УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 1

О ВЕРОЯТНОСТЯХ УМЕРЕННЫХ УКЛОНЕНИЙ КОМБИНАТОРНЫХ СУММ

А. Н. Фролов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Получены новые результаты об асимптотическом поведении вероятностей умеренных уклонений комбинаторных сумм. При доказательстве использованы полученные ранее автором аналоги неравенства Эссеена для комбинаторных сумм, дающие оценку скорости сходимости в комбинаторной ЦПТ. Полученные результаты близки к оптимальным. Рассмотрены случаи конечных и бесконечных дисперсий слагаемых. Библиогр. 34 назв.

Ключевые слова: комбинаторная центральная предельная теорема, комбинаторная сумма, вероятности умереннных уклонений, неравенство Эссеена.

1. Введение. Пусть $\{\|X_{nij}\|, 1 \leqslant i,j \leqslant n, n = 2,3,\ldots\}$ — последовательность матриц независимых случайных величин. Пусть $\{\vec{\pi}_n = (\pi_n(1), \pi_n(2), \ldots, \pi_n(n)),\ n = 2,3,\ldots\}$ — последовательность случайных перестановок чисел $1,2,\ldots,n$. Предположим, что $\vec{\pi}_n$ имеет равномерное распределение на множестве перестановок и не зависит от $\|X_{nij}\|$ для любого n. Сумма

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{ni\pi_n(i)}$$

называется комбинаторной суммой. Результат о слабой сходимости распределений комбинаторных сумм к нормальному закону называется комбинаторной центральной предельной теоремой (ЦПТ).

Комбинаторной ЦПТ посвящены работы Вальда и Вольфовица [1], Нётера [2], Хёффдинга [3], Мото [4], Колчина и Чистякова [5]. Позднее были получены неасимптотические результаты типа неравенств Берри—Эссеена и Эссеена об оценке близости распределений комбинаторных сумм и стандартного нормального распределения. Результаты в этом направлении получены Больтхаузеном [6], фон Баром [7], Хо и Ченом [8], Голдстейном [9], Неммани и Санторнчостом [10], Неммани и Ратанавонгом [11], Ченом, Годстейном и Шао [12], Ченом и Фангом [13], Фроловым [14, 15].

Отметим, что в отличие от сумм независимых случайных величин комбинаторные суммы не имеют независимых приращений. Поэтому неприменим классический метод доказательства неравенств Берри—Эссеена и Эссеена, основанный на оценке близости характеристической функции нормированной суммы и характеристической функции стандартного нормального закона. Для доказательства используется метод Стейна. Это приводит к неравенствам типа неравенств Берри—Эссеена и Эссеена для случайных величин с третьим моментом. Использование техники усечения позволило автору [14, 15] получить обобщение этих результатов на случай слагаемых с моментами порядка $2+\delta$, а также в случае бесконечных дисперсий.

Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин играют важную роль в теории вероятностей. Одна из задач здесь состоит в том, чтобы найти зону нормальной сходимости, т. е. область в которой хвосты распределений центрированных и нормированных сумм независимых случайных величин имеют такую же асимптотику, как хвост нормального закона. Ширина этой зоны существенно зависит от моментных ограничений. Если у слагаемых существуют экспоненциальные моменты, то зоны нормальной сходимости будут степенными. Если предполагать существование моментов порядка p, то зоны нормальной сходимости — логарифмические. Поэтому в последнем случае уклонения называют умеренными.

Различные результаты об асимптотическом поведении вероятностей умеренных уклонений получены Линником [16], Ибрагимовым и Линником [17], Нагаевым [18], Рубиным и Сетураманом [19], Нагаевым [20], Амосовой [21, 24, 25], Михелем [22], Сластниковым [23, 28], Розовским [26, 32], Рыхликом [27], Фроловым [29, 31, 33], Петровым [30].

В настоящей работе мы получим новые результаты об асимптотическом поведении умеренных уклонений комбинаторных сумм. По указанным выше причинам мы не можем применить технику анализа вероятностей умеренных уклонений сумм независимых случайных к вероятностям умеренных уклонений комбинаторных сумм. Поэтому мы будем выводить асимптотику последних, используя полученные автором [14, 15] аналоги неравенства Эссеена для комбинаторных сумм. Отметим, что идея использовать оценки в ЦПТ для получения оценок вероятностей умеренных уклонений была ранее использована В. В. Петровым (см. стр. 262 монографии [34] и [30]). Мы рассмотрим случай конечных и бесконечных дисперсий. Мы также покажем, что наши результаты близки к оптимальным.

2. Результаты. Пусть $\{\|X_{nij}\|, 1 \leqslant i,j \leqslant n, n = 2,3,\ldots\}$ — последовательность матриц независимых случайных величин, $EX_{nij} = c_{nij}$ и $DX_{nij} = \sigma^2_{nij}$ для всех i, j и n. Предположим, что

$$\sum_{i=1}^{n} c_{nij} = \sum_{j=1}^{n} c_{nij} = 0 \tag{1}$$

для любого n.

Пусть $\{\vec{\pi}_n = (\pi_n(1), \pi_n(2), \ldots, \pi_n(n)),\ n = 2,3,\ldots\}$ — последовательность случайных перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$. Предположим, что $\vec{\pi}_n$ имеет равномерное распределение на множестве перестановок и не зависит от $\|X_{nij}\|$ для любого n.

Положим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{ni\pi_n(i)}.$$

Несложно показать, что

$$ES_n = 0, \quad B_n = DS_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i,j=1}^{n} c^2_{nij} + \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \sigma^2_{nij}.$$

Таким образом, условие (1) обеспечивает центрированность комбинаторных сумм.

Пусть $g^+_{nij}(x)$ и $g^-_{nij}(x)$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, $n \geqslant 2$, — неотрицательные неубывающие функции, определенные при всех $x \geqslant 0$, такие, что $x/g^+_{nij}(x)$ и $x/g^-_{nij}(x)$ не убывают при $x > 0$. Предположим, что

$$g^-_{nij} = E(X^-_{nij})^2 g^-_{nij}(X^-_{nij}) < \infty, \quad g^+_{nij} = E(X^+_{nij})^2 g^+_{nij}(X^+_{nij}) < \infty$$

для всех $1 \leqslant i,j \leqslant n$ и всех $n \geqslant 2$. Здесь $X^-_{nij} = -X_{nij} I\{X_{nij} < 0\}$, $X^+_{nij} = X_{nij} I\{X_{nij} > 0\}$, $I\{\cdot\}$ обозначает индикатор события в скобках.

Положим
$$L_n = \frac{1}{B_n n} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{g_{nij}^-}{g_{nij}^-(\sqrt{B_n})} + \frac{g_{nij}^+}{g_{nij}^+(\sqrt{B_n})} \right)$$
для всех $n \geqslant 2$. Наш первый результат — следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что $L_n \to 0$ при $n \to \infty$. Положим*
$$x_n = \sqrt{2\ln(1/L_n) - \ln\ln(1/L_n) - \varrho_n},$$
где ϱ_n — последовательность чисел такая, что $\varrho_n \to +\infty$ и $\varrho_n = o\left(\ln\ln(1/L_n)\right)$ при $n \to \infty$. Тогда равномерно по x из области $|x| \leqslant x_n$ выполняется соотношение
$$P(S_n \geqslant x\sqrt{B_n}) = (1 - \Phi(x))(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$
где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

Доказательство. Обозначим
$$\Delta_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big| P(S_n < x\sqrt{B_n}) - \Phi(x) \Big| .$$

По теореме 4 из работы автора [14] для всех $n \geqslant 2$ выполняется неравенство
$$\Delta_n \leqslant A \left(\frac{1}{B_n n} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{nij} + \frac{1}{B_n^{3/2} n} \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{nij} \right),$$
где A — абсолютная положительная постоянная, $\alpha_{nij} = EX_{nij}^2 I\{|X_{nij}| \geqslant \sqrt{B_n}\}$ и $\beta_{nij} = E\,|X_{nij}|^3\, I\{|X_{nij}| < \sqrt{B_n}\}$ при $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и всех n.

Принимая во внимание равенство
$$\alpha_{nij} = EX_{nij}^2 I\{X_{nij} \leqslant -\sqrt{B_n}\} + EX_{nij}^2 I\{X_{nij} \geqslant \sqrt{B_n}\},$$
мы имеем
$$\alpha_{nij} \leqslant \frac{g_{nij}^-}{g_{nij}^-(\sqrt{B_n})} + \frac{g_{nij}^+}{g_{nij}^+(\sqrt{B_n})}$$
для всех i и j и всех n. Здесь мы воспользовались тем, что функции $g_{nij}^+(x)$ и $g_{nij}^-(x)$ не убывают для всех i и j и всех n. Аналогично, из
$$\beta_{nij} = E|X_{nij}|^3 I\{0 \geqslant X_{nij} > -\sqrt{B_n}\} + EX_{nij}^3 I\{0 \leqslant X_{nij} < \sqrt{B_n}\}$$
следует, что
$$\beta_{nij} \leqslant \frac{\sqrt{B_n} g_{nij}^-}{g_{nij}^-(\sqrt{B_n})} + \frac{\sqrt{B_n} g_{nij}^+}{g_{nij}^+(\sqrt{B_n})}$$
для всех i и j и всех n. При этом мы воспользовались тем, что $x/g_{nij}^+(x)$ и $x/g_{nij}^-(x)$ не убывают для всех i и j и всех n.

Следовательно, для всех n выполняется неравенство
$$\Delta_n \leqslant AL_n.$$

Поэтому

$$\theta_n = \sup_{|x|\leqslant x_n} \left| \frac{P(S_n \geqslant x\sqrt{B_n})}{1-\Phi(x)} - 1 \right| \leqslant \frac{\Delta_n}{1-\Phi(x_n)} \leqslant \frac{AL_n}{1-\Phi(x_n)}$$

для всех n. Принимая во внимание известное соотношение

$$1-\Phi(x_n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}x_n}\, e^{-x_n^2/2}$$

при $n \to \infty$, мы заключаем, что

$$\theta_n \leqslant \frac{2A}{\sqrt{2\pi}}\, L_n x_n e^{x_n^2/2}$$

для всех достаточно больших n. Учитывая определение x_n, мы имеем

$$\ln x_n = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\{\ln(1/L_n)(1+o(1))\} = \frac{1}{2}\ln\ln(1/L_n) + O(1)$$

при $n \to \infty$. Поэтому

$$L_n x_n e^{x^2/2} = \exp\left\{-\ln(1/L_n) + \ln x_n + \frac{x_n^2}{2}\right\} = \exp\left\{-\frac{\varrho_n}{2} + O(1)\right\} \to 0$$

при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $\theta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема полностью доказана. □

Отметим, что последовательность ϱ_n в теореме 1 можно взять возрастающей сколь угодно медленно. Из теоремы 1 вытекает следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $g(x)$ — неотрицательная неубывающая функция, определенная для всех $x \geqslant 0$, такая, что $x/g(x)$ не убывает при $x > 0$.*

Пусть $g_{nij} = EX_{nij}^2 g(|X_{nij}|) < \infty$ для всех $1 \leqslant i,j \leqslant n$ и всех $n \geqslant 2$. Положим

$$\mathcal{L}_n = \frac{1}{B_n g(\sqrt{B_n})n} \sum_{i,j=1}^{n} g_{nij}.$$

Предположим, что $\mathcal{L}_n \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим

$$x_n = \sqrt{2\ln(1/\mathcal{L}_n) - \ln\ln(1/\mathcal{L}_n) - \varrho_n},$$

где ϱ_n — последовательность чисел такая, что $\varrho_n \to +\infty$ и $\varrho_n = o\left(\ln\ln(1/\mathcal{L}_n)\right)$ при $n \to \infty$. Тогда равномерно по x из области $|x| \leqslant x_n$ выполняется соотношение

$$P(S_n \geqslant x\sqrt{B_n}) = (1-\Phi(x))(1+o(1)) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В важном частном случае $g(x) = x^\delta$, $\delta \in (0,1]$, теорема 2 влечет следующий результат, в котором зона нормальной сходимости выражена в терминах аналогов дробей Ляпунова.

Теорема 3. *Пусть $E|X_{nij}|^{2+\delta} < \infty$ для всех $1 \leqslant i,j \leqslant n$ и всех $n \geqslant 2$, где $\delta \in (0,1]$. Положим*

$$\mathcal{L}_n^\delta = \frac{1}{B_n^{1+\delta/2} n} \sum_{i,j=1}^{n} E|X_{nij}|^{2+\delta}.$$

Предположим, что $\mathcal{L}_n^\delta \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим

$$x_n = \sqrt{2\ln(1/\mathcal{L}_n^\delta) - \ln\ln(1/\mathcal{L}_n^\delta) - \varrho_n},$$

где ϱ_n — последовательность чисел такая, что $\varrho_n \to +\infty$ и $\varrho_n = o\big(\ln\ln(1/\mathcal{L}_n^\delta)\big)$ при $n \to \infty$. Тогда равномерно по x из области $|x| \leqslant x_n$ выполняется соотношение

$$P(S_n \geqslant x\sqrt{B_n}) = (1 - \Phi(x))(1 + o(1)) \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Покажем, что ширина зоны нормальной сходимости в теореме 3 близка к оптимальной.

Предположим, что $c_{nij} = 0$ и X_{nij} одинаково распределены для всех i, j и n. Тогда $\mathcal{L}_n^\delta = \mathrm{const} \cdot n^{-\delta/2}$ и $x_n = \sqrt{\delta \ln n - \ln\ln n - \varrho_n}$. Заметим, что в этом случае вероятности умеренных уклонений комбинаторных сумм совпадают с вероятностями умеренных уклонений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Для последних вероятностей по теореме 2.3 из работы автора [31] граница зоны нормальной сходимости равна $\sqrt{\delta \ln n + (1+\delta)\ln\ln n - \mathrm{const}}$. Таким образом, наша граница достаточно близка к оптимальной.

Пусть $\{F_n(x)\}$ — последовательность функций распределения. Если предположить, что для каждых фиксированных i и n случайные величины $X_{ni1}, X_{ni2}, \ldots, X_{nin}$ имеют одинаковую функцию распределения $F_i(x)$, то вероятности умеренных уклонений комбинаторных сумм совпадут с вероятностями умеренных уклонений сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин. По теореме 1.3 из [31] граница зоны нормальной сходимости для последних также отличается множителем $-(1+\delta)$ при $\ln\ln(1/\mathcal{L}_n^\delta)$. Поэтому и здесь граница x_n теоремы 3 близка к оптимальной.

Перейдем к случаю бесконечной дисперсии. Все остальные предположения мы сохраняем.

Пусть $\{b_n\}$ — последовательность положительных постоянных. Положим $\bar{X}_{nij} = X_{nij} I\{|X_{nij}| < b_n\}$,

$$\bar{S}_n = \sum_{i=1}^n \bar{X}_{ni\pi(i)}, \quad \bar{e}_n = E\bar{S}_n, \quad \bar{B}_n = D\bar{S}_n.$$

По теореме 3 из работы автора [15] существует абсолютная положительная постоянная A такая, что для всех $n \geqslant 2$ выполняется неравенство

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |P(S_n < xb_n) - \Phi(x)| \leqslant A\bar{L}_n,$$

где

$$\bar{L}_n = \frac{1}{n\bar{B}_n^{3/2}} \sum_{i,j=1}^n E|\bar{X}_{nij}|^3 + \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n P(|X_{nij}| \geqslant b_n) + \Theta_n + \Upsilon_n,$$

$$\Theta_n = \frac{|\bar{e}_n|}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\bar{B}_n}}, \quad \Upsilon_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \max\left(\frac{\sqrt{\bar{B}_n}}{b_n} - 1, \frac{b_n}{\sqrt{\bar{B}_n}} - 1\right).$$

Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 1, мы получим следующий результат.

Теорема 4. *Если $\bar{L}_n \to 0$ при $n \to \infty$, то соотношение*

$$P(S_n \geqslant x b_n) = (1 - \Phi(x))(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

выполнено равномерно по x из области $|x| \leqslant x_n$, $x_n = \sqrt{2\ln(1/\bar{L}_n) - \ln\ln(1/\bar{L}_n) - \varrho_n}$, ϱ_n — последовательность чисел такая, что $\varrho_n \to +\infty$ и $\varrho_n = o\big(\ln\ln(1/\bar{L}_n)\big)$ при $n \to \infty$.

Отметим, что нормирующую последовательность b_n в теореме 4 следует искать, используя соотношение $\sqrt{\bar{B}_n}/b_n \to 1$ при $n \to \infty$. Это аналогично тому, как находят нормирующую последовательность в ЦПТ для независимых одинаково распределенных случайных величин из областей ненормального притяжения нормального закона. Можно также показать, что теоремы 1–3 вытекают из теоремы 4.

Литература

1. *Wald A., Wolfowitz J.* Statistical tests based on permutations of observations // Ann. Math. Statist. 1944. Vol. 15. P. 358–372.

2. *Noether G. E.* On a theorem by Wald and Wolfowitz // Ann. Math. Statist. 1949. Vol. 20. P. 455–458.

3. *Hoeffding W.* 1951. A combinatorial central limit theorem // Ann. Math. Statist. Vol. 22. P. 558–566.

4. *Motoo M.* On Hoeffding's combinatorial central limit theorem // Ann. Inst. Statist. Math. 1957. Vol. 8. P. 145–154.

5. *Колчин В. Ф., Чистяков В. П.* Об одной комбинаторной предельной теореме // Теория вероятн. и ее примен. 1973. Т. 18. С. 767–777.

6. *Bolthausen E.* An estimate of the remainder in a combinatorial central limit theorem // Z. Wahrsch. verw. Geb. 1984. Vol. 66. P. 379–386.

7. *von Bahr B.* Remainder term estimate in a combinatorial central limit theorem // Z. Wahrsch. verw. Geb. 1976. Vol. 35. P. 131-139.

8. *Ho S. T., Chen L. H. Y.* An L_p bounds for the remainder in a combinatorial central limit theorem // Ann. Probab. 1978. Vol. 6. P. 231–249.

9. *Goldstein L.* Berry-Esseen bounds for combinatorial central limit theorems and pattern occurrences, using zero and size biasing // J. Appl. Probab. 2005. Vol. 42. P. 661–683.

10. *Neammanee K., Suntornchost J.* A uniform bound on a combinatorial central limit theorem // Stoch. Anal. Appl. 2005. Vol. 3. P. 559–578.

11. *Neammanee K., Rattanawong P.* A constant on a uniform bound of a combinatorial central limit theorem // J. Math. Research. 2009. Vol. 1. P. 91–103.

12. *Chen L. H. Y., Goldstein L., Shao Q. M.* Normal approximation by Stein's method. Springer. 2011.

13. *Chen L. H. Y., Fang X.* 2012. On the error bound in a combinatorial central limit theorem // arXiv: 1111.3159.

14. *Frolov A. N.* Esseen type bounds of the remainder in a combinatorial CLT // J. Statist. Planning and Inference. 2014. Vol. 149. P. 90–97.

15. *Frolov A. N.* 2014. Bounds of the remainder in a combinatorial central limit theorem // arXiv: 1405.1670.

16. *Линник Ю. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, I, II, III // Теория вероятн. и ее примен., 1961. Т. 6, № 2. С. 145–163; 1961. Т. 6, № 4. С. 377–391; 1962. Т. 7, № 2. С. 121–134.

17. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные случайные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.

18. *Нагаев С. В.* Некоторые предельные теоремы для больших уклонений // Теория вероятн. и ее примен. 1965. Т. 10, № 2. С. 231–254.

19. *Rubin H., Sethuraman J.* Probabilities of moderate deviations // Sankhya, Ser. A. 1965. Vol. 27, N 2–4. P. 325–346.

20. *Нагаев А. В.* Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, при нарушении условия Крамера // Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук. 1969. № 6. С. 17–22.

21. *Амосова Н. Н.* О предельных теоремах для вероятностей умеренных уклонений // Вестн. ЛГУ. 1972. № 13. С. 5–14.

22. *Michel R.* Nonuniform central limit bounds with applications to probabilities of deviations // Ann. Probab. 1976. Vol. 4, N 1. P. 102–106.

23. *Сластников А. Д.* Предельные теоремы для вероятностей умеренных уклонений // Теория вероятн. и ее примен. 1978. Т. 23, № 2. С. 340–357.

24. *Амосова Н. Н.* О вероятностях умеренных уклонений сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1979. Т. 24, № 4. С. 858–865.

25. *Амосова Н. Н.* Об узких зонах интегральной нормальной сходимости // Зап. Научн. Семин. ЛОМИ. 1980. Т. 97. С. 4–14.

26. *Розовский Л. В.* О предельных теоремах для больших уклонений в узких зонах // Теория вероятн. и ее примен. 1981. Т. 26, № 4. С. 847–857.

27. *Rychlik Z.* Nonuniform central limit bounds with applications to probabilities of deviations // Теория вероятн. и ее примен. 1983. Т. 28, № 4. С. 646–652.

28. *Сластников А. Д.* Узкие зоны нормальной сходимости для сумм неодинаково распределенных случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1984. Т. 29, № 3. С. 551–554.

29. *Frolov A. N.* On one-sided strong laws for large increments of sums // Statist. and Probab. Letters. 1998. Vol. 37. P. 155–165.

30. *Петров В. В.* О вероятностях умеренных уклонений // Записки научн. семин. ПОМИ. 1999. Т. 260. С. 214–217.

31. *Фролов А. Н.* О вероятностях умеренных уклонений сумм независимых случайных величин // Записки научн. семин. ПОМИ. 2002. Т. 294. С. 200–215.

32. *Розовский Л. В.* Суммы независимых слычайных величин с конечными дисперсиями — умеренные уклонения и оценки в ЦПТ // Записки научн. семин. ПОМИ. 2004. Т. 311. С. 242–259.

33. *Фролов А. Н.* Об асимптотическом поведении вероятностей умеренных уклонений // Труды СПб. мат. общества. 2008. Т. 14. С. 197–211.

34. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.

Статья поступила в редакцию 23 октября 2014 г.

Сведения об авторе

Фролов Андрей Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор; Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

ON PROBABILITIES OF MODERATE DEVIATIONS FOR COMBINATORIAL SUMS

Andrei N. Frolov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

We investigate the asymptotic behaviour of probabilities of moderate deviations for combinatorial sums. We find a zone in which tails of distributions of combinatorial sums have the same asymptotic behavior as that of the standard normal law. The combinatorial sums have dependent increments. It yields that the classical method of characteristic functions can not be applied. We use Esseen type bounds for combinatorial sums that have been obtained in author papers recently. We show that the zone of the normal convergence is close to the best one which is for the case of centered independent random variables. We consider the case of finite variations of summands. The case of infinite variations is discussed as well. Refs 34.

Keywords: combinatorial central limit theorem, combinatorial sum, probabilities of moderate deviations, Esseen inequality.

References

1. Wald A., Wolfowitz J., “Statistical tests based on permutations of observations”, *Ann. Math. Statist.* **15**, 358–372 (1944).

2. Noether G. E., “On a theorem by Wald and Wolfowitz”, *Ann. Math. Statist.* **20**, 455–458 (1949).

3. Hoeffding W., “A combinatorial central limit theorem”, *Ann. Math. Statist.* **22**, 558–566 (1951).

4. Motoo M., “On Hoeffding’s combinatorial central limit theorem”, *Ann. Inst. Statist. Math.* **8**, 145–154 (1957).

5. Kolchin V. F., Chistyakov V. P., “On a combinatorial limit theorem”, *Teoriya veroyatn. i ee primen.* **18**, 767–777 (1973) [in Russian].

6. Bolthausen E., “An estimate of the remainder in a combinatorial central limit theorem”, *Z. Wahrsch. verw. Geb.* **66**, 379–386 (1984).

7. von Bahr B., “Remainder term estimate in a combinatorial central limit theorem”, *Z. Wahrsch. verw. Geb.* **35**, 131–139 (1976).

8. Ho S. T., Chen L. H. Y., “An L_p bounds for the remainder in a combinatorial central limit theorem”, *Ann. Probab.* **6**, 231–249 (1978).

9. Goldstein L., “Berry-Esseen bounds for combinatorial central limit theorems and pattern occurrences, using zero and size biasing”, *J. Appl. Probab.* **42**, 661–683 (2005).

10. Neammanee K., Suntornchost J., “A uniform bound on a combinatorial central limit theorem”, *Stoch. Anal. Appl.* **3**, 559–578 (2005).

11. Neammanee K., Rattanawong P., “A constant on a uniform bound of a combinatorial central limit theorem”, *J. Math. Research* **1**, 91–103 (2009).

12. Chen L. H. Y., Goldstein L., Shao Q. M., *Normal approximation by Stein’s method* (Springer, 2011).

13. Chen L. H. Y., Fang X., “On the error bound in a combinatorial central limit theorem”, arXiv: 1111.3159 (2012).

14. Frolov A. N., “Esseen type bounds of the remainder in a combinatorial CLT”, *J. Statist. Planning and Inference* **149**, 90–97 (2014).

15. Frolov A. N., “Bounds of the remainder in a combinatorial central limit theorem”, arXiv: 1405.1670 (2014).

16. Linnik Yu. V. “Limit theorems for sums of independent random variables, I, II, III”, *Teoriya veroyatn. i ee primen.* **6**(2), 145–163 (1961); **6**(4), 377–391 (1961); **7**(2), 121–134 (1962) [in Russian].

17. Ibragimov I. A., Linnik Yu. V. *Independent and stationary dependent random variables* (Nauka, Moscow, 1965) [in Russian].

18. Nagaev S. V., “Some limit theorems for large deviations”, *Teoriya veroyatn. i ee primen.* **10**(2), 231–254 (1965) [in Russian].

19. Rubin H., Sethuraman J., “Probabilities of moderate deviations”, *Sankhya, Ser. A* **27**(2–4), 325–346 (1965).

20. Nagaev A. V., “Limit theorems for large deviations under violation of the Cramér condition”, *Izvestiya AN UzSSP, seriya fiz.-mat. nauk* **6**, 17–22 (1969). [in Russian]

21. Amosova N. N., “On limit theorems for moderate deviations”, *Vestnik LGU* 13, 5–14 (1972) [in Russian].

22. Michel R., “Nonuniform central limit bounds with applications to probabilities of deviations”, *Ann. Probab.* **4**(1), 102–106 (1976).

23. Slastnikov A. D., “Limit theorems for probabilities of moderate deviations”, *Teoriya veroyatn. i ee primen.* **23**(2), 340–357 (1978) [in Russian].

24. Amosova N. N., “On probabilities of moderate deviations of sums of independent random variables”, *Teoriya veroyatn. i ee primen.* **24**(4), 858–865 (1979) [in Russian].

25. Amosova N. N., “On narrow zones of integral normal convergence”, *Zapiski nauchnyh seminarov LOMI* **97**, 4–14 (1980) [in Russian].

26. Rozovskii L. V., “On limit theorems for large deviations in narrow zones”, *Teoriya veroyatn. i ee primen.* **26**(4), 847–857 (1981) [in Russian].

27. Rychlik Z., “Nonuniform central limit bounds with applications to probabilities of deviations”, *Teoriya veroyatn. i ee primen.* **28**(4), 646–652 (1983).

28. Slastnikov A. D., “Narrow zones of normal convergence for sums of non-identically distributed random variables”, *Teoriya veroyatn. i ee primen.* **29**(3), 551–554 (1984) [in Russian].

29. Frolov A. N., “On one-sided strong laws for large increments of sums”, *Statist. and Probab. Letters* **37**, 155–165 (1998).

30. Petrov V. V., “On probabilities of moderate deviations”, *Zapiski nauchnyh seminarov POMI* **260**, 214–217 (1999) [in Russian].

31. Frolov A. N., “On probabilities of moderate deviations for sums of independent random variables”, *Zapiski nauchnyh seminarov POMI* **294**, 200–215 (2002) [in Russian].

32. Rozovskii L. V., “Sums of independent random variables with finite variations — moderate deviations and bounds in CLT”, *Zapiski nauchnyh seminarov POMI* **311**, 242–259 (2004) [in Russian].

33. Frolov A. N., “On asymptotic behavior of probabilities of moderate deviations”, *Trudy SPb. mat. obschestva* **14**, 197–211 (2008) [in Russian].

34. Petrov V. V. *Limit theorems for tums of independent random variables* (Nauka, Moscow, 1987) [in Russian].