УДК 517.925 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 1

О ГЛАДКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОЙ ТОЧКИ ПОКОЯ*

Ю. А. Ильин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Рассматривается система дифференциальных уравнений, у которой начало координат есть асимптотически устойчивая точка покоя и у которой разложение в ряд Тейлора в окрестности этой точки не имеет линейных членов. Предполагаеся, что логарифмическая норма матрицы Якоби отрицательно определена. Доказывается, что такая система локально C^1-эквивалентна любому своему возмущению достаточно высокого порядка. Библиогр. 7 назв.

Ключевые слова: гладкая эквивалентность, гладкая сопряженность, существенно нелинейные системы, логарифмическая норма.

§ 1. Постановка задачи. В работе рассматриваются системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x) \tag{1}$$

и

$$\dot{y} = F(y) + G(y), \tag{2}$$

в которых $x, y \in \mathbb{R}^k$, $F(0) = G(0) = 0$ и функция G имеет в нуле более высокий порядок малости, чем F. Ясно, что ноль есть точка покоя для обеих систем. Говорят, что системы (1) и (2) *локально C^1-эквивалентны*, если в некоторой окрестности нуля существует замена переменных, близкая к тождественной, которая переводит (2) в (1). Близость к тождественной означает, что замена имеет вид

$$x = y + f(y), \tag{3}$$

где $f(y)$ C^1-*мало* по сравнению с y.

Задача об эквивалентности двух систем является классической в качественной теории дифференциальных уравнений. Понятно, что наиболее полно в литературе изучен случай, когда $F(x) = Ax$ есть линейное отображение. Здесь основные результаты по голоморфной эквивалентности принадлежат Пуанкаре, а по гладкой — Стернбергу, Ченю и Хартману (см. [7]).

Настоящая же статья посвящена главным образом случаю, когда $F(x)$ — существенно нелинейная функция (например, когда F — однородная функция степени $m > 1$). Про такие системы известно очень мало. Данная работа основывается на двух статьях С. П. Токарева [5, 6]. Нам удалось обобщить его результаты по двум направлениям: во-первых, в качестве коэффициентного признака устойчивости С. П. Токарев использовал так называемое условие Важевского, которое было заменено значительно более общим условием на логарифмические нормы Лозинского от матрицы Якоби

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00624) и СПбГУ (тема 6.0.112.2010).

$F'_y(y)$, во-вторых, за счет более детального анализа свойств решений удалось улучшить ряд оценок на их поведение и, в результате, улучшить оценки на константы и на порядок возмущения G из формулировок теорем (формула (4)).

Перейдем к формулировке основного результата.

Теорема. *Пусть для систем* (1) *и* (2) *при* $\|y\| \leq \Delta < 1$ *выполнены следующие условия:*

(a) $F, G \in C^2$;

(b) $\gamma(F'_y(y)) \leq -\lambda_0 \|y\|^{m-1}$;

(c) $\|F'_y(y)\| \leq K\|y\|^{m-1}$;

(d) $\|G(y)\| \leq c_0 \|y\|^{2m-2+n}$;

(e) $\|G'_y(y)\| \leq c_1 \|y\|^{m-1+n}$;

здесь $\lambda_0 > 0, m \geq 2, K > 0, c_0 > 0, c_1 > 0, n \geq \max\{N, 1\}$ *и константа* N *определяется формулой*

$$N = \frac{2^m K m}{\lambda_0} + 1 - m. \tag{4}$$

Тогда в некоторой окрестности начала координат существует C^1*-гладкая замена переменных вида (3), переводящая (2) в (1), и такая, что*

$$\|f(y)\| = O(\|y\|^{m-1+n}), \quad \|f'_y(y)\| = O(\|y\|^n). \tag{5}$$

В формулировке теоремы символ $\|\cdot\|$ обозначает произвольную подходящую векторную норму в $\mathbb{R}^k$, а также согласованную с ней матричную норму. Символ $\gamma(A)$ обозначает порождаемую ими верхнюю логарифмическую норму матрицы A (см. об этом § 2).

Коротко о схеме доказательства. Искомая замена должна удовлетворять некоторой системе уравнений в частных производных, которую удается заменить на интегральное уравнение. Решение последнего ищется методом последовательных приближений.

§ 2. Вспомогательные сведения и результаты. Начнем с определения и краткого перечня свойств логарифмических норм, которые нам понадобятся при доказательстве (подробности можно найти в [1–3]).

Определение. *Верхней логарифмической нормой матрицы* A*, порождаемой данной векторной нормой* $\|\cdot\|$*, называется предел*

$$\gamma(A) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \to +0} \frac{\|E + hA\| - 1}{h},$$

где E *— единичная матрица.*

Этот предел существует для любой матрицы A. Для логарифмической нормы справедливы следующие свойства:

1) $\gamma(A + B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$;

2) $\gamma(\alpha A) = \alpha\gamma(A), \alpha \geq 0$;

3) $|\gamma(A)| \le \|A\|$;

4) $|\gamma(A) - \gamma(B)| \le \|A - B\|$;

5) $|\gamma(A)|$ есть непрерывная функция от A.

Следующая лемма содержит основную оценку на рост нормы решений, получаемую с помощью логарифмических норм (см. [2]).

Лемма 1. *Пусть $x(t)$ есть решение системы дифференциальных уравнений*

$$\dot{x} = P(t, x)x + q(t, x),$$

где $P(t, x)$ есть непрерывная $(k \times k)$-матричная, а $q(t, x)$ — непрерывная векторная функции. Пусть $\|\cdot\|$ есть произвольная векторная норма, а γ — порождаемая ею верхняя логарифмическая норма. Тогда справедлива оценка

$$\frac{d_+ \|x(t)\|}{dt} \le \gamma(P(t, x(t)))\|x(t)\| + \|q(t, x(t))\|.$$

Символ $\frac{d_+}{dt}$ обозначает правостороннюю производную. Заметим, что γ носит название нормы условно. Например, и это самое ценное ее свойство для оценки из леммы 1, она может быть отрицательной!

Наконец, для доказательства нам понадобится такое неравенство (см. [2]).

Лемма 2. *Пусть непрерывная матричная функция $A(\theta)$ задана на конечном промежутке $\langle a, b\rangle$ и пусть $\gamma(A(\theta)) \le 0$. Тогда*

$$\gamma\left(\int_a^b A(\theta)d\theta\right) \le \int_a^b \gamma(A(\theta))d\theta.$$

Мы начнем с вывода двух оценок на решения системы (2). Обозначим за $\varphi(t, y_0)$ решение системы (2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, y_0) = y_0$.

Лемма 3. *Пусть для системы (2) при $\|y\| \le \Delta < 1$ выполнены следующие условия:*

(a) $F, G \in C^2$;

(b) $\gamma(F'_y(y)) \le -\lambda_0 \|y\|^{m-1}$;

(c) $\|G(y)\| \le c_0 \|y\|^{m+a}$;

(d) $\|G'_y(y)\| \le c_1 \|y\|^{m-1+b}$;

здесь $\lambda_0 > 0, m \ge 2, c_0 > 0, c_1 > 0, a \ge 1, b \ge 1$. Тогда существуют такие константы $0 < \Delta_0 \le \Delta$ и $\lambda > 0$, что при $t \ge 0, \|y_0\| \le \Delta_0$ выполняется

$$\|\varphi(t, y_0)\| \le \frac{\|y_0\|}{(1 + \lambda t \|y_0\|^{m-1})^{\frac{1}{m-1}}}, \tag{6}$$

$$\|\varphi'_y(t, y_0)\| \le \frac{1}{(1 + \lambda t \|y_0\|^{m-1})^{\frac{m}{m-1}}}. \tag{7}$$

Доказательство. Поскольку $F(y) = (\int_0^1 F'_y(\theta y)d\theta)\, y$, систему (2) можно записать в виде

$$\dot{y} = \Big(\int_0^1 F'_y(\theta y)d\theta\Big)\, y + G(y).$$

Применяя лемму 1, получим

$$\frac{d_+\|\varphi(t,y_0)\|}{dt} \le \gamma\Big(\int_0^1 F'_y(\theta\varphi(t,y_0))d\theta\Big)\|\varphi(t,y_0)\| + \|G(\varphi(t,y_0))\|.$$

Из леммы 2 и условия (b) следует, что

$$\gamma\Big(\int_0^1 F'_y(\theta\varphi(t,y_0))d\theta\Big) \le -\int_0^1 \lambda_0\|\theta\varphi(t,y_0)\|^{m-1}d\theta = -\frac{\lambda_0}{m}\|\varphi(t,y_0)\|^m.$$

А тогда, учитывая условие (c), получим

$$\begin{aligned}\frac{d_+\|\varphi(t,y_0)\|}{dt} &\le -\frac{\lambda_0}{m}\|\varphi(t,y_0)\|^m + c_0\|\varphi(t,y_0)\|^{m+a} = \\ &= \left(-\frac{\lambda_0}{m} + c_0\|\varphi(t,y_0)\|^a\right)\|\varphi(t,y_0)\|^m.\end{aligned} \tag{8}$$

Положим $\Delta_1 = \min\{\Delta, (\frac{\lambda_0}{2mc_0})^{\frac{1}{a}}\}$ и возьмем $\|y_0\| \le \Delta_1$. Покажем, что тогда $\|\varphi(t,y_0)\| < \Delta_1$ при всех $t > 0$. При $t = 0$ имеем

$$\frac{d_+\|\varphi(t,y_0)\|}{dt}\Big|_{t=0} \le \left(-\frac{\lambda_0}{m} + c_0\|y_0\|^a\right)\|y_0\|^m \le -\frac{\lambda_0}{2m}\|y_0\|^m < 0.$$

Стало быть, на некотором промежутке $(0,\delta)$ неравенство $\|\varphi(t,y_0)\| < \Delta_1$ выполняется. Допустим противное, и пусть $t_1 > 0$ есть *первый* момент времени такой, что $\|\varphi(t_1,y_0)\| = \Delta_1$. Но тогда на основании (8)

$$\begin{aligned}\frac{d_+\|\varphi(t,y_0)\|}{dt}\Big|_{t=t_1} &\le \left(-\frac{\lambda_0}{m} + c_0\|\varphi(t_1,y_0)\|^a\right)\|\varphi(t_1,y_0)\|^m = \\ &= \left(-\frac{\lambda_0}{m} + c_0\Delta_1^a\right)\Delta_1^m \le -\frac{\lambda_0}{2m}\Delta_1^m < 0.\end{aligned}$$

Поэтому, при $t < t_1$ должно было бы выполняться неравенство $\|\varphi(t,y_0)\| > \|\varphi(t_1,y_0)\| = \Delta_1$, что противоречит выбору t_1. Таким образом, $\|\varphi(t,y_0)\| < \Delta_1$ при всех $t > 0$. Учитывая теперь эту оценку в (8), получим

$$\begin{aligned}\frac{d_+\|\varphi(t,y_0)\|}{dt} &\le \left(-\frac{\lambda_0}{m} + c_0\|\varphi(t,y_0)\|^a\right)\|\varphi(t,y_0)\|^m \le \\ &\le \left(-\frac{\lambda_0}{m} + c_0\Delta_1^a\right)\|\varphi(t,y_0)\|^m \le -\frac{\lambda_0}{2m}\|\varphi(t,y_0)\|^m.\end{aligned}$$

Проинтегрируем это неравенство с помощью теоремы сравнения (см. [7]). Решение уравнения сравнения $\dot{u}(t) = -\frac{\lambda_0}{2m}u(t)^m$, $u(0) = \|y_0\|$ имеет вид $u(t) = \frac{\|y_0\|}{(1+\lambda t\|y_0\|^{m-1})^{\frac{1}{m-1}}}$, где

$$\lambda \overset{\text{def}}{=} \frac{\lambda_0(m-1)}{2m}. \tag{9}$$

Поэтому
$$\|\varphi(t,y_0)\| \le u(t) \le \frac{\|y_0\|}{(1+\lambda t\|y_0\|^{m-1})^{\frac{1}{m-1}}}.$$
Неравенство (6) доказано.

Докажем (7). Из общего курса дифференциальных уравнений известно, что $\varphi'_y(t,y_0)$ есть фундаментальная матрица $\Phi(t)$ системы в вариациях
$$\dot z = \bigl(F'_y(\varphi(t,y_0)) + G'_y(\varphi(t,y_0))\bigr)z,$$
удовлетворяющая начальному условию $\Phi(0)=E$. На основании лемм 1 и 2, свойства 3 логарифмической нормы и условий (b) и (d) леммы 3 получаем
$$\begin{aligned}\frac{d_+\|\Phi(t)\|}{dt} &\le \gamma\left(F'_y(\varphi(t,y_0)) + G'_y(\varphi(t,y_0))\right)\|\Phi(t)\| \le \\ &\le \left(-\lambda_0\|\varphi(t,y_0)\|^{m-1} + c_1\|\varphi(t,y_0)\|^{m-1+b}\right)\|\Phi(t)\|. \qquad (10)\end{aligned}$$
В силу неравенства (6) $\|\varphi(t,y_0)\| \le \|y_0\|$. Тогда, положив $\Delta_0 = \min\{\Delta_1, (\frac{\lambda_0}{2c_1})^{\frac{1}{b}}\}$, при $\|y_0\| \le \Delta_0$ получим
$$\begin{aligned}-\lambda_0\|\varphi(t,y_0)\|^{m-1} + c_1\|\varphi(t,y_0)\|^{m-1+b} &\le \left(-\lambda_0 + c_1\|y_0\|^b\right)\|\varphi(t,y_0)\|^{m-1} \le \\ &\le -\frac{\lambda_0}{2}\|\varphi(t,y_0)\|^{m-1}.\end{aligned}$$
Подставляя это в (10) и учитывая оценку (6), будем иметь
$$\frac{d_+\|\Phi(t)\|}{dt} \le -\frac{\lambda_0}{2}\|\varphi(t,y_0)\|^{m-1}\|\Phi(t)\| \le -\frac{\lambda_0}{2}\frac{\|y_0\|^{m-1}}{(1+\lambda t\|y_0\|^{m-1})^{\frac{1}{m-1}}}\|\Phi(t)\|.$$
Решением уравнения сравнения
$$\dot u(t) = -\frac{\lambda_0\|y_0\|^{m-1}}{2(1+\lambda t\|y_0\|^{m-1})}u(t), \quad u(0)=\|\Phi(0)\|=1$$
является функция $u(t) = (1+\lambda t\|y_0\|^{m-1})^{-\frac{\lambda_0}{2\lambda}} \overset{(9)}{=} (1+\lambda t\|y_0\|^{m-1})^{-\frac{m}{m-1}}$. Применяя теорему сравнения, получаем
$$\|\varphi'_y(t,y_0)\| \le u(t) = (1+\lambda t\|y_0\|^{m-1})^{-\frac{m}{m-1}}.$$
Неравенство (7) и, тем самым, лемма 3 доказаны.

§ 3. Доказательство основной теоремы. Пусть $\varphi(t,y_0)$, как и в лемме 3, обозначает решение системы (2). Прежде всего заметим, что для системы (2) выполняются условия леммы 3 при $a = m+n-2 \ge 1, b = n \ge 1$. Возьмем Δ_0 из этой леммы, так чтобы при $\|y_0\| \le \Delta_0$ выполнялись оценки (6) и (7).

Пусть $x = y + f(y)$ есть искомая замена переменых (3). Продифференцируем ее в силу систем (1) и (2):
$$\begin{aligned}\dot x = (E+f'(y))\dot y \quad &\Leftrightarrow \quad F(x) = (E+f'(y))(F(y)+G(y)) \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad f'(y)(F(y)+G(y)) = F\bigl(y+f(y)\bigr) - F(y) - G(y). \qquad (11)\end{aligned}$$

Таким образом, $f(y)$ должно быть решением системы уравнений в частных производных (11), таким, что выполнены свойства (5). Это решение может быть найдено следующим образом. Подставим в (11) вместо y решение $\varphi(t,y)$:

$$f'(\varphi(t,y))(F(\varphi(t,y))+G(\varphi(t,y))) = F\big(\varphi(t,y)+f(\varphi(t,y))\big)-F(\varphi(t,y))-G(\varphi(t,y)).$$

Заметим, что в левой части стоит $\frac{d}{dt}f(\varphi(t,y))$, так что

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(t,y)) = F\big(\varphi(t,y)+f(\varphi(t,y))\big)-F(\varphi(t,y))-G(\varphi(t,y)),$$

и проинтегрируем это равенство от 0 до $+\infty$, учитывая, что $f(0)=0$, $\varphi(0,y)=y$, $\varphi(+\infty,y)=0$:

$$f(y) = -\int_0^{+\infty}\Big(F\big(\varphi(t,y)+f(\varphi(t,y))\big)-F(\varphi(t,y))-G(\varphi(t,y))\Big)dt. \qquad (12)$$

Таким образом, $f(y)$ должно удовлетворять интегральному уравнению (12). Верно и обратное, если f есть гладкое решение интегрального уравнения (12), удовлетворяющее оценкам (5), и такое, что возможно дифференцирование под знаком интеграла, то замена вида (3) — искомая. В самом деле, подставив $\varphi(s,y)$ вместо y в (12), получим

$$\begin{aligned}&f(\varphi(s,y)) =\\ &= -\int_0^{+\infty}\Big(F\big(\varphi(t,\varphi(s,y))+f(\varphi(t,\varphi(s,y)))\big)-F(\varphi(t,\varphi(s,y)))-G(\varphi(t,\varphi(s,y)))\Big)dt.\end{aligned}$$

Воспользуемся тождеством $\varphi(t,\varphi(s,y))=\varphi(t+s,y))$ и сделаем под интегралом замену переменой $t+s=\tau$:

$$f(\varphi(s,y)) = -\int_s^{+\infty}\Big(F\big(\varphi(\tau,y)+f(\varphi(\tau,y))\big)-F(\varphi(\tau,y))-G(\varphi(\tau,y))\Big)d\tau.$$

Продифференцируем это тождество по s и заменим $\dot\varphi(s,y)$ на правую часть уравнения (2), решением которого φ является:

$$f'(\varphi(s,y))(F(\varphi(s,y))+G(\varphi(s,y))) = F\big(\varphi(s,y))+f(\varphi(s,y))\big)-F(\varphi(s,y))-G(\varphi(s,y)).$$

Наконец, подставив $s=0$, получим

$$f'(y)(F(y)+G(y)) = F\big(y+f(y)\big)-F(y)-G(y).$$

Следовательно, f удовлетворяет (11) и, стало быть, замена, задаваемая формулой (3), переводит систему (2) в (1).

Таким образом, доказательство теоремы свелось к доказательству существования решения у интегрального уравнения (12), которое удовлетворяло бы оценкам (5) и допускало бы возможность дифференциирования под знаком интеграла. Для этого воспользуемся методом последовательных приближений.

Прежде всего заметим, что, благодаря условию (a) теоремы, существует такое $L>0$, что

$$\|F'(y_1)-F'(y_2)\| \le L\|y_1-y_2\|$$

для любых $y_{1,2}$ из Δ-окрестности начала координат. Далее, введем константы

$$\mu = \frac{2^m K m}{(m+n-1)\lambda_0}, \tag{13}$$

$$\sigma_0 = \frac{2mc_0}{(m+n-1)\lambda_0}, \tag{14}$$

$$\sigma_1 = \max\left\{\frac{2mc_1}{(m+n)\lambda_0}, \frac{8mLc_0}{2^m K\lambda_0}\right\}, \tag{15}$$

где λ_0 взято из леммы 3. Заметим, что $\mu < 1$, так как $n \geq N$, где N определена формулой (4).

Наконец, сузим окрестность начала координат настолько, чтобы для любого y из этой окрестности и любого $n \geq N$ выполнялись неравенства

$$\frac{\sigma_0\|y\|^{m+n-2}}{1-\mu} \leq 1, \quad \frac{\sigma_1\|y\|^n}{1-\mu} \leq 1. \tag{16}$$

Для этого положим $\widehat{\Delta} = \min\left\{\Delta_0, (\frac{1-\mu}{\sigma_0})^{\frac{1}{m+N-2}}, (\frac{1-\mu}{\sigma_1})^{\frac{1}{N}}\right\}$ и далее будем считать, что $\|y\| \leq \widehat{\Delta}$.

Определим последовательные приближения следующим образом

$$f_0(y) \stackrel{\text{def}}{=} 0,$$
$$f_{i+1}(y) \stackrel{\text{def}}{=} -\int_0^{+\infty}\Big(F\big(\varphi(t,y)+f_i(\varphi(t,y))\big) - F(\varphi(t,y)) - G(\varphi(t,y))\Big)dt.$$

Проверим по индукции, что в $\widehat{\Delta}$-окрестности начала координат верны следующие утверждения:

(I) f_{i+1} определена и непрерывно дифференцируема, причем производная может быть найдена дифференцированием под знаком интеграла;

(II) $\|f_{i+1}(y) - f_i(y)\| \leq \sigma_0\mu^i\|y\|^{m+n-1}$;

(III) $\|f'_{i+1}(y) - f'_i(y)\| \leq \sigma_1\mu^i\|y\|^n$.

Пусть $i = 0$. Тогда $f_1(y) = \int_0^{+\infty} G(\varphi(t,y))dt$. Из условия (d) и оценки (6) следует, что

$$\|f_1(y) - f_0(y)\| = \left\|\int_0^{+\infty} G(\varphi(t,y))dt\right\| \stackrel{\text{(d)}}{\leq} \int_0^{+\infty} c_0\|\varphi(t,y)\|^{2m+n-2}dt \stackrel{(6)}{\leq}$$
$$\leq \int_0^{+\infty} \frac{c_0\|y\|^{2m+n-2}}{(1+\lambda t\|y\|^{m-1})^{\frac{2m+n-2}{m-1}}}dt = \frac{(m-1)c_0}{(m+n-1)\lambda}\|y\|^{m+n-1} =$$
$$\stackrel{(9)}{=} \frac{2mc_0}{(m+n-1)\lambda_0}\|y\|^{m+n-1} \stackrel{(14)}{=} \sigma_0\mu^0\|y\|^{m+n-1}.$$

Из этого вытекает, что f_1 определена и выполняется (II):

$$\|f_1'(y) - f_0'(y)\| = \left\|\left(\int_0^{+\infty} G(\varphi(t,y))dt\right)_y'\right\| = \left\|\int_0^{+\infty} G_y'(\varphi(t,y))\varphi_y'(t,y)dt\right\| \overset{(e),(7)}{\leq}$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \frac{c_1\|\varphi(t,y)\|^{m+n-1}}{(1+\lambda t\|y\|^{m-1})^{\frac{m}{m-1}}}dt \overset{(6)}{\leq} \int_0^{+\infty} \frac{c_1\|y\|^{m+n-1}}{(1+\lambda t\|y\|^{m-1})^{\frac{m}{m-1}+\frac{m+n-1}{m-1}}}dt =$$

$$= \frac{(m-1)c_1}{(m+n)\lambda}\|y\|^n \overset{(9)}{=} \frac{2mc_1}{(m+n)\lambda_0}\|y\|^n \overset{(15)}{\leq} \sigma_1\mu^0\|y\|^n.$$

Интегралы сходятся равномерно по y, что доказывает возможность дифференцирования под знаком интеграла и гладкость f_1.

Докажем индукционный переход $i \to i+1$:

$$\|f_{i+1}(y) - f_i(y)\| = \left\|\int_0^{\infty} \Big(F\big(\varphi(t,y) + f_i(\varphi(t,y))\big) - F\big(\varphi(t,y) + f_{i-1}(\varphi(t,y))\big)\Big)dt\right\| =$$

(обозначим для краткости $\varphi = \varphi(t,y)$, $f_i = f_i(\varphi(t,y))$ и применим формулу конечных приращений)

$$= \left\|\int_0^{\infty}\int_0^1 F_y'\big(\varphi + \theta f_i + (1-\theta)f_{i-1}\big)d\theta(f_i - f_{i-1})dt\right\| \leq$$

(используем (c) и индукционное предположение (II))

$$\leq \int_0^{\infty}\int_0^1 K\big\|\varphi + \theta f_i + (1-\theta)f_{i-1}\big\|^{m-1}d\theta\|f_i - f_{i-1}\|dt \leq$$

$$\leq \int_0^{\infty} K\sigma_0\mu^{i-1}\|\varphi(t,y)\|^{m+n-1}\Big(\int_0^1 \big\|\varphi + \theta f_i + (1-\theta)f_{i-1}\big\|^{m-1}d\theta\Big)dt.$$

Оценим отдельно внутренний интеграл. Учитывая (16) и то, что $\mu < 1$, получим

$$\|f_i\| \leq \|f_i - f_{i-1}\| + \|f_{i-1} - f_{i-2}\| + \cdots + \|f_1 - f_0\| \leq$$

$$\overset{(II)}{\leq} \sigma_0\|\varphi(t,y)\|^{m+n-1}(\mu^{i-1} + \mu^{i-2} + \cdots + 1) = \sigma_0\|\varphi(t,y)\|^{m+n-1}\frac{1-\mu^i}{1-\mu} \leq$$

$$\leq \frac{\sigma_0\|\varphi(t,y)\|^{m+n-1}}{1-\mu} \leq \|\varphi(t,y)\|\frac{\sigma_0\|y\|^{m+n-2}}{1-\mu} \overset{(16)}{\leq} \|\varphi(t,y)\|.$$

Аналогично $\|f_{i-1}\| \leq \|\varphi\|$ и, следовательно,

$$\int_0^1 \big\|\varphi + \theta f_i + (1-\theta)f_{i-1}\big\|^{m-1}d\theta \leq \int_0^1 (\|\varphi\| + \theta\|\varphi\| + (1-\theta)\|\varphi\|)^{m-1}d\theta \leq (2\|\varphi\|)^{m-1}.$$

Применим это в исходной оценке:

$$\|f_{i+1}(y)-f_i(y)\| \le \int\limits_0^\infty K\sigma_0\mu^{i-1}2^{m-1}\|\varphi(t,y)\|^{2m+n-2}dt \overset{(6)}{\le}$$

$$\le K\sigma_0\mu^{i-1}2^{m-1}\int\limits_0^\infty \left(\frac{\|y_0\|}{(1+\lambda t\|y_0\|^{m-1})^{\frac{1}{m-1}}}\right)^{2m+n-2} dt \overset{(9)}{=} \frac{K\sigma_0\mu^{i-1}2^m m}{(m+n-1)\lambda_0}\|y\|^{m+n-1} =$$

$$\overset{(13)}{=} \sigma_0\mu^i\|y\|^{m+n-1}.$$

Таким образом, (II) доказано. Докажем (III).

$$\|f'_{i+1}(y)-f'_i(y)\| = \Big\|\int\limits_0^\infty \Big(F\big(\varphi(t,y)+f_i(\varphi(t,y))\big)-F\big(\varphi(t,y)+f_{i-1}(\varphi(t,y))\big)\Big)'_y dt\Big\| =$$

$$= \Big\|\int\limits_0^\infty \Big(F'_y(\varphi+f_i)\big(E+f'_i\big)\varphi'_y - F'_y(\varphi+f_{i-1})\big(E+f'_{i-1}\big)\varphi'_y + F'_y(\varphi+f_i)\big(E+f'_{i-1}\big)\varphi'_y -$$

$$- F'_y(\varphi+f_i)\big(E+f'_{i-1}\big)\varphi'_y\Big)dt\Big\| \le \int\limits_0^\infty \Big(\big\|F'_y(\varphi+f_i)\big\|\,\|f'_i-f'_{i-1}\|+$$

$$+\big\|F'_y(\varphi+f_i)-F'_y(\varphi+f_{i-1})\big\|\,\|E+f'_{i-1}\|\Big)\|\varphi'_y\|dt \le$$

$$\overset{(a)(c)(III)}{\le} \int\limits_0^\infty \Big(K\|\varphi+f_i\|^{m-1}\sigma_1\mu^{i-1}\|\varphi\|^n + L\|f'_i-f'_{i-1}\|\,\|E+f'_{i-1}\|\Big)\|\varphi'_y\|dt.$$

При доказательстве (II) мы уже установили, что $\|f_i(\varphi(t,y))\| \le \|\varphi(t,y)\|$ при $t\ge 0$ и $\|y\|\le\widehat{\Delta}$. Аналогичным образом оценим $\|E+f'_{i-1}\|$:

$$\|E+f'_{i-1}\| \le \|E\| + \|f'_{i-1}-f'_{i-2}\| + \dots + \|f'_1-f'_0\| \le$$

$$\overset{(III)}{\le} \sigma_1\|\varphi\|^n(\mu^{k-2}+\mu^{k-3}+\dots+\mu+1)+1 \le \frac{\sigma_1\|\varphi(t,y)\|^n}{1-\mu}+1 \le \frac{\sigma_1\|y\|^n}{1-\mu}+1 \overset{(16)}{\le} 2.$$

Таким образом,

$$\|f'_{i+1}(y)-f'_i(y)\| \le \int\limits_0^\infty \Big(K2^{m-1}\|\varphi\|^{m-1}\sigma_1\mu^{i-1}\|\varphi\|^n + 2L\|f_i-f_{i-1}\|\Big)\|\varphi'_y\|dt \le$$

$$\overset{(II)(7)}{\le} \int\limits_0^\infty \mu^{i-1}(\sigma_1 2^{m-1}K+2L\sigma_0)\frac{\|\varphi(t,y)\|^{m+n-1}}{(1+\lambda t\|y\|^{m-1})^{\frac{m}{m-1}}}dt \le$$

$$\overset{(6)}{\le} \int\limits_0^\infty \mu^{i-1}(\sigma_1 2^{m-1}K+2L\sigma_0)\frac{\|y\|^{m+n-1}}{(1+\lambda t\|y_0\|^{m-1})^{\frac{m}{m-1}+\frac{m+n-1}{m-1}}}dt =$$

$$= \frac{\mu^{i-1}(\sigma_1 2^{m-1}K+2L\sigma_0)(m-1)}{(m+n)\lambda}\|y\|^n \overset{(9)}{=} \frac{\mu^{i-1}(\sigma_1 2^m K+4L\sigma_0)m}{(m+n)\lambda_0}\|y\|^n =$$

$$\overset{(14)}{=} \mu^{i-1}\left(\frac{\sigma_1 2^m Km}{(m+n)\lambda_0} + \frac{8Lm^2}{(m+n)(m+n-1)\lambda_0^2}\right)\|y\|^n \le$$

$$\overset{(15)}{\leq} \sigma_1\mu^{i-1}\left(\frac{2^m Km}{(m+n)\lambda_0}+\frac{2^m Km}{(m+n)(m+n-1)\lambda_0}\right)\|y\|^n = \\ = \sigma_1\mu^{i-1}\frac{2^m Km}{(m+n-1)\lambda_0}\|y\|^n \overset{(13)}{=} \sigma_1\mu^i\|y\|^n.$$

Оценка (III), возможность дифференцирования под знаком интеграла и гладкость $f_i(y)$, таким образом, доказаны.

Из оценок (II) и (III) вытекает, что последовательности $f_i(y)$ и $f_i'(y)$ равномерно сходятся при $\|y\| \leq \widehat{\Delta}$. Ясно, что предельная функция $f(y)$ является решением уравнения (12) и, по теореме Коши, она будет гладкой, причем $f_i'(y) \rightrightarrows f'(y)$. Это также обосновывает возможность дифференцирования под знаком интеграла в интегральном уравнении (12).

Остается лишь показать, что для f выполняется (5). Для этого надо рассмотреть ряд $(f_1 - f_0) + (f_2 - f_1) + \dots + (f_{i+1} - f_i) + \dots$, который сходится к f. Применяя (II), получим

$$\|f\| \leq \|f_1 - f_0\| + \dots + \|f_{i+1} - f_i\| + \dots \leq \sigma_0\|y\|^{m+n-1}(1 + \dots + \mu^i + \dots) \leq \\ \leq \frac{\sigma_0}{1-\mu}\|y\|^{m+n-1}.$$

Аналогичным образом оценивается f'. Теорема доказана.

Литература

1. *Волков Д. Ю., Ильин Ю. А.* О существовании инвариантного тора у существенно нелинейной системы дифференциальных уравнений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1992. Вып. 1. С. 118–119.
2. *Ильин Ю. А.* О применении логарифмических норм в дифференциальных уравнениях // Нелинейные динамические системы. Вып. 2 / под ред. Г. А. Леонова. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1999. С. 103–121.
3. *Ильин Ю. А.* О существовании локально-интегральной поверхности нейтрального типа у существенно нелинейной системы дифференциальных уравнений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. Вып.
4. *Люстерник Л. А., Соболев И. И.* Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. школа, 1982.
5. *Токарев С. П.* Гладкая сопряженность систем дифференциальных уравнений в окрестности асимптотически устойчивой сложной особой точки // Дифференц. уравнения. Т. 13, № 4. 1977. С. 766–769.
6. *Токарев С. П.* Локальная $\mathbf{C}^1$-эквивалентность систем дифференциальных уравнений в окрестности асимптотически устойчивой сложной особой точки // Дифференц. уравнения. Т. 23, № 10. 1987. С. 1826–1828.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

Статья поступила в редакцию 23 октября 2014 г.

Сведения об авторе

Ильин Юрий Анатольевич — кандидат физико-математических наук, доцент;
iljin_y_a@mail.ru

ON C^1-EQUIVALENCE OF ESSENTIALLY NONLINEAR SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS NEAR THE ASYMPTOTICALLY STABLE EQUILIBRIUM POINT

Yuriy A. Il'in

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; iljin_y_a@mail.ru

We consider the system of differential equation without linear terms at asymptotically stable equilibrium point. Under assumption of negative definiteness of logarithmic norm of Jacobian matrix we prove C^1-equivalence this system to all its perturbations of sufficiently high order of vanishing. Refs 7.

Keywords: smooth equivalence, smooth conjugacy, essentially nonlinear system, logarithmic norm.

References

1. Volkov D. Yu., Il'in Yu. A., "On the existence of an invariant torus for an essentially nonlinear system of differential equations", *Vestn. St. Petersburg Univ., Math.* **25**(4), 7–10 (1992).

2. Il'in, Yu. A., "On the Application of Logarithmic Norms to Nonlinear Systems of Differential Equations", *Nonlinear Dynamic Systems* Issue 2 (Leonov G. A., Ed., St.Petersb. Univ. Press, St.Petersburg, 1999) [in Russian].

3. Il'in Yu. A., "On the existence of a local-integral manifold of neutral type for an essentially nonlinear system of differential equations", *Vestn. St. Petersburg Univ., Math.* **40**(1), 36–45 (2007).

4. Lyusternik L. A., Sobolev I. I., *A Brief Course of Functional Analysis* (Vyssh. Shkola, Moscow, 1982) [in Russian].

5. Tokarev S. P., "Smooth conjugacy of systems of differential equations in a neighborhood of a complex asymptotically stable singilar point", *Differencialnye Uravnenija* **13**(4), 766–769 (1977) [in Russian].

6. Tokarev S. P., "On local $\mathbf{C}^1$-equivalency of systems of differential equations in a neighborhood of asymptotically stable complex singular point", *Differencialnye Uravnenija* **23**(10), 1826–1828 (1987) [in Russian].

7. Hartman P., *Ordinary Differential Equations* (Classics in Applied Mathematics, **38**, SIAM, 2002).