

МЕХАНИКА

УДК 539.3

РЕОЛОГИЯ УПРУГОВЯЗКОЙ СТАРЕЮЩЕЙ СРЕДЫ*

Р. А. Арутюнян

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Сформулированы уравнения упруговязкой стареющей среды в шкале эффективного времени (модифицированное уравнение Максвелла). Рассмотрена задача о сжатии несжимаемого вязкого слоя между двумя жесткими пластинами. Показано, что в тонких прослойках вблизи плоскостей контакта возникает напряженное состояние, близкое к состоянию всестороннего гидростатического сжатия, что способствует появлению локальных разрывов (повреждений). В качестве стареющего упруговязкого полимерного материала в работе рассматривается полиуретан. Экспериментальная программа исследований включает опыты на ползучесть и статические опыты на глубокое сжатие цилиндрических и прямоугольных образцов из полиуретана при различных скоростях обжатия с климатическим и деформационным старением и без старения. Развита методика расчетов может быть использована для прогнозирования деформационных и деградационных процессов в дорожных асфальтобетонных покрытиях и оценки прочности эластомеров, а также изделий, где эти материалы используются в качестве рабочего элемента (шины, прессовые валы с полиуретановым и резиновым покрытием и др.). Библиогр. 3 назв. Ил. 10.

Ключевые слова: эффективное время, упруговязкая среда Максвелла, полиуретан, климатическое и деформационное старение, обжатие плоского слоя, эпюры напряжений и скоростей перемещений, деградация тонкого слоя, опыты на сжатие и ползучесть, эффекты старения.

Введение. Полимеры (упруговязкие среды) используются в качестве конструкционных материалов во многих областях современной инженерной практики. В связи с этим возникает необходимость исследования их деформационных и прочностных характеристик с учетом условий, близких к эксплуатационным, когда полимеры подвергаются воздействию механических и физических полей различной интенсивности, а также агрессивных сред. Внутренние физико-химические процессы, протекающие в результате этих воздействий, приводят со временем к изменению рабочих характеристик полимеров. В совокупности эти процессы определяют старение материала. В работе реологические упруговязкие уравнения записываются в шкале эффективного времени (модифицированные уравнения Максвелла), что позволяет учитывать эффекты старения при решении конкретных краевых задач.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00823).

1. Уравнения упруговязкой среды Максвелла, записанные в шкале эффективного времени. При формулировке реологических уравнений упруговязкой стареющей среды вводится параметр эффективного времени ω , который определяется с помощью следующего соотношения [1]:

$$d\omega = f_1(\omega, \varepsilon, t)dt + f_2(\omega, \varepsilon, t)d\varepsilon, \quad (1.1)$$

где ε — деформация, t — реальное время.

Параметр ω рассматривается как обобщенное время, способное описать эффекты как климатического и теплового, так и деформационного старения. В частности, из (1.1) следует, что при мгновенных, активных нагружениях этот параметр соответствует деформационному времени ε . В состоянии разгрузки и стабилизации параметр ω описывает кинетику химических процессов старения и сводится к обычному времени t .

В опытах на глубокое сжатие и ползучесть цилиндрических образцов из полиуретана установлены силовые и временные области, внутри которых поведение материала можно считать несжимаемым линейно-упруговязким. С учетом этих результатов формулируются модифицированные уравнения Максвелла. В двумерной постановке эти уравнения записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x^e &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{3}{2E(\omega)} (\sigma_x - \sigma) \right], & \dot{\varepsilon}_y^e &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{3}{2E(\omega)} (\sigma_y - \sigma) \right], \\ \dot{\gamma}_{xy}^e &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{3\tau_{xy}}{E(\omega)} \right], & \sigma &= \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) = \sigma_z, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x^v &= \frac{\partial \varepsilon_x^v}{\partial \omega} = \frac{1}{2\eta(\omega)} (\sigma_x - \sigma), & \dot{\varepsilon}_y^v &= \frac{\partial \varepsilon_y^v}{\partial \omega} = \frac{1}{2\eta(\omega)} (\sigma_y - \sigma), \\ \dot{\gamma}_{xy}^v &= \frac{\partial \gamma_{xy}^v}{\partial \omega} = \frac{\tau_{xy}}{\eta(\omega)}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В соотношениях (1.2), (1.3) индексами e, v обозначены компоненты упругой и вязкой составляющих общей деформации $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^v$, через $\sigma, \tau, \varepsilon, \gamma$ (с соответствующими индексами) обозначены компоненты напряжений и деформаций, $E(\omega), \eta(\omega)$ — переменные модуль упругости и коэффициент вязкости.

2. Экспериментальные исследования климатического и деформационного старения образцов из полиуретана в опытах на сжатие. В выполненных нами опытах на активное сжатие и ползучесть над предварительно состаренными образцами из полиуретана наблюдается значительное упрочнение материала, по сравнению с образцами, испытанными без предварительного старения. В опытах на сжатие использовались образцы квадратного поперечного сечения размерами $20 \times 20 \times 30$ мм. Опыты выполнялись при комнатной температуре на машине марки Instron 1231U-10 со скоростью нагружения 3,5 мм/мин на двух базах силового измерения: 200 кг и 1000 кг. Диаграммы σ — ε , полученные в этих испытаниях, показаны на рис. 2.1 и 2.2.

На рис. 2.1 цифрой 1 отмечена начальная кривая напряжение—деформация в опыте над образцом без старения. Кривая σ — ε , отмеченная на этом рисунке цифрой 2, получена в опыте над образцом, состаренным в течение около двенадцати лет в лабораторных условиях. Сравнивая эти кривые можно заметить значительное упрочнение материала при старении.

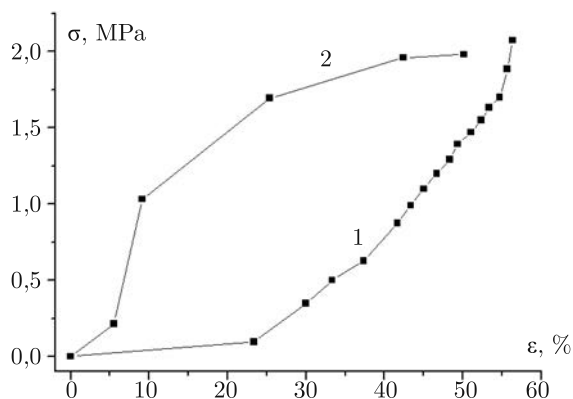


Рис. 2.1. Диаграммы σ — ε : 1—образец без старения, 2—старение в течение около двенадцати лет.

Один образец был испытан на деформационное старение. После испытания на глубокое сжатие образец старился в лабораторных условиях в течение около двенадцати лет, затем был повторно испытан на сжатие. Кривая σ — ε , полученная по результатам этого опыта, на рис. 2.2 отмечена цифрой 2. Цифрой 1 отмечена кривая напряжение—деформация для образца без старения. Согласно этому рисунку, наблюдается более интенсивное упрочнение материала по сравнению с образцом, испытанным без предварительной деформации.

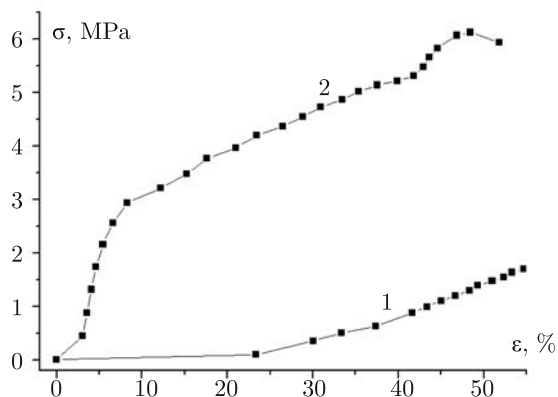


Рис. 2.2. Диаграммы σ — ε : 1—образец без старения, 2—образец после деформационного старения в течение около двенадцати лет.

3. Деградация вязкого тонкого слоя при обжатии (двумерная задача).

Рассмотрим задачу о сжатии тонкого упруговязкого слоя двумя длинными параллельными плитами. Если ширина слоя $2a$ значительно меньше ее длины $2b$ (рис. 3.1), то задача сводится к случаю плоской деформации. Задача о плоской деформации для линейно-вязкой среды подробно рассмотрена А. Надаи [2]. Далее эти исследования развиваются для конкретных расчетов по сжатию тонкого слоя из полиуретана.

Ограничимся рассмотрением уравнений (1.1)–(1.3) для случая вязкой среды, записанных в шкале реального времени [3]. Если пренебречь компонентами упругой

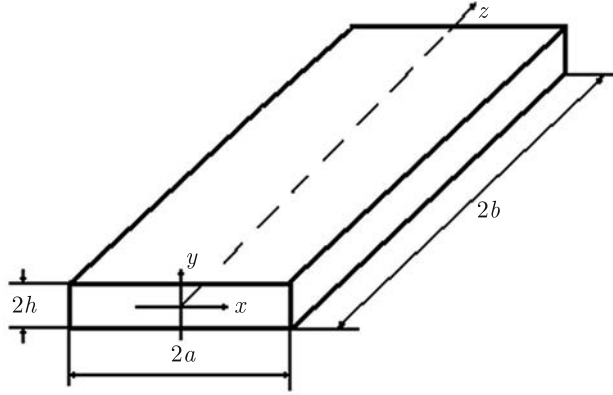


Рис. 3.1. Задача о плоской деформации.

деформации и опустить индексы, то получим следующую систему уравнений:

$$\sigma_x - \sigma = 2\eta\dot{\epsilon}_x, \quad \tau_{xy} = \eta\dot{\gamma}_{xy}, \quad \sigma_y - \sigma = 2\eta\dot{\epsilon}_y, \quad (3.1)$$

$$\sigma = 1/2(\sigma_x + \sigma_y) = \sigma_z \quad (3.2)$$

Для решения задачи воспользуемся соотношениями Коши для компонент скоростей перемещений u, v ,

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3.3)$$

и системой дифференциальных уравнений равновесия:

$$\eta \Delta u + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \quad \eta \Delta v + \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0,$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = 0, \quad (3.5)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Считая среду несжимаемой, имеем условие

$$\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.6)$$

Для решения системы уравнений (3.4)–(3.6) введем функцию тока φ в соответствии с соотношениями

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (3.7)$$

Тогда для функции φ получим линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка (бигармоническое уравнение)

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \quad \Delta \Delta \varphi = 0. \quad (3.8)$$

Задавая граничные условия для функций u , v , получим решение для конкретной краевой задачи.

Рассмотрим простой случай, когда тонкий слой сжимается без скольжения двумя плоскими плитами со скоростью v_0 [3]. Граничные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} u = 0, \quad v = -v_0 = \text{const} \quad \text{при } y = h, \\ u = 0, \quad v = v_0 = \text{const} \quad \text{при } y = -h. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Согласно (3.7) для функции тока φ имеем следующие граничные условия:

$$\varphi = v_0 x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = h; \quad \varphi = -v_0 x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = -h. \quad (3.10)$$

Для прямоугольной пластины решение бигармонического уравнения (3.8) обычно задается в виде полинома четвертой степени $\varphi = ax^4 + bx^3y + cxy + dxy^3 + ey^4$. Учитывая граничные условия (3.10), коэффициенты этого полинома будут равны $a = 0$, $b = 0$, $e = 0$, $c = 3v_0/2h$, $d = -v_0/2h^3$. Таким образом, уравнение (3.8) удовлетворяется при выборе функции тока в виде

$$\varphi = \frac{v_0 x}{2h^3} (3h^2 y - y^3). \quad (3.11)$$

В соответствии с соотношениями (3.7) и (3.11) скорости u , v выражаются как

$$u = \frac{3v_0 x}{2h^3} (h^2 - y^2), \quad v = -\frac{v_0}{2h^3} (3h^2 y - y^3). \quad (3.12)$$

Среднее напряжение σ или давление $P = -\sigma$ вычисляются по формулам

$$\eta \Delta u = -\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{3\eta v_0 x}{h^3}, \quad \eta \Delta v = -\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{3\eta v_0 y}{h^3}. \quad (3.13)$$

Из (3.13) следует

$$P = P_0 + \frac{3\eta v_0}{2h^3} (y^2 - x^2), \quad (3.14)$$

где P_0 — величина давления в точке $x = 0$, $y = 0$.

Воспользуемся условием $P \approx 0$ при $x = \pm a$, $y = 0$ и вычислим из (3.14) выражение для P_0 :

$$P_0 = \frac{3\eta v_0 a^2}{2h^3}. \quad (3.15)$$

Внося (3.15) в (3.14), получим

$$P = \frac{P_0}{a^2} (a^2 + y^2 - x^2). \quad (3.16)$$

Максимальная величина давления $P = P_0$ достигается вдоль линии $x = 0$, $y = 0$. В точке $x = a$, $y = 0$ величина давления падает до нуля.

Скорости деформаций определяются из соотношений Коши (3.3) и имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3v_0}{2h^3} (h^2 - y^2), \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{3v_0}{2h^3} (h^2 - y^2), \\ \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{3v_0 xy}{h^3}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

С учетом (3.16) и (3.17) компоненты напряжений могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -P + 2\eta\dot{\epsilon}_x = \frac{P_0}{a^2}(x^2 - 3y^2 - a^2 + 2h^2), \\ \sigma_y &= -P + 2\eta\dot{\epsilon}_y = \frac{P_0}{a^2}(x^2 + y^2 - a^2 - 2h^2), \\ \tau_{xy} &= \eta\dot{\gamma}_x = -\frac{3\eta v_0 xy}{h^3}.\end{aligned}\quad (3.18)$$

4. Эпюры скоростей перемещений и напряжений. Эпюры скоростей перемещений u , v строились согласно формулам (3.12). Были использованы следующие величины коэффициентов: $v_0 = 1$ мм/мин, $2h = 25$ мм, $2a = 10,8$ мм. На рис. 4.1 показаны эпюры скоростей u . В направлении оси x величина u распределена по параболическому закону с максимумом в точках $y = 0$. При этом наблюдается увеличение u с удалением от нулевой точки.

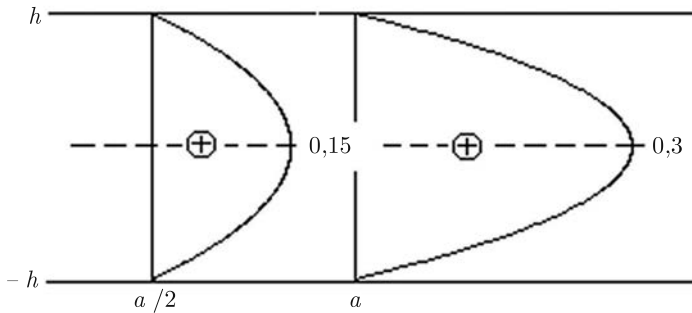


Рис. 4.1. Эпюры скоростей перемещений u .

Эпюры скоростей перемещений v показаны на рис. 4.2. Величина v распределена одинаково по любому поперечному сечению $x = \text{const}$.

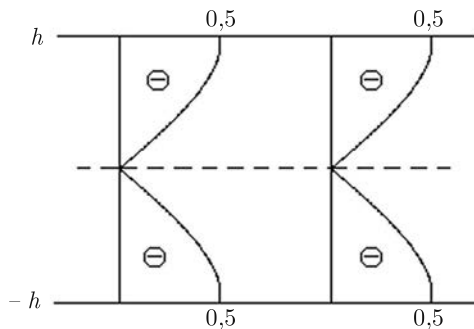


Рис. 4.2. Эпюры скоростей перемещений v .

При построении эпюр напряжений были использованы следующие величины коэффициентов: $v_0 = 1$ мм/мин, $2h = 25$ мм, $2a = 10,8$ мм, $\eta = 2,256$ МПа·мин. Эпюры напряжений σ_x для двух поперечных сечений $x = 0$ и $x = a$ показаны на рис. 4.3. Максимальные напряжения положительны и при $x = a$ равны $\sigma_x = 0,272$ МПа, а при

$x = 0$ $\sigma_x = 0,25$ МПа. При приближении к плоскостям $y = \pm h$ напряжение σ_x меняет знак с положительного на отрицательный. При $y = \pm h, x = a$ $\sigma_x = -0,136$ МПа. При $y = \pm h, x = 0$ $\sigma_x = -0,158$ МПа. Согласно расчетам напряжения σ_x являются отрицательными в прослойке толщиной ≈ 3 мм вблизи контактной плоскости.

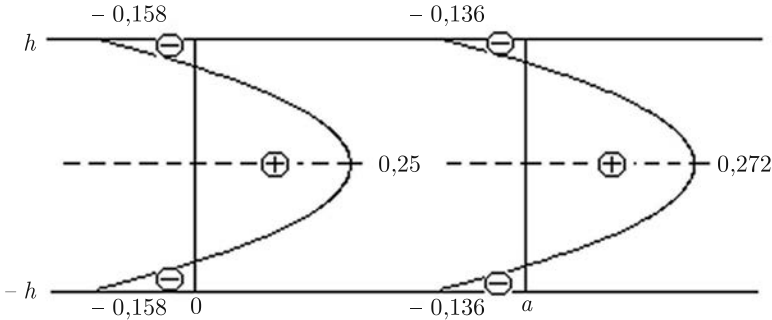


Рис. 4.3. Эпюры напряжений σ_x .

Величины напряжения σ_y отрицательны, имеют максимум в точке $(0,0)$ и равны $\sigma_y = -0,294$ МПа. Эпюры напряжений σ_y для двух поперечных сечений $x = 0$ и $x = a$ показаны на рис. 4.4. Как видно из этих эпюр, на плоскостях $y = \pm h$ напряжения σ_y в точности совпадают с соответствующими напряжениями σ_x .

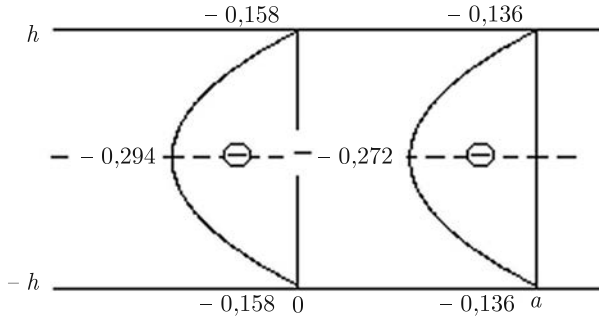


Рис. 4.4. Эпюры напряжений σ_y .

В случае плоской деформации $\sigma_z = 1/2(\sigma_x + \sigma_y)$, следовательно величины всех трех напряжений на плоскости контакта и вблизи этой плоскости равны между собой. Таким образом, в этих областях возникает напряженное состояние, близкое к состоянию всестороннего гидростатического сжатия. Поэтому на контактных плоскостях и внутри тонкой прослойки возможно появление хрупких разрушений и разрыхление структуры. Как показывают расчеты, эти эффекты усиливаются процессами старения.

Высказанные выше положения подтверждаются эпюрами напряжений σ_x и σ_y , построенными для различных режимов старения, соответствующих различным величинам коэффициента вязкости η . Эпюры напряжений показаны на рис. 4.5 и 4.6. Сплошные линии на этих рисунках соответствуют материалу без старения, штриховые и штрихпунктирные линии соответствуют стареющим материалам. Расчеты

выполнены для трех величин коэффициента вязкости η : 2,256; 0,5 и 4 МПа · мин, и параметров $v_0 = 0,5$ мм/мин, $2h = 25$ мм, $2a = 10$ мм.

На рис. 4.5 представлены эпюры напряжений σ_x , действующих по поперечному сечению $x = 0$. Для материала без старения (сплошная линия) максимальные напряжения положительны и при $x = 0$ равны $\sigma_x = 0,25$ МПа. С приближением к плоскостям $y = \pm h$ напряжение σ_x меняет знак и $\sigma_x = -0,158$ МПа при $y = \pm h$.

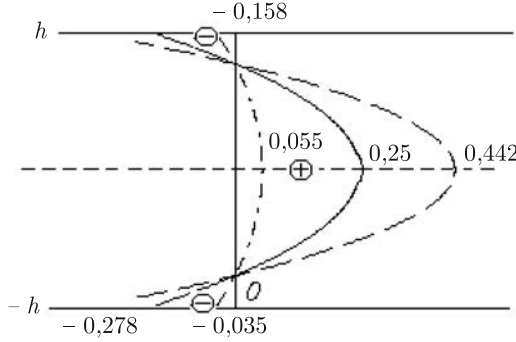


Рис. 4.5. Эпюры напряжений σ_x для различных величин коэффициента вязкости η .

Эпюры напряжений σ_y для поперечного сечения $x = 0$ показаны на рис. 4.6. Для материала без старения (сплошная линия) величины напряжений σ_y отрицательны и в точках максимума (0,0) равны $\sigma_y = -0,158$ МПа по сечению $x = 0$. С удалением от плоскости $x = 0$ напряжения σ_y уменьшаются и с увеличением a они стремятся к нулю. Как видно из рис. 4.6, на плоскостях $y = \pm h$ напряжение σ_y по знаку и по величине в точности совпадает с напряжением σ_x . Так как в случае плоской деформации $\sigma_z = 1/2(\sigma_x + \sigma_y)$, величины трех главных напряжений равны друг другу и, например, при $x = 0$ имеем $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -0,158$ МПа. Подобная картина (с другим величинами напряжений) аналогична и для стареющего материала.

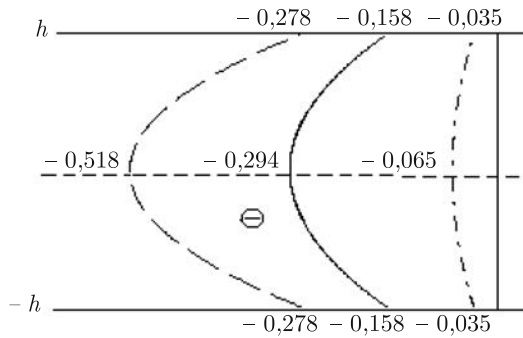


Рис. 4.6. Эпюры напряжений σ_y для различных величин коэффициента вязкости η .

Гидростатическая компонента напряжений также меняется. Так, величина гидростатической компоненты напряжений равна $-0,035$ МПа, когда $\eta = 0,5$ МПа · мин. С увеличением коэффициента вязкости до величины $\eta = 4$ МПа · мин значение гидростатической компоненты напряжений равно $-0,278$ МПа.

Так как на поверхностях сжимаемого тонкого слоя и внутри прослойки наблюдается напряженное состояние всестороннего гидростатического сжатия, в этих областях возможно разрыхление структуры и разрушение материала. Эти эффекты, усиленные процессами старения, могут служить основной причиной деградации материала слоя, приводящего к потере работоспособности всего слоя.

Литература

1. Арутюнян Р. А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2004. 253 с.
2. Nadai A. Theory of flow and fracture of solids. New York: McGraw-Hill, 1963. Vol. 2. 321 p.
3. Арутюнян Р. А. Накопление повреждений и разрушение высокоэластичного тонкого слоя при циклическом обжатии // Вестн. С.-Петербург. ун-та. 2012. Сер. 1. Вып. 4. С. 53–61.

Статья поступила в редакцию 23 октября 2014 г.

Сведения об авторе

Арутюнян Роберт Ашотович — доктор физико-математических наук, профессор;
Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru

RHEOLOGY OF ELASTIC-VISCOUS AGING MEDIA

Robert A. Arutyunyan

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034,
Russian Federation; Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru

The elastic-viscous Maxwell's equations for aging media are formulated. Investigations of the mechanical properties of polyurethane in the experiments on creep and pressure on the specimens without aging and with the climate and deformation aging were carried out. The problem of thin layer made of incompressible viscous material subjected to compression by two long parallel plates is considered. The stress diagrams for the unaged and aged materials are constructed. It is shown, that on the surface and inside of the pressed layer the state of hydrostatic pressure is occurred. The received results can be applied to estimate the strength of different elastic viscous materials (natural and artificial rubbers, polyurethane, asphaltic concrete) and the items where these materials are used as working elements, for example, tires, roads, the pressing shafts with the rubber or polyurethane cover and others. Refs 3. Figs 10.

Keywords: effective time, elastic-viscous Maxwell's media, polyurethane, climate and deformation aging, compression of thin layer, stress and rate displacements diagrams, degradation of thin layers, compression and creep experiments, aging effects.

References

1. Arutyunyan R. A., "Problem of deformation aging and prolonged fracture in material sciences" (St.Petersburg University Press, St.Petersburg, 2004) [in Russian].
2. Nadai A., "Theory of flow and fracture of solids" 2 (McGraw-Hill, New York, 1963).
3. Arutyunyan R. A., "Damage accumulation and fracture of thin layer made of high elastic material subjected to cyclic compression", *Vestnik St.Petersburg University, Ser. 1* Issue 4, 53–61 (2012) [in Russian].