УДК 517.955.8 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 1

УСТОЙЧИВОСТЬ НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ В ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ МИКРОВОЛНОВОГО НАГРЕВА

Ф. Райтманн, С. Н. Скопинов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

В данной работе рассматривается микроволновая задача нагрева однородного материала в одномерном случае. Изучается вопрос устойчивости на конечном промежутке для данной задачи. Приводятся достаточные условия существования устойчивости на конечном промежутке с помощью варьируемых функций. Для одномерной задачи нагрева эти функции, в том числе функционал Ляпунова, приведены явно. Библиогр. 7 назв.

Ключевые слова: устойчивость на конечном промежутке, функционалы Ляпунова, микроволновый нагрев.

1. Введение. В данной работе рассматривается микроволновая задача нагрева однородного материала в одномерном случае, которая может быть выведена из многомерного случая, как это сделано в работе [1]. Понятие устойчивости на конечном промежутке времени для данной задачи вводится на основании определений из работ [2, 3]. Приводится теорема об устойчивости на конечном промежутке времени, которая использует варьируемые функции в общем виде. Эта теорема является развитием теоремы 1 работы [4], но в отличие от неё в данной работе варьируемые функции, в том числе функция Ляпунова, приведены в явном виде.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему, состоящую из параболического и гиперболического уравнений, описывающую в одномерном случае уравнения Максвелла и теплопроводности [1]:

$$w_{tt} - w_{xx} + \sigma(\theta) w_t = 0, \qquad x \in (0,1), t \in (0,T), \tag{1}$$

$$\theta_t - \theta_{xx} = \sigma(\theta) {w_t}^2, \qquad x \in (0,1), t \in (0,T), \tag{2}$$

$$w(0,t) = 0, w(1,t) = 0, \qquad t \in (0,T), \tag{3}$$

$$\theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, \qquad t \in (0,T), \tag{4}$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \qquad x \in (0,1), \tag{5}$$

$$w(x,0) = w_0(x),\ w_t(x,0) = w_1(x), \qquad x \in (0,1), \tag{6}$$

где θ — температура, w — интеграл по времени от ненулевой компоненты электрического поля, σ — электрическая проводимость, которая зависит от температуры, $T > 0$.

Предположим, что следующие условия выполнены:

(A1) скалярная функция σ удовлетворяет локальному условию Липшица на $(0, +\infty)$ и существуют константы σ_0 и σ_1, такие что $0 < \sigma_0 \le \sigma(\theta) \le \sigma_1$ на $(0, +\infty)$;

(A2) $w_0, w_1 \in L^2(0,1), \theta_0 \in L^\infty(0,1), \theta_0 \ge 0$ п.в. на $(0,1)$.

В условиях $(A1)$ и $(A2)$ существует слабое решение системы (1)–(6) в смысле интегральных тождеств для произвольного фиксированного $T > 0$ ([1]). Введём обозначение $v(x,t) := w_t(x,t)$. Тогда задача (1)–(6) имеет слабое решение

$(w(x,t), v(x,t), \theta(x,t))$ в пространстве $Z := (C([0,T]; L^2(0,1)))^2 \times (L^2(0,T; H^1(0,1)) \cap C([0,T]; L^2(0,1)))$ (см. [1]).

Определим нормированное пространство $Y := H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ с нормой

$$\|(w,v,\theta)\|_Y^2 = \|w_x\|^2_{L^2(0,1)} + \|v\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta\|^2_{L^2(0,1)}, \tag{7}$$

где $(w,v,\theta) \in Y$. Рассмотрим функцию $y(t) = y(t,t_0,y_0) = (w(\cdot,t), v(\cdot,t), \theta(\cdot,t))$ как решение задачи (1)–(6) в пространстве Y с нормой (7), где вместо начального момента времени 0 берется произвольное $0 \le t_0 < T$ такое, что $y(t_0,t_0,y_0) = (w_0, w_1, \theta_0)$, где $w(\cdot,t), v(\cdot,t), \theta(\cdot,t) \in Y$ и удовлетворяет системе (1)–(6) в слабом смысле.

3. Устойчивость на конечном промежутке времени. Введём понятие устойчивости на конечном промежутке времени для задачи (1)–(6), аналогичное введённому в работах [2, 4]:

Определение 1. *Система* (1)–(6) *называется* $(\alpha, \beta, t_0, T', \|\cdot\|_Y)$*-устойчивой, где* $0 < \alpha \le \beta$, $t_0 > 0, T' \ge 0, [t_0, t_0 + T') \subset (0,T)$ *— произвольные числа, если для каждого решения* $y(t)$ *этой системы из условия* $\|y(t_0)\|_Y < \alpha$ *следует, что* $\|y(t)\|_Y < \beta$ *для всех* $t \in [t_0, t_0 + T')$.

Замечание 1. Свойство устойчивости на конечном промежутке тесно связано с понятием области достижимости, которое изучается в теории управления [5]. Однако к начально-краевой задаче (1)–(6) общие теоремы, характеризующие области достижимости, непосредственно не применимы.

Сформулируем следующую теорему об устойчивости на конечном промежутке времени для системы (1)–(6):

Теорема 1. *Пусть* $J := [t_0, t_0 + T') \subset (0,T)$ *— временной интервал,* $0 < \alpha \le \beta$ *— положительные числа, и существуют дифференцируемый по Фреше функционал* $\Phi : Y \to \mathbb{R}$ *и интегрируемая функция* $g : J \to \mathbb{R}$ *такие, что следующие условия выполнены:*

$$\frac{d}{dt}\Phi(y(t)) < g(t) \tag{8}$$

для п.в. $t \in J$ *и произвольных функций* $y(\cdot) \in Z$, *таких, что* $\alpha \le \|y(t)\|_Y \le \beta$;

$$\int_s^t g(\tau)d\tau \le \min_{y \in Y: \|y\|_Y = \beta} \Phi(y) - \max_{y \in Y: \|y\|_Y = \alpha} \Phi(y) \tag{9}$$

для любых $s, t \in J, s < t$.

Тогда задача (1)–(6) *будет* $(\alpha, \beta, t_0, T', \|\cdot\|_Y)$*-устойчива.*

Доказательство этой теоремы проводится аналогичным доказательству теоремы 1 в работе [4] образом. Определим ниже конкретный вид функционала Φ и функции g для задачи нагрева, которые удовлетворяют всем условиям теоремы 1. При этом используем следуюший результат, который вытекает из доказательства теоремы 4.1 работы [1], который назовём свойством (S):

(S) для любых $\alpha > 0$ и $T' \in (0,T)$ существует число $0 < \kappa = \kappa(\alpha, T') < \infty$ такое, что для любых решений $(w(x,t), v(x,t), \theta(x,t))$ системы (1)–(6) с начальными данными (w_0, w_1, θ_0) при $t_0 = 0$ из $\|w_0\|^2_{L^2(0,1)} + \|w_1\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta_0\|^2_{L^2(0,1)} \le \alpha^2$ следует, что $\sup_{t \in [0,T']} \|\theta(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,1)} \le \kappa$.

Теорема 2. *Пусть существуют варьируемые параметры $\lambda > 0$, $\epsilon > 0$, $a > 0$ и параметры $0 < \alpha \le \beta$ такие, что выполнены следующие условия:*

$$0 < \lambda < 1, \quad \frac{1}{2}\sigma_1\epsilon - 1 < 0, \quad \lambda^2 < \epsilon < 1,$$
$$\lambda\left(\frac{1}{2\epsilon}\sigma_1 + 1\right) - \sigma_0 + a\sigma_1\kappa < 0, \quad 0 \le \min\left[1-\epsilon, 1-\frac{\lambda^2}{\epsilon}, a\right]\beta^2 - \max[2, 1+\lambda^2, a]\alpha^2, \tag{10}$$

где параметры σ_0 и σ_1 берутся из соотношения (A1), $\kappa = \kappa(\alpha, T')$ — параметр, введённый в условии (S). *Рассмотрим функционал Ляпунова в виде*

$$\Phi(y) = \Phi(w, v, \theta) = \int_0^1 (w_x^2 + 2\lambda wv + v^2 + a\theta^2)dx, \quad y = (w, v, \theta) \in Y, \tag{11}$$

который можно трактовать для определенных параметров $\lambda > 0, a > 0$ как суммарный «интеграл энергии» относительно системы Максвелла и уравнения теплопроводности, и варьируемую функцию

$$g(t) \equiv -C\min[1, a]\alpha, \quad t \in [0, T'), \tag{12}$$

где

$$C := \frac{2\min[a, -\lambda(\frac{1}{2}\sigma_1\epsilon - 1), -(\lambda(\frac{1}{2\epsilon}\sigma_1 + 1) - \sigma_0 + a\sigma_1\kappa)]}{\max[2, 1+\lambda^2, a]}. \tag{13}$$

Тогда функционал Φ и функция $g(t)$ из (11) и (12) удовлетворяют неравенствам (8) и (9) относительно функций из Z с $t_0 = 0$ и $0 < \alpha \le \beta$ из (10). Следовательно, задача (1)–(6) *будет $(\alpha, \beta, 0, T', \|\cdot\|_Y)$-устойчива.*

Доказательство. Рассмотрим функционал Ляпунова (11). Для произвольных функций $(w, v, \theta) \in Y$ имеем с учётом неравенств (10):

$$\Phi(w, v, \theta) = \int_0^1 (w_x^2 + 2\lambda wv + v^2 + a\theta^2)dx \le$$
$$\le \int_0^1 (w_x^2 + w^2 + \lambda^2 v^2 + v^2 + a\theta^2)dx \le \int_0^1 (2w_x^2 + (1+\lambda^2)v^2 + a\theta^2)dx \le$$
$$\le \max[2, 1+\lambda^2, a](\|w_x\|^2_{L^2(0,1)} + \|v\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta\|^2_{L^2(0,1)}). \tag{14}$$

Здесь были использованы неравенство Фридрихса в виде $\|w\|^2_{L^2(0,1)} \le \|w_x\|^2_{L^2(0,1)}$ для функции $w \in H_0^1(0,1)$ и неравенство Коши—Буняковского.

С другой стороны, для таких же функций $(w, v, \theta) \in Y$ имеем

$$\int_0^1 (w_x^2 + 2\lambda wv + v^2 + a\theta^2)dx \ge$$
$$\ge \int_0^1 (w_x^2 - \epsilon w^2 - \frac{\lambda^2}{\epsilon}v^2 + v^2 + a\theta^2)dx \ge \int_0^1 ((1-\epsilon)w_x^2 + (1-\frac{\lambda^2}{\epsilon})v^2 + a\theta^2)dx \ge$$
$$\ge \min[1-\epsilon, 1-\frac{\lambda^2}{\epsilon}, a](\|w_x\|^2_{L^2(0,1)} + \|v\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta\|^2_{L^2(0,1)}). \tag{15}$$

Теперь рассмотрим функционал Ляпунова на пространстве функций $(w, v, \theta) \in Z$ и для п.в. $t \in (0, T')$ продифференцируем по t этот функционал:

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 (w_x^2 + 2\lambda wv + v^2 + a\theta^2)dx = 2\int_0^1 (-w_{xx}v + \lambda v^2 + (\lambda w + v)v_t + a\theta\theta_t)dx. \quad (16)$$

Здесь было использовано соотношение $\int_0^1 w_x w_{xt} dx = \int_0^1 -w_{xx}w_t dx = \int_0^1 -w_{xx}v dx$, которое выполнено для функции $w(x,t)$ с однородными нулевыми граничными условиями.

Выразим v_t и θ_t из (1) и (2), подставим в (16) и оценим интеграл для п.в. $t \in (0, T')$:

$$\frac{d}{dt}\Phi(y(t)) = 2\int_0^1 (-w_{xx}v + \lambda v^2 + (\lambda w + v)(w_{xx} - \sigma(\theta)v) + a\theta(\theta_{xx} + \sigma(\theta)v^2))dx =$$
$$= 2\int_0^1 (-\lambda w_x^2 - \lambda\sigma(\theta)wv + (\lambda - \sigma(\theta) + a\sigma(\theta)\theta)v^2 - a\theta_x^2))dx \leq$$
$$\leq 2\int_0^1 (-\lambda(\frac{1}{2}\sigma(\theta)\epsilon - 1)w_x^2 + (\frac{1}{2\epsilon}\lambda\sigma(\theta) + \lambda - \sigma(\theta) + a\sigma(\theta)\theta)v^2 - a\theta^2))dx. \quad (17)$$

С учётом предположения (A2), свойства (S) и соотношений (10) легко получить оценку

$$\frac{d}{dt}\Phi(y(t)) \leq -C_1(\|w_x\|^2_{L^2(0,1)} + \|v\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta\|^2_{L^2(0,1)}) \quad (18)$$

для п.в. $t \in (0, T')$, где $C_1 = 2\min[a, -\lambda(\frac{1}{2}\sigma_1\epsilon - 1), -(\lambda(\frac{1}{2\epsilon}\sigma_1 + 1) - \sigma_0 + a\sigma_1\kappa)]$.

Отсюда можно показать, принимая во внимание (14), что $\frac{d}{dt}\Phi(y(t)) \leq -C\Phi(y(t))$ для п.в. $t \in (0, T')$, где параметр C определён в (13).

Тогда, с учётом неравенства (15), введём на $[0, T')$ функцию

$$g(t) := -C\min[1, a]\inf(\|w_x(\cdot, t)\|^2_{L^2(0,1)} + \|v(\cdot, t)\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta(\cdot, t)\|^2_{L^2(0,1)}), \quad (19)$$

где inf берётся по всем $(w(\cdot,\cdot), v(\cdot,\cdot), \theta(\cdot,\cdot)) \in Z$ таким, что $\alpha \leq \|w(\cdot,t), v(\cdot,t), \theta(\cdot,t)\|_Y \leq \beta$, чтобы выполнялось условие (8).

Ясно, что $g(t) = -C\min[1, a]\alpha$ будет искомой функцией на $[0, T')$.

Оценим слагаемые в правой части неравенства (9), учитывая выражения (14) и (15): $\min\limits_{y\in Y:\|y\|_Y=\beta}\Phi(y) \geq \min[1-\epsilon, 1-\frac{\lambda^2}{\epsilon}, a]\beta^2$, $\max\limits_{y\in Y:\|y\|_Y=\alpha}\Phi(y) \leq \max[2, 1+\lambda^2, a]\alpha^2$.

Отсюда следует, что для выполнения соотношения (9) достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$-C\min[1, a]\alpha T' \leq \min\left[1-\epsilon, 1-\frac{\lambda^2}{\epsilon}, a\right]\beta^2 - \max[2, 1+\lambda^2, a]\alpha^2, \quad (20)$$

$$0 \leq \min\left[1-\epsilon, 1-\frac{\lambda^2}{\epsilon}, a\right]\beta^2 - \max[2, 1+\lambda^2, a]\alpha^2. \quad (21)$$

Из условий (10) следует, что неравенства (20), (21) верны.

Полученные в статье результаты могут быть легко распространены на случай общих граничных условий типа Дирихле для w. Соответствующие теоремы существования решения имеются, например, в работе [6], и получение аналогичных выводов об устойчивости на конечном промежутке не представляет труда. Случай других граничных условий для температуры, например граничных условий типа Неймана, требует дополнительного анализа. Соответствующие теоремы существования решения в разных функциональных пространствах имеются в работе [7].

Литература

1. *Manoranjan R. V., Yin H.-M., Showalter R.* On two-phase Stefan problem arising from a microwave heating process // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2006. Series A. Vol. 15, N 4. P. 1155–1168.

2. *Weiss L., Infante E. F.* On the stability of systems defined over a finite time interval // Proc. Nat. Acad. Sci. 1980. Vol. 54, N 4. P. 44–48.

3. *Kalinichenko D. Yu., Reitmann V., Skopinov S. N.* Asymptotic behavior of solutions to a coupled system of Maxwell's equations and a controlled differential inclusion // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Supplement. 2013. P. 407–414.

4. *Kalinichenko D. Yu., Reitmann V., Skopinov S. N.* Stability and bifurcations on a finite time interval in variational inequalities // Differential Equations. 2012. Vol. 48, N 13. P. 1–12.

5. *Berkovitz L. D.* Optimal Control Theory. New York: Springer-Verlag. Applied Mathematical Sciences, 1974. Vol. 12.

6. *Morgan J., Yin H.-M.* On Maxwell's system with a thermal effect // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. 2001. Vol. 1. P. 485–494.

7. *Yin H.-M.* On a free boundary problem with superheating arising in microwave heating processes // Advances in Mathematical Sciences and Applications. 2002. Vol. 12, N 1. P. 409–433.

Статья поступила в редакцию 23 октября 2014 г.

Сведения об авторах

Фолькер Райтманн — доктор физико-математических наук, профессор; vreitmann@aol.com

Скопинов Сергей Николаевич — аспирант; serg_vologda@mail.ru

ON A FINITE TIME INTERVAL STABILITY FOR THE ONE-DIMENSIONAL MICROWAVE HEATING PROBLEM

Volker Reitmann, Sergey N. Skopinov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; vreitmann@aol.com, serg_vologda@mail.ru

In this paper the microwave heating problem with homogeneous material in one-space dimension is considered. Stability on a finite time interval for this problem is investigated. Sufficient conditions for such a stability using auxiliary functions are derived. For the one-dimensional microwave heating problem these functions including a Lyapunov functional, are given in explicit form. Refs 7.

Keywords: finite time stability, Lyapunov functionals, microwave heating.

References

1. Manoranjan R. V., Yin H.-M., Showalter R., "On two-phase Stefan problem arising from a microwave heating process", *Discrete and Continuous Dynamical Systems* Series A. **15**(4), 1155–1168 (2006).

2. Weiss L., Infante E. F., "On the stability of systems defined over a finite time interval", *Proc. Nat. Acad. Sci.* **54**(4), 44–48 (1980).

3. Kalinichenko D. Yu., Reitmann V., Skopinov S. N., "Asymptotic behavior of solutions to a coupled system of Maxwell's equations and a controlled differential inclusion", *Discrete and Continuous Dynamical Systems* Supplement, 407–414 (2013).

4. Kalinichenko D. Yu., Reitmann V., Skopinov S. N., "Stability and bifurcations on a finite time interval in variational inequalities", *Differential Equations* **48**(13), 1–12 (2012).

5. Berkovitz L. D., "Optimal Control Theory", *Applied Mathematical Sciences* **12** (Springer-Verlag, New York, 1974).

6. Morgan J., Yin H.-M., "On Maxwell's system with a thermal effect", *Discrete and Continuous Dynamical Systems* Series B. **1**, 485–494 (2001).

7. Yin H.-M., "On a free boundary problem with superheating arising in microwave heating processes", *Advances in Mathematical Sciences and Applications* **12**(1), 409–433 (2002).