamma_1^{va})/c_0^{va}$. Поскольку в (7) все a_m^{va} и c_m^{va} — четные, а b_m^{va} — нечетные при четных v, A^{va} из (8) имеет нечетный определитель, совпадающий с определителем Δ^{va} матрицы $\overline{A}^{va}$ из (11). В результате произведение $(v+1)\Delta^{va}$ нечетно, c_0^{va} — четно и γ_1^{va} — целое, откуда $\alpha_0^{va} \neq 0$.

При $m=\overline{1,r-2}$ в (15) $\alpha_m^{va}=(2nm+v+1)\gamma_m^{va}+\sigma(2r-2m-1)\gamma_{m+1}^{va}=(2nm+v+1)\phi_m^{va}\psi_m^{va}+\sigma(2r-2m-1)\phi_{m+1}^{va}\psi_{m+1}^{va}=\phi_m^{va}((2nm+v+1)\psi_m^{va}-\sigma(2r-2m-1)c_m^{va}\psi_{m+1}^{va})$.

Поскольку c_m^{va} четно, второй множитель нечетен и, тем самым, отличен от нуля, как и первый множитель. Следовательно $\alpha_m^{va}\neq 0$.

Из (13), (15) $\beta_{r-2}^{va}=\phi_{r-2}^{va}\psi_{r-2}^{va}$, причем $\phi_{r-2}^{va}\neq 0$. Учитывая (14), вычислим $\psi_{r-2}^{va}=r(12n^2r+12nv+36n-60n^2)+v(-30n+3v+18)-78n+64n^2+23$. Очевидно, что если n кратно трем, то кратны трем все слагаемые, кроме последнего, а значит, ψ_{r-2}^{va} не делится на три и не обращается в нуль, поэтому и $\beta_{r-2}^{va}\neq 0$.

Утверждение относительно множителей в уравнении (26) очевидно. $\square$

Для $\forall\, k=2nr+v-n$ введем в рассмотрение число $n_k=\{1$ при $k=2nr-1$, $2nr+n-2, 2nr+n-1;$ 2 при $k\in K_n^r\}$, где $K_n^r=\{\overline{2nr-n,2nr-2},\ \overline{2nr,2nr+n-3}\}$.

Следствие 2. *В системе* (3) *для* $\forall\, k=2nr+v-n\quad (r\geq 1,\ v=\overline{0,2n-1})$ n_k *резонансных коэффициентов КОМ* $Y^{[k]}$ *образуют резонансный* k*-набор* $\mathcal{Y}^k$, *если один коэффициент входит в* (25) *или* (26), *а второй при* $n_k=2$ *— в другое уравнение.*

Следствие 3. *В любых идущих подряд* $2n$ *резонансных* k*-наборах* $\mathcal{Y}^k$, *где* $k=\overline{2nr-n,2nr+n-1}\quad(r\geq 1)$, *содержатся ровно* $4n-3$ *резонансных коэффициента.*

Замечание 1. *В резонансном уравнении* (25) *не удалось доказать отличие от нуля множителей* $\alpha_m^{2l-1\,a}$, $\beta_m^{2l-1\,a}\quad(m=\overline{1,r-2})$ *и* $\alpha_0^{2l-1\,a}$ *с* $l=\overline{1,n-1}$, *однако при необходимости любой такой множитель можно вычислить по указанным выше формулам. В частности, вычисленные при помощи программы Maple множители* $\beta_m^{va}\neq 0$ *для всех* $n=\overline{2,10}$, $r=\overline{2,20}$, $v=1,3,\dots 17$, $m=\overline{1,r-2}$.

8. Полученные результаты. В итоге оказались доказаны две теоремы.

Теорема 1. *Для того чтобы система* (3) *была формально эквивалентна исходной системе* (1), *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ее КОМ* $Y^{[k]}$ *при* $k=2nr-1\quad(v=n-1)$ *удовлетворяли уравнению* (25), *при* $k=2nr+n-2, 2nr+n-1$ $(v=2n-2,\ 2n-1)$ *— уравнению* (26), *а при* $k\in K_n^r\quad(v=\overline{0,n-2};\ \overline{n,2n-3})$ *— обоим резонансным уравнениям.*

Очевидно, что для всякого $k\geq n$ уравнения (25) и (26) можно однозначно разрешить относительно n_k коэффициентов из любого резонансного k-набора $\mathcal{Y}^k$.

Теперь, если в системе (3) положить равными нулю все коэффициенты, кроме коэффициентов, входящих в выбранный резонансный набор $\mathcal{Y}=\bigcup_{k=n}^{\infty}\mathcal{Y}^k$, то по определению система (3) будет ОНФ с заданной структурой $\mathcal{Y}$.

Теорема 2. *Зафиксируем произвольный резонансный набор* $\mathcal{Y}$, *образованный резонансными* k*-наборами, из следствия 2. Тогда существует и единственна почти тождественная замена* (2) *с заранее выбранными коэффициентами* $h_1^{[0,2nr-n]}$, *преобразующая систему* (1) *в ОНФ* (3), *структура которой порождена* $\mathcal{Y}$.

В частности, из системы (1) всегда могут быть получены ОНФ (3), имеющие следующие структуры:

$$\dot{y}_1=y_2,\ \ \dot{y}_2=\sigma y_1^{2n-1}+y_2\sum_{\substack{k=n\\ k\neq 2nl-1}}^{\infty}Y_2^{(k,\,1)}y_1^k+\sum_{\substack{k=2n\\ k\neq 2nl-j}}^{\infty}Y_2^{(k,\,0)}y_1^k\quad(\forall\, l\in\mathbb{N},\ \forall\, j=1,2),\quad(28)$$

где первая компонента возмущения — нулевая, а вторая — линейна по y_2;

$$\dot{y}_1=y_2+\sum_{\substack{k=n+1\\ k\neq 2nl}}^{\infty}Y_1^{(k,\,0)}y_1^k,\quad \dot{y}_2=\sigma y_1^{2n-1}+\sum_{\substack{k=2n\\ k\neq 2nl-j}}^{\infty}Y_2^{(k,\,0)}y_1^k\quad(\forall\, l\in\mathbb{N},\ \forall\, j=1,2),\quad(29)$$

а здесь возмущение не зависит от переменной y_2.

Интересно сравнить полученные ОНФ с нормальной формой Белицкого [3], также выписанной для системы (1):

$$\dot{y}_1 = y_2 + y_1 g_1(y_1),\ \dot{y}_2 = y_2 g_2(y_1) + h(y_1), \tag{30}$$

где $g_i = \sum_{k=n}^{\infty} g_i^{(k)} y_1^k$, $g_1 \equiv g_2$, $h = \sum_{k=2n-1}^{\infty} h^{(k)} y_1^k$, $h^{(2n-1)} = \sigma$.

Сводя (30) к ОНФ (28) можно добиться, чтобы $g_1 \equiv 0$ и в рядах g_2, h была аннулирована известная часть слагаемых. А при сведении НФ Белицкого (30) к ОНФ (29) удается аннулировать ряд g_2 и часть слагаемых в g_1, h.

Указанные упрощения достигаются за счет того, что слагаемое σx_1^{2n-1}, отнесенное при приведении системы (1) к НФ Белицкого к возмущению, вводится в невозмущенную часть при получении ОНФ.

Литература

1. *Басов В. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевыми характеристическими числами // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 2. С. 154–170.

2. *Басов В. В., Михлин Л. С.* Обобщенные нормальные формы систем ОДУ с линейно-кубической невозмущенной частью // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2012. Т. 2. С. 129–153.

3. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы формальных рядов и ростков C^∞-отображений относительно действия группы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40, № 4. С. 858.

Статья поступила в редакцию 23 октября 2014 г.

Сведения об авторах

Басов Владимир Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент; vlvlbasov@rambler.ru

Михлин Леонид Станиславович — аспирант; mikhlin@bk.ru

GENERALIZED NORMAL FORMS OF ODE SYSTEMS WITH UNPERTURBED PART $(x_2, \pm x_1^{2n-1})$

Vladimir V. Basov, Leonid S. Mikhlin

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034,
Russian Federation; vlvlbasov@rambler.ru, mikhlin@bk.ru

Two-dimensional autonomous ODE systems with $(x_2, \pm x_1^{2n-1})$ $(n \geq 2)$ as the unperturbed part are reduced by formal invertible transformation to generalized normal forms with all possible structures. Refs 3.

Keywords: generalized normal form, quasihomogeneous polynomials, resonance equations.

References

1. Basov V. V., “Generalized normal forms and formal equivalence of systems of differential equations with zero eigenvalues”, *Differential Equations* **39**(2), 165—181 (2003).

2. Basov V. V., Mikhlin L. S., “Generalized normal forms of systems of ODE with linear-cubic unperturbed part”, *Differential equations and control processes* 2, 129–153 (2012) [in Russian]. (Electronic J., http://www.math.spbu.ru/diffjournal)

3. Belickii G. R., “Normal forms for formal series and germs of C^∞-mappings with respect to the action of a group”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya* **10**(4), 855–868 (1976).