УДК 517.938 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 1

ВОЗМУЩЕНИЯ СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ ДВУМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

Н. А. Бегун

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Вопрос структурной устойчивости является одной из основных областей современной теории дифференциальных уравнений. В настоящей статье мы изучаем малые C^1-возмущения систем дифференциальных уравнений. Мы вводим понятия слабо гиперболического инвариантного множества K и листа Υ системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Липшицево условие не предполагается. Мы показываем, что если возмущение достаточно мало, то существует непрерывное отображение $h : K \longrightarrow K^Y$, где K^Y — слабо гиперболическое инвариантное множество возмущенной системы. Более того, мы показываем, что $h(\Upsilon)$ является листом возмущенной системы. Библиогр. 7 назв.

Ключевые слова: устойчивость, инвариантное множество, малые возмущения, гиперболические структуры, слабо гиперболическое множество, структурная устойчивость.

Введение. В настоящей работе изучаются малые C^1-возмущения систем дифференциальных уравнений, обладающих слабо гиперболическим инвариантным множеством. Задача была поставлена В. А. Плиссом и Дж. Селлом в статьях [1] и [2], посвященных исследованию устойчивости слабо гиперболических инвариантных множеств. В этих статьях предполагалось, что нейтральное и устойчивое подпространства соответствующих линеаризованных систем удовлетворяют условию Липшица. В работах [4], [5], [7] изучалась проблема устойчивости слабо гиперболических инвариантных множеств в нелипшицевом случае. В работе [4] было введено понятие листа слабо гиперболического инвариантного множества двумерной периодической системы и построено непрерывное на каждом листе отображение $h : K \to K^Y$, где K, K^Y — это слабо гиперболические инвариантные множества невозмущенной и возмущенной систем соответственно. В работе [5] было показано, что множество K^Y является замкнутым. Таким образом, в работах [4] и [5] было доказано, что слабо гиперболическое инвариантное множество двумерной периодической системы является устойчивым даже при отсутствии условия Липшица. Далее, в [7] результат работ [4] и [5] был обобщен на случай слабо гиперболического инвариантного множества трехмерной периодической системы. До сих пор оставался открытым вопрос, можно ли построить вышеупомянутое отображение h непрерывным не только по каждому листу в отдельности, но и по всему множеству K. В данной статье впервые изложен метод построения такого отображения для случая слабо гиперболического инвариантного множества двумерной периодической системы. В первой части работы даны основные определения. Во второй части сформулирован результат и изложены главные идеи доказательства.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x), \tag{1.1}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00624) и СПбГУ (тема 6.0.112.2010).

где $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$, а X — это C^1-функция, действующая из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^2$. Предполагается, что существует число $\omega > 0$ такое, что

$$X(t+\omega, x) = X(t, x).$$

Обозначим через $x(t, t_0, x_0)$ максимально продолженное решение системы (1.1), удовлетворяющее условию $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

Заметим, что в силу периодичности системы (1.1) мы можем провести факторизацию

$$t \sim t + kw, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

и в дальнейшем рассматривать систему в пространстве $\Xi = S \times \mathbb{R}^2$ (так называемое цилиндрическое пространство), где S — это окружность длины ω.

Обозначим через $\Phi(t, t_0, x_0)$ фундаментальную матрицу линейной системы

$$\dot{x} = \frac{\partial X(t, x(t, t_0, x_0))}{\partial x}\, x, \tag{1.2}$$

удовлетворяющую условию $\Phi(t_0, t_0, x_0) = I$, где I — тождественный оператор на $\mathbb{R}^2$.

Будем говорить, что система (1.2) *слабо гиперболична* на интервале $J \subset \mathbb{R}$ с константами a, λ_1 и λ_2, если $\lambda_2 < \lambda_1$, $\lambda_1 > 0$, $a \geq 1$ и существуют дополняющие друг друга линейные подпространства $U^n(t, t_0, x_0)$ и $U^s(t, t_0, x_0)$, $\dim U^n(t, t_0, x_0) = 1$, $\dim U^s(t, t_0, x_0) = 1$, такие, что

$$\Phi(t, t_0, x_0) U^s(t_0, t_0, x_0) = U^s(t, t_0, x_0),$$

$$\Phi(t, t_0, x_0) U^n(t_0, t_0, x_0) = U^n(t, t_0, x_0)$$

для любого $t \in J$, и если $\bar{x} \in U^s(\tau, t_0, x_0)$, то

$$|\Phi(t, t_0, x_0)\Phi^{-1}(\tau, t_0, x_0)\bar{x}| \leq a|\bar{x}|e^{-\lambda_1(t-\tau)} \tag{1.3}$$

для $t \geq \tau$, $t, \tau \in J$, и если $\bar{x} \in U^n(\tau, t_0, x_0)$, то

$$|\Phi(t, t_0, x_0)\Phi^{-1}(\tau, t_0, x_0)\bar{x}| \leq a|\bar{x}|e^{-\lambda_2(t-\tau)} \tag{1.4}$$

для $t \leq \tau$, $t, \tau \in J$.

Линейное подпространство $U^s(t_0, x_0) = U^s(t_0, t_0, x_0)$ называется устойчивым линейным подпространством, линейное подпространство $U^n(t_0, x_0) = U^n(t_0, t_0, x_0)$ — нейтральным линейным подпространством.

Предположим, что существует $K \subset \Xi$ — компактное инвариантное множество системы (1.1). Положим $K_{t_0} = \{x \in \mathbb{R}^2 : (t_0, x) \in K\}$.

Множество K будем называть *слабо гиперболическим*, если выполнены следующие два условия:
(1) линейная система (1.2) слабо гиперболична на $\mathbb{R}$ с константами a, λ_1 и λ_2 для любой точки $(t_0, x_0) \in K$;
(2) существует $r > 0$ такое, что для любой точки $(t_0, x_0) \in K$ существует 1-мерный диск $\widehat{D}(t_0, x_0) \subset K_{t_0}$ радиуса r, такой, что
(i) x_0 — центральная точка $\widehat{D}(t_0, x_0)$;

(ii) если $x \in \widehat{D}(t_0, x_0)$, то в точке (t_0, x) линейное подпространство $U^n(t_0, x)$ касается диска $\widehat{D}(t_0, x_0)$;
(iii) множество

$$D(t_0, x_0) = \{(t, x) : |t - t_0| < r, \quad x \in \widehat{D}(t, x(t, t_0, x_0))\}$$

является локально инвариантным.

В этой работе мы не предполагаем липшицеву зависимость $U^n(t_0, x_0)$ и $U^s(t_0, x_0)$ от x_0, теряя, очевидно, при этом свойство единственности дисков. Вместо липшицевости мы потребуем выполнения следующего условия:
(iv) если $\widehat{D}_1(t_0, x_0)$ и $\widehat{D}_2(t_0, x_0)$ — это два диска в точке (t_0, x_0) со свойствами (i)–(iii), то $\widehat{D}_1(t_0, x_0) = \widehat{D}_2(t_0, x_0)$.

Известно, что если множество K является слабо гиперболическим, то существует $\alpha > 0$ такое, что $\angle(U^s(t_0, x_0), U^n(t_0, x_0)) > \alpha$, $(t_0, x_0) \in K$. Не умаляя общности, будем считать, что $\alpha < 0.1$.

Для $(t_0, x_0) \in K$ определим множества $\Upsilon_1(t_0, x_0), \Upsilon_2(t_0, x_0), \ldots, \Upsilon(t_0, x_0)$ следующим образом:

$$\Upsilon_1(t_0, x_0) = \bigcup_{(t,x) \in D(t_0, x_0)} D(t, x), \quad \Upsilon_{i+1}(t_0, x_0) = \bigcup_{(t,x) \in \Upsilon_i(t_0, x_0)} D(t, x) \text{ для } i \geq 1,$$

$$\Upsilon(t_0, x_0) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Upsilon_i(t_0, x_0).$$

Множество $\Upsilon(t_0, x_0)$ будем называть *листом*, проходящим через (t_0, x_0). В том случае, когда нам не важна точка (t_0, x_0), мы будем обозначать лист просто Υ.

2. Наряду с системой (1.1) рассмотрим ее возмущение

$$\dot{y} = X(t, y) + Y(t, y), \tag{2.1}$$

где Y — это C^1-функция, действующая из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^2$.

Функция Y тоже предполагается ω-периодичной, т. е.

$$Y(t + \omega, y) = Y(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через $y(t, t_0, x_0)$ максимально продолженное решение системы (2.1), удовлетворяющее условию $y(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

Сформулируем основную теорему.

Теорема. *Пусть K — компактное слабо гиперболическое инвариантное множество системы* (1.1). *Предположим, что выполнено свойство единственности дисков. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $\|Y\|_{C^1} \leq \delta$, то существует непрерывное отображение $h : K \longrightarrow \Xi$, удовлетворяющее условиям*
(0) если $h(t_0, x_0) = (t_1, y_1)$, то $t_1 = t_0$;
(1) $|h(t, x) - (t, x)| \leq \varepsilon$;
(2) $K^Y = h(K)$ — это инвариантное множество системы (2.1)*;*
(3) линейная система

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial(X(t, y(t, t_0, y_0)) + Y(t, y(t, t_0, y_0)))}{\partial y} y \tag{2.2}$$

слабо гиперболична для любой точки $(t_0, y_0) \in K^Y$;

(4) нейтральное подпространство $U^n_Y(t_0, y_0)$ *системы* (2.2) *касается множества* $h(t_0, \widehat{D}(t_0, x_0))$ *в точке* (t_0, y_0)*, где* $(t_0, y_0) = h(t_0, x_0)$*;*
(5) для каждого листа $\Upsilon \subset K$ *множество* $\Upsilon^Y = h(\Upsilon)$ *будет являться листом слабо гиперболического инвариантного множества* K^Y *системы* (2.1).

Доказательство. Зафиксируем число $\sigma > 0$ такое, что $11\sigma = \min(\lambda_1, \lambda_1 - \lambda_2)$.

Зафиксируем $T > 0$, для которого выполнены следующие три условия:

$$e^{-(\lambda_1-\sigma)T} \leq \frac{\sin^2(\alpha/4)}{1000a^2}, \quad e^{-(\lambda_1-3\sigma)T} \leq \frac{\sin^2(\alpha/5)}{500a^2}, \quad e^{-(\lambda_1-\lambda_2)T} \leq \frac{\sin^2(\alpha/4)}{1000a^2}. \tag{2.3}$$

Зафиксируем c, $0 < c \leq 1/10$, такое, что для любого вектора ζ, удовлетворяющего неравенству

$$\angle(U^n(t_0, x_0), \zeta) \leq c\alpha, \quad (t_0, x_0) \in K, \tag{2.4}$$

выполнены неравенства

$$\angle(U^n(t, t_0, x_0), \Phi(t, t_0, x_0)\zeta) \leq \frac{\alpha}{4}, \quad 0 \leq t - t_0 \leq 2T,$$

$$\angle(U^n(t, t_0, x_0), \Phi(t, t_0, x_0)\zeta) \leq \frac{c\alpha}{256}, \quad T \leq t - t_0 \leq 2T.$$

Пусть $N(t_0, x_0) \subset \{t = t_0\} \times \mathbb{R}^2$, $(t_0, x_0) \in K$ — 1-мерное подпространство, перпендикулярное $U^n(t_0, x_0)$ в точке (t_0, x_0).

По выбранному c зафиксируем $r > 0$ такое, что для любых $(t_0, x_0), (t_0, x_1) \in K$ таких, что $|x_0 - x_1| \leq r$ и $x_1 \in \widehat{D}(t_0, x_0)$ выполнено

$$\angle(U^n(t_0, x_0), x_0 - x_1) \leq c\alpha, \tag{2.5}$$

$$\sin\angle(U^n(t_0, x_0), x_0 - x_1) \leq 1/10, \tag{2.6}$$

$$\angle(U^n(t_0, x_0), U^n(t_0, x_1)) \leq \frac{c\alpha}{20}, \tag{2.7}$$

$$\sin(\angle(U^n(t_0, x_0), U^n(t_0, x_1))) \leq 1/20. \tag{2.8}$$

Из теоремы Перрона об устойчивом многообразии следует, что для любой точки $(t_0, x_0) \in K$ существует 1-мерный диск $D^p(t_0, x_0)$ (так называемый диск Перрона) такой, что если $x_1 \in D^p(t_0, x_0)$, то

$$|x(t, t_0, x_1) - x(t, t_0, x_0)| \leq 2a\,|x_1 - x_0|\,e^{-(\lambda_1-\sigma)(t-t_0)} \tag{2.9}$$

при $t \geq t_0$.

Известно также, что радиус b диска $D^p(t_0, x_0)$ не зависит от (t_0, x_0) и диск $D^p(t_0, x_0)$ сколь угодно мало (при должном выборе b) отличается от $U^s(t_0, x_0)$. Зафиксируем такое χ, что диски $D^p(t, x)$, $(t, x) \in D(t_0, x_0)$ образуют расслоение в χ-окрестности диска $D(t_0, x_0)$ для любой точки $(t_0, x_0) \in K$. Существование такого χ было доказано в [6].

Будем также считать, что в χ-окрестности диска $D(t_0, x_0)$

$$\angle(D^p(t, x), U^n(t, x)) > 0.99\alpha.$$

В работе [4] был описан способ построения липшицевых координат в окрестности листа $\Upsilon \subset K$. Обозначим через $M_1(t, x)$ прямые, с помощью которых были введены эти координаты.

Положим $\beta = \min(\frac{\chi}{2}, r)$ и определим для каждой точки $(t_0, x_0) \in K$ множество

$$\Gamma_1(t_0, x_0, \beta) = \left\{ x + y : x \in \widehat{D}(t_0, x_0), y \in M_1(t_0, x), |y| \le \beta \right\}.$$

Рассмотрим отображение

$$\varphi_1 = \varphi_{1(t_0,x_0)} : \Gamma_1(t_0, x_0, \beta) \longrightarrow \widehat{D}(t_0, x_0), \tag{2.10}$$

удовлетворяющее условию

$$\varphi_1(x + y) = x, \quad x \in \widehat{D}(t_0, x_0), \quad y \in M_1(t_0, x). \tag{2.11}$$

Вообще говоря, отображение $\varphi_{1(t_0,x_0)}$ зависит от (t_0, x_0), но для упрощения записи мы будем обозначать его просто φ_1. Предполагается, что расположение точки (t_0, x_0) следует из контекста.

Липшицевость отображения φ_1 была доказана в работе [4]. Обозначим константу липшицевости $\bar{L}$. Заметим также, что угол между $M_1(t, x_1)$ и $M_1(t, x_2)$ меняется липшицево с константой $G > 0$.

Введем еще одну систему координат. Будем говорить, что $y \in M_2(t, x)$, $(t, x) \in K$ в том случае, если $y \in D^p(t, x)$.

Определим для каждой точки $(t_0, x_0) \in K$ множество

$$\Gamma_2(t_0, x_0, \beta) = \left\{ x + y : x \in \widehat{D}(t_0, x_0), y \in M_2(t_0, x), |y| \le \beta \right\}.$$

Рассмотрим отображение

$$\varphi_2 = \varphi_{2(t_0,x_0)} : \Gamma_2(t_0, x_0, \beta) \longrightarrow \widehat{D}(t_0, x_0),$$

удовлетворяющее условию

$$\varphi_2(x + y) = x, \quad x \in \widehat{D}(t_0, x_0), \quad y \in M_2(t_0, x).$$

Введем систему координат (u, v), $u \in \Upsilon$, $v \in M_2(u)$ в окрестности каждого листа Υ. Заметим, что эти координаты являются непрерывными на множестве K. Заметим также, что, в отличие от отображения φ_1, отображение φ_2 не обязательно будет липшицевым.

Рассмотрим точки t_0, x_1 и y_0 такие, что $(t_0, x_1) \in K$ и $|y_0 - x_1| \le \beta$. При достаточно малом β существует $x_0 \in \widehat{D}(t_0, x_1)$ такое, что $y_0 \in D^p(t_0, x_0)$. Уменьшая, если это необходимо, β, мы получим

$$|x_0 - y_0| \le \frac{|y_0 - x_1|}{\sin(\alpha/3)}. \tag{2.12}$$

Аналогично, при достаточно малом β, из того, что $y_0 \in M_1(t_0, x_1)$, следует, что

$$|y_0 - x_1| \le 2\, |x_0 - y_0|\,. \tag{2.13}$$

Вернемся к нелинейной системе (1.1). Зафиксируем $\bar{c}$, $0 \le \bar{c} \le \frac{1}{4}$, для которого выполнены следующие три условия. Во-первых, для любой точки $(t_0, x_0) \in K$ и $y_0 :$ $|y_0 - x_0| \le \bar{c}\beta$ выполнено

$$x(t, t_0, y_0) \in \Gamma_i \left(t, x(t, t_0, x_0), \frac{\beta}{4} \right), \quad 0 \le t - t_0 \le 2T, \quad i = 1, 2.$$

Заметим, что при достаточно малом $\bar{c}$, для любой точки (t_0, y_0) такой, что $|y_0 - x_0| \le \bar{c}\beta$, линейная система (1.2) слабо гиперболична на интервале $0 \le t - t_0 \le 2T$ с константами $2a$, $\lambda_1 - \sigma$ и $\lambda_2 + \sigma$. Это, в частности, означает, что отображения $(t, x) \longrightarrow U^i(t, x)$, $(t, x) \in K$, $i = n, s$, имеют непрерывные продолжения на $\bar{c}\beta$-окрестность K. Второе условие на $\bar{c}$ — это выполнение неравенства

$$\angle(U^i(t_0, x_0), U^i(t_0, y_0)) \le \frac{c\alpha}{1000} \tag{2.14}$$

при $(t_0, x_0) \in K, \ |x_0 - y_0| \le \bar{c}\beta, \ i = n, s$.

В-третьих, для любой точки $(t_0, x_0) \in K$ и любых $x_{1,2}$, $|x_0 - x_i| \le \bar{c}\beta$, $i = 1, 2$, таких, что $\angle(U^n(t_0, x_0), x_1 - x_2) \le c\alpha$, должны выполняться неравенства

$$\angle(U^n(t, x(t, t_0, x_0)), x(t, t_0, x_1) - x(t, t_0, x_2)) \le \frac{\alpha}{3}, \quad 0 \le t - t_0 \le 2T,$$

$$\angle(U^n(t, x(t, t_0, x_0)), x(t, t_0, x_1) - x(t, t_0, x_2)) \le \frac{c\alpha}{128}, \quad T \le t - t_0 \le 2T.$$

Рассмотрим $(t_0, x_1) \in K$ и $y_0 : |y_0 - x_1| \le \bar{c}\beta$. Рассмотрим также $x_0 \in \widehat{D}(t_0, x_1)$ такую, что $y_0 \in D^p(t_0, x_0)$. Заметим, что

$$|x(t, t_0, y_0) - \varphi_1(x(t, t_0, y_0))| \le 2\,|x(t, t_0, y_0) - x(t, t_0, x_0)|$$

при $0 \le t - t_0 \le 2T$. Теперь, учитывая (2.9) и (2.12), получаем, что

$$|x(t, t_0, y_0) - \varphi_1(x(t, t_0, y_0))| \le \frac{4a|y_0 - x_1|}{\sin(\alpha/3)} e^{-(\lambda_1 - \sigma)(t - t_0)}, \quad 0 \le t - t_0 \le 2T. \tag{2.15}$$

Из (2.3) и (2.15) следует, что

$$\begin{aligned} |x(t, t_0, y_0) - \varphi_1(x(t, t_0, y_0))| &\le \frac{4a|y_0 - x_1|}{\sin(\alpha/3)} \frac{\sin^2(\alpha/4)}{1000a^2} \le \\ &\le \frac{\sin(\alpha/4)|y_0 - x_1|}{200}, \quad T \le t - t_0 \le 2T. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Мы выбрали T, c, r, β и $\bar{c}$. Положим $0 < \varepsilon \le \frac{\bar{c}\beta}{2}$. Будем считать также, что $0 < \varepsilon \le \frac{\sin \frac{c\alpha}{32}}{2G}$.

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial (X(t, y(t, t_0, y_0)) + Y(t, y(t, t_0, y_0)))}{\partial y} y. \tag{2.17}$$

Зафиксируем $\delta > 0$, при котором выполнены следующие пять условий.

(1) Если $(t_0, x_0) \in K$ и $|y_0 - x_0| < \varepsilon$, то

$$|y(t, t_0, y_0) - x(t, t_0, y_0)| \le \frac{\varepsilon \sin(\alpha/4)}{3(\bar{L} + 1)}, \quad 0 \le t - t_0 \le 2T. \tag{2.18}$$

(2) Если $(t_0, x_0) \in K$ и $|y_0 - x_0| < \varepsilon$, то

$$y(t, t_0, y_0) \in \Gamma_i\left(t, x(t, t_0, x_0), \frac{\beta}{2}\right), \quad 0 \le t - t_0 \le 2T, \quad i = 1, 2. \tag{2.19}$$

(3) Пусть $\Psi(t, t_0, y_0)$ — фундаментальная матрица линейной системы (2.17), удовлетворяющая условию $\Psi(t_0, t_0, y_0) = I$. Заметим, что если $(t_0, x_0) \in K$, то для любой точки (t_0, y_0) такой, что $|x_0 - y_0| \le \bar{c}\beta$, при достаточно малом δ линейная система (2.17) слабо гиперболична на интервале $0 \le t - t_0 \le 2T$ с константами $3a$, $\lambda_1 - 2\sigma$, $\lambda_2 + 2\sigma$. Эти константы не зависят от t_0, x_0 и y_0.

Обозначим через $U^n_Y(t_0, y_0)$ и $U^s_Y(t_0, y_0)$ нейтральное и устойчивое подпространства системы (2.17) на промежутке $0 \le t - t_0 \le 2T$. Выберем δ таким, что

$$\angle(U^i_Y(t_0, y_0), U^i(t_0, y_0)) \le \frac{c\alpha}{1000} \tag{2.20}$$

при $(t_0, x_0) \in K$ и $|y_0 - x_0| < \bar{c}\beta$, $i = n, s$.

Уменьшая, если это необходимо, δ, мы можем добиться, чтобы для любого вектора η, такого, что $\angle(U^n_Y(t_0, y_0), \eta) \le c\alpha$, было выполнено

$$\angle(U^n_Y(t, y(t, t_0, y_0)), \Psi(t, t_0, y_0)\eta) \le \frac{2\alpha}{5}, \quad 0 \le t - t_0 \le 2T, \tag{2.21}$$

$$\angle(U^n_Y(t, y(t, t_0, y_0)), \Psi(t, t_0, y_0)\eta) \le \frac{c\alpha}{64}, \quad T \le t - t_0 \le 2T.$$

(4) Рассмотрим x_i и y_i, $i = 0, 1$ такие, что $(t_0, x_0) \in K$, $x_1 \in \widehat{D}(t_0, x_0)$, $y_i \in M_1(t_0, x_i)$, $i = 0, 1$, $|x_1 - x_0| \le \varepsilon$, $|y_0 - x_0| \le \varepsilon$, $|y_1 - x_1| \le \varepsilon$. При достаточно малом δ и $\angle(U^n_Y(t_0, y_0), y_1 - y_0) \le c\alpha$ выполнено

$$\angle(U^n_Y(t, y(t, t_0, y_0)), y(t, t_0, y_1) - y(t, t_0, y_0)) \le \frac{\alpha}{2}, \quad 0 \le t - t_0 \le 2T, \tag{2.22}$$

$$\angle(U^n_Y(t, y(t, t_0, y_0)), y(t, t_0, y_1) - y(t, t_0, y_0)) \le \frac{c\alpha}{50}, \quad T \le t - t_0 \le 2T. \tag{2.23}$$

(5) В силу того, что, как уже было замечено ранее, для любой точки (t_0, y_0) такой, что $|x_0 - y_0| \le \bar{c}\beta$, $(t_0, x_0) \in K$, линейная система (2.17) слабо гиперболична на интервале $0 \le t - t_0 \le 2T$ с константами $3a$, $\lambda_1 - 2\sigma$, $\lambda_2 + 2\sigma$, мы можем, уменьшая δ, добиться того, чтобы для любой точки (t_0, y_0) такой, что $|x_0 - y_0| \le \bar{c}\beta$, $(t_0, x_0) \in K$, существовал 1-мерный диск Перрона $D^p_Y(t_0, y_0)$ такой, что если $y_1 \in D^p_Y(t_0, y_0)$, то

$$|y(t, t_0, y_1) - y(t, t_0, y_0)| \le 4a\,|y_1 - y_0|\, e^{-(\lambda_1 - 3\sigma)(t - t_0)}, \quad 0 \le t - t_0 \le 2T.$$

Теперь рассмотрим $(t_0, x_0) \in K$ и y_0 такие, что $|x_0 - y_0| \le \varepsilon$. Из (2.19) следует, что

$$y(t, t_0, y_0) \in \Gamma_i\left(t, x(t, t_0, x_0), \frac{\beta}{2}\right), \quad 0 \le t - t_0 \le 2T, \quad i = 1, 2.$$

Из (2.16) и (2.18), в свою очередь, следует, что

$$\begin{aligned}
&|y(t, t_0, y_0) - \varphi_1(y(t, t_0, y_0))| \le \\
&\quad \le |y(t, t_0, y_0) - x(t, t_0, y_0)| + |x(t, t_0, y_0) - \varphi_1(x(t, t_0, y_0))| + \\
&\quad\quad + |\varphi_1(x(t, t_0, y_0)) - \varphi_1(y(t, t_0, y_0))| \le \\
&\le \frac{\varepsilon \sin(\alpha/4)}{3(\bar{L}+1)} + \frac{\varepsilon \sin(\alpha/4)}{200} + \bar{L}\frac{\varepsilon \sin(\alpha/4)}{3(\bar{L}+1)} = \frac{203}{600}\varepsilon \sin(\alpha/4) < \varepsilon, \quad T \le t - t_0 \le 2T.
\end{aligned}$$

В итоге,
$$|y(t,t_0,y_0)-\varphi_1(y(t,t_0,y_0))|<\varepsilon, \quad T\le t-t_0\le 2T. \tag{2.24}$$
Кроме того, из вышеприведенных рассуждений, (2.12) и (2.13) следует, что
$$|y(t,t_0,y_0)-\varphi_2(y(t,t_0,y_0))|<\varepsilon, \ \ T\le t-t_0\le 2T.$$

Рассмотрим множество Q, состоящее из непрерывных функций $f: K\to\mathbb{R}^2$, удовлетворяющих следующим условиям:
(1) $f(t,x)\in M_2(t,x)$ для всех $(t,x)\in K$;
(2) $|f(t,x)|\le\varepsilon$ для всех $(t,x)\in K$;
(3) $|x+f(t,x)-\varphi_1(x+f(t,x))|\le\varepsilon$ для всех $(t,x)\in K$;
(4) для любого листа $\Upsilon\subset K$ отображение $(t,x)\longrightarrow(t,\varphi_1(x+f(t,x)))$, $(t,x)\in\Upsilon$, действующее из Υ в Υ, является взаимооднозначным;
(Другими словами, поверхность $(t,x+f(t,x))$, $(t,x)\in\Upsilon$ можно задать с помощью функции $f_1(t,x)$ таким образом, что $f_1(t,x)\in M_1(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Upsilon$.)
(5) $f_1(t,x)$ локально липшицева по второй переменной на любом листе $\Upsilon\subset K$ с константой l, удовлетворяющей неравенству $l\le \mathrm{tg}((3/4)c\alpha)<1$.
(Из этого следует, что для любой точки $(t_0,x_0)\in\Upsilon$ существует $\varepsilon_1=\varepsilon_1(t_0,x_0,f_1)<\varepsilon$ такое, что $|f_1(t_0,x_0)-f_1(t_0,x_1))|\le l\,|x_0-x_1|$ при $|x_0-x_1|\le\varepsilon_1$, $x_1\in\widehat{D}(t_0,x_0)$.)

Введем метрику на Q следующим образом:
$$d(f^1,f^2)=\sup_{(t,x)\in K}(\left|f^1(t,x)-f^2(t,x)\right|).$$

Очевидно, что Q является замкнутым подмножеством $C^0(K,\mathbb{R}^2)\bigcap L^\infty(K,\mathbb{R}^2)$. Отсюда, в свою очередь, следует полнота Q.

Рассмотрим $f\in Q$, $(t_0,x_0)\in K$ и $y_0=x_0+f(t_0,x_0)$. Для каждого $\tau: 0\le\tau\le 2T$ определим $\bar f_\tau=A_\tau f$ следующим образом:
$$\bar f_\tau(t_0+\tau,\varphi_2(y(t_0+\tau,t_0,y_0)))=y(t_0+\tau,t_0,y_0)-\varphi_2(y(t_0+\tau,t_0,y_0)).$$

Докажем, что $\bar f_\tau$ определена корректно. Для этого надо показать, во-первых, что для любой точки $(t_0+\tau,\bar x)\in\Upsilon$, $0\le\tau\le 2T$, найдется такая точка $(t_0,\tilde x)\in\Upsilon$, что $\bar x=\varphi_2(y(t_0+\tau,t_0,\tilde y))$, где $\tilde y=\tilde x+f(t_0,\tilde x)$; во-вторых, что для любых двух точек $(t_0,x_1),(t_0,x_2)\in\Upsilon$ таких, что $x_1\ne x_2$, выполнено $\varphi_2(y(t_0+\tau,t_0,y_1))\ne\varphi_2(y(t_0+\tau,t_0,y_2))$, $\ \ 0\le\tau\le 2T$, где $y_i=x_i+f(t_0,x_i)$, $i=1,2$.

Начнем со второго утверждения. Не умаляя общности, можем считать, что $|x_1-x_2|\le\varepsilon_1(t_0,x_1,f_1)$. Из того, что $f\in Q$, следует, что $\angle(U^n(t_0,x_1),y_2-y_1)\le\frac{14c\alpha}{16}$ (мы воспользовались липшицевостью f_1). Используя (2.14) и (2.20), получаем $\angle(U^n_Y(t_0,y_1),y_2-y_1)\le c\alpha$. Теперь из (2.22) следует, что
$$\angle(U^n_Y(t_0+\tau,y(t_0+\tau,t_0,y_1)),y(t_0+\tau,t_0,y_2)-y(t_0+\tau,t_0,y_1))\le\frac{\alpha}{2},$$
где $0\le\tau\le 2T$. Вновь используя (2.14) и (2.20), получаем
$$\angle(U^n(t_0+\tau,\varphi_2(y(t_0+\tau,t_0,y_1))),y(t_0+\tau,t_0,y_2)-y(t_0+\tau,t_0,y_1))\le 0.98\alpha.$$
Из этого следует, что $\varphi_2(y(t_0+\tau,t_0,y_1))\ne\varphi_2(y(t_0+\tau,t_0,y_2))$, $\ \ 0\le\tau\le 2T$.

Теперь перейдем к доказательству первого утверждения. Предположим, что найдется такая точка $(t_0+\tau,\bar{x})\in\Upsilon$, для которой не существует точки $(t_0,\tilde{x})\in\Upsilon$ такой, что $\bar{x}=\varphi_2(y(t_0+\tau,t_0,\tilde{y}))$, где $\tilde{y}=\tilde{x}+f(t_0,\tilde{x})$.

Докажем, что множество таких точек (обозначим его П) открыто. Другими словами, докажем, что существует диск $\widehat{D}(t_0+\tau,\bar{x})$ радиуса $\hat{r}$, все точки которого удовлетворяют вышеуказанному свойству. Действительно, если бы такого диска не существовало, то мы смогли бы найти последовательность $\bar{x}_i\longrightarrow\bar{x}$, $i\to\infty$, такую, что для каждой точки $\bar{x}_i$ существовала бы точка x_i такая, что $\bar{x}_i=\varphi_2(y(t_0+\tau,t_0,y_i))$, где $y_i=x_i+f(t_0,x_i)$. Тогда мы могли бы рассмотреть $\tilde{x}$ такую, что $x_i\longrightarrow\tilde{x}$, $i\to\infty$, и, воспользовавшись непрерывностью отображения $x\longrightarrow\varphi_2(y(t_0+\tau,t_0,x+f(t_0,x)))$, получили, что $\bar{x}=\varphi_2(y(t_0+\tau,t_0,\tilde{y}))$, где $\tilde{y}=\tilde{x}+f(t_0,\tilde{x})$.

Но, с другой стороны, дополнение множества П тоже открыто. Это следует из непрерывности и (доказанной ранее) инъективности отображения

$$x\longrightarrow\varphi_2(y(t_0+\tau,t_0,x+f(t_0,x))).$$

В результате приходим к противоречию. Итак, функция $\bar{f}_\tau$ определена корректно.

Покажем, что $\bar{f}_\tau\in Q$ при $T\le\tau\le 2T$. Непрерывность $\bar{f}_\tau$ следует из непрерывности f и непрерывности отображения $y_0\longrightarrow\varphi_2(y(t_0+\tau,t_0,y_0))$. Свойство (1) следует из определения отображения A_τ. Свойства (2) и (3) следуют из (2.24) и из рассуждений, сопутствующих (2.24). Свойство (4) доказывается тем же способом, что и корректность определения функции $\bar{f}_\tau$. Свойство (5) доказывается методами, изложенными в [1]. Это означает, что $A_\tau Q\subset Q,\ T\le\tau\le 2T$.

Теперь докажем, что оператор A_τ является сжимающим при $T\le\tau\le 2T$.

Рассмотрим $f^1,f^2\in Q$, $(t_0,x_0)\in\Upsilon\subset K$, $y_1=f^1(t_0,x_0)$, $y_2=f^2(t_0,x_0)$. Рассмотрим также поверхность $y=x+f^1(t_0,x)$, $(t_0,x)\in\Upsilon$. Очевидно, что с помощью $M_i(t_0,x)$, $(t_0,x)\in\Upsilon$, $i=1,2$, мы можем ввести две системы координат в $\beta/2$-окрестности этой поверхности. Заметим, что диски Перрона $D^p_Y(t_0,y)$, где $y=x+f^1(t_0,x)$, $(t_0,x)\in\Upsilon$, образуют расслоение в этой окрестности. Таким образом, по аналогии с отображениями φ_i, $i=1,2$, мы можем рассмотреть отображения

$$\varphi_{f^1i}:\Gamma_{f^1i}(t_0,y_1,\beta/2)\longrightarrow f^1(t_0,\widehat{D}(t_0,x_0)),\quad i=1,2.$$

Теперь рассмотрим поверхность $y=y(t_0+\tau,t_0,x+f^1(t_0,x)),\quad(t_0,x)\in\Upsilon$.

На ней мы ровно таким же образом можем ввести координаты и рассмотреть отображения

$$\tilde{\varphi}_{f^1i}:\Gamma_{f^1_\tau i}(t_0+\tau,y(t_0+\tau,t_0,y_1),\beta/2)\longrightarrow f^1_\tau(t_0+\tau,\widehat{D}(t_0+\tau,\bar{x}_1)),$$

где $\bar{x}_1=\varphi_2(y(t_0+\tau,t_0,y_1))$.

Повторим еще раз все рассуждения, предваряющие неравенство (2.16). В результате, используя второе из неравенств (2.3), получаем

$$\left|y(t_0+\tau,t_0,y_2)-\tilde{\varphi}_{f^12}(y(t_0+\tau,t_0,y_2))\right|\le$$
$$\le\frac{1}{2}\left|y_1-y_2\right|=\frac{1}{2}\left|f^1(t_0,x_0)-f^2(t_0,x_0)\right|\le\frac{1}{2}d(f^1,f^2).$$

В итоге $d(A_\tau f^1,A_\tau f^2)\le\frac{1}{2}d(f^1,f^2),\quad f^1,f^2\in Q,\quad T\le\tau\le 2T$.

Итак, оператор A_τ является сжимающим при $\tau\in[T,2T]$. Из этого следует существование неподвижной точки g_τ, для которой выполнено $A_\tau g_\tau=g_\tau$. Пусть $g=g_T$.

Для каждого рационального числа $\rho = \frac{p}{q} \in [0,1]$ мы имеем $A^q_{T+\rho T} = A^{p+q}_T$. Таким образом, $g = g_{T+\rho T}$ для всех рациональных $\rho \in [0,1]$. Из непрерывности получим $g = g_\tau$ для $T \leq \tau \leq 2T$. Для $0 \leq \tau \leq T$ имеем $A_\tau g = A_\tau A_T g = A_{\tau+T} g = g$. В итоге $A_\tau g = g$ для всех $\tau > 0$.

Положим

$$h(t,x) = (t, x + g(t,x)).$$

Очевидно, что множество $K^Y = h(K)$ является инвариантным множеством системы (2.1). Очевидно также, что для любого листа $\Upsilon \subset K$ множество $\Upsilon^Y = h(\Upsilon)$ является инвариантным множеством системы (2.1). Из определения множества Q следует, что $|h(t,x) - (t,x)| \leq \varepsilon$.

Итак, мы построили непрерывное отображение h и доказали утверждения (1) и (2) основной теоремы. Утверждения, аналогичные (3), (4) и (5), уже были доказаны ранее в работах работах [1], [2], [4].

Литература

1. *Pliss V. A., Sell G. R.* Perturbations of attractors of differential equations // J. of Differential Equations, 1991. Vol. 92. P. 100–124.

2. *Pliss V. A., Sell G. R.* Approximation Dynamics and the Stability of Invariant Sets // J. of Differential Equations, 1997. Vol. 149. P. 1–51.

3. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977.

4. *Бегун Н. А.* Об устойчивости листовых инвариантных множеств двумерных периодических систем // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 4. С. 3–12.

5. *Бегун Н. А.* О замкнутости листового инвариантного множества возмущенной системы // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2013. № 1. С. 80–88.

6. *Монаков В. Н.* Расположение интегральных поверхностей у слабо нелинейных систем дифференциальных уравнений // Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. 1973. Вып. 1. С. 68–74.

7. *Бегун Н. А.* Об устойчивости листовых инвариантных множеств трехмерных периодических систем // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2014. Вып. 3. С. 12–19.

Статья поступила в редакцию 23 октября 2014 г.

Сведения об авторе

Бегун Никита Андреевич — кандидат физико-математических наук; nikitabegun88@gmail.com

PERTURBATIONS OF WEAKLY HYPERBOLIC INVARIANT SETS OF TWO-DIMENSION PERIODIC SYSTEMS

Nikita A. Begun

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; nikitabegun88@gmail.com

The question of structural stability is one of the most important areas in a present-day theory of differential equations. In this paper we study small C^1-perturbations of a systems of a differential equations. We introduce the concepts of a weakly hyperbolic invariant set K and leaf Υ for a system of ordinary differential equations. Lipschitz condition is not suppose. We show, that if the perturbation is small enough, then there is a continuous mapping $h : K \longrightarrow K^Y$, where K^Y is a weakly hyperbolic set of perturbed equation. Moreover we show, that $h(\Upsilon)$ is a leaf of perturbed system. Refs 7.

Keywords: stability, invariant set, small perturbations, hyperbolic structures, weakly hyperbolic set, structural stability.

References

1. Pliss V. A., Sell G. R., “Perturbations of attractors of differential equations”, *J. of Differential Equations* **92**, 100–124 (1991).

2. Pliss V. A., Sell G. R. “Approximation Dynamics and the Stability of Invariant Sets”, *J. of Differential Equations* **149**, 1–51 (1997).

3. Pliss V. A., “Integralnie mnozhestva periodicheskih system differentsialnyh uravnenii” (Nauka, Moscow, 1977) [In Russian].

4. Begun N. A., “On the stability of sheet invariant sets of two-dimensional periodic systems”, *Vestnik St.Petersburg Univ. Math.* **45**(4), 145–152 (2012).

5. Begun N. A., “On closure of a leaf invariant set of a perturbed system”, *Differentsialnye uravnenija i protsessy upravleniya* 1, 80–88 (2013) [In Russian].

6. Monakov V. N., “Arrangement of integral surfaces in the weakly nonlinear systems of differential equations”, *Vestnik Leningradskogo universiteta* Ser. 1, Issue 1, 68–74 (1973) [In Russian].

7. Begun N. A., “On the stability of invariant sets of leaves of three-dimensional periodic systems”, *Vestnik St.Petersburg Univ. Math.* **47**(3), 95–101 (2014).