

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ОРТОТРОПНОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ*

С. М. Бауэр, А. Л. Смирнов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

В статье рассматривается задача о деформации упругого трансверсально-изотропного слоя под действием нормального давления в трехмерной постановке. Получены асимптотические формулы, описывающие поведение мягкого слоя, то есть такого, у которого жесткость в трансверсальном направлении много меньше, чем в тангенциальном. Проведено сравнение точных и асимптотических решений, исследовано влияние параметров на величину относительного изменения толщины слоя. Библиогр. 10 назв. Ил. 5.

Ключевые слова: сферический слой, задача Ламе, трансверсальная изотропия.

1. Введение и постановка задачи. Рассматривается трехмерная задача о деформации трансверсально-изотропного сферического слоя, находящегося под действием нормального давления. Такая модель может быть использована, например, для описания изменения напряженно-деформированного состояния внешней оболочки глаза при введении внутриглазных инъекций. Для изотропного сферического слоя эта задача, известная как задача Ламе, описана, например, в [1]. Для трансверсально-изотропного слоя аналитическое решение было получено в [4, 9], но формулы, описывающие деформации, оказываются довольно громоздки и для анализа влияния параметров слоя на напряженно-деформированное состояния слоя удобнее использовать асимптотическое решение задачи.

Рассматривается деформация сферического слоя с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 ($R_1 < \rho < R_2$), находящегося под действием внутренних и внешних нормальных давлений P_1 и P_2 соответственно. Положение точки оболочки описывается сферическими координатами: ρ – радиальная координата, φ – координата в меридиональном направлении, θ – координата в окружном направлении. Считаем, что материал трансверсально изотропен, то есть он изотропен по сферической поверхности (в тангенциальной плоскости $\varphi\theta$), тогда $E_\varphi = E_\theta = E$, $E_\rho = E_1$, $\nu_{\varphi\theta} = \nu$, $\nu_{\theta\rho} = \nu_{\varphi\rho} = \nu_1$, $G = G_{\varphi\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $G_{\rho\varphi} = G_{\rho\theta} = G_1$. Здесь E_ρ , E_φ , E_θ – модули Юнга, $\nu_{\rho\theta}$, $\nu_{\varphi\theta}$, $\nu_{\varphi\rho}$ – коэффициенты Пуассона, $G_{\rho\varphi}$, $G_{\varphi\theta}$, $G_{\rho\theta}$ – модули сдвига.

Из соображений симметрии, как и в [1], полагаем, что напряжения зависят только от радиальной координаты, причем

$$\sigma_{\theta\theta}(\rho) = \sigma_{\varphi\varphi}(\rho), \quad \sigma_{\rho\theta} = \sigma_{\varphi\theta} = \sigma_{\rho\varphi} = 0$$

и перемещения точек происходят только в направлении ρ . В этом случае уравнения равновесия приводятся к одному уравнению

$$\frac{d\sigma_{\rho\rho}}{d\rho} + \frac{1}{\rho}(\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}) = 0,$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (тема НИР 6.15.820.2013) и РФФИ (гранты № 13-01-00523 А, 15-01-06311 А). Часть результатов исследования была включена в доклад [8].

а граничные условия имеют вид

$$\sigma_{\rho\rho}(R_i) = -P_i, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, после перехода к перемещениям уравнение равновесия принимает вид [4]

$$w_0''(\rho) + \frac{2}{\rho}w_0'(\rho) - 2\frac{E(1-\nu_1)}{E_1(1-\nu)\rho^2}w_0(\rho) = 0, \quad (1)$$

а граничные условия таковы:

$$2EE_1\nu_1w(R_i) + E_1^2(1-\nu)w'(R_i)R_i = -P_iR_i(E_1 - E_1\nu - 2E\nu_1^2) \quad i = 1, 2.$$

Для трансверсально изотропного материала ограничения на упругие постоянные приведены в [7]:

$$\nu < 1, \quad \nu_1 < \sqrt{\frac{E_1}{E}} \cdot \min\left(1, \sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\right),$$

причем для материалов с $\nu > -1$, то есть для всех известных, $\sqrt{\frac{1-\nu}{2}} < 1$.

2. Асимптотическое интегрирование уравнения равновесия. Рассмотрим случай, когда жесткость слоя в трансверсальном направлении много меньше, чем в тангенциальном, то есть $E_1 = \varepsilon^2 E$. При этом в силу ограничений на коэффициент Пуассона $\nu_1 = \varepsilon^\alpha \nu_1^*$, где $\varepsilon \ll 1$, $\nu_1^* \approx 1$, $\alpha \geq 1$. Положим $\alpha = 1$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\varepsilon^2 w_0''(\rho)\rho^2 + 2\varepsilon^2 \rho w_0'(\rho) - (a + b\varepsilon)w_0(\rho) = 0, \quad (2)$$

где $a = \frac{2}{1-\nu}$ и $b = -\frac{2\nu_1^*}{1-\nu}$, а граничные условия —

$$\varepsilon f w(R_i) + \varepsilon^2 g w'(R_i)R_i = -c p_i R_i, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

где $p_i = P_i/E$, $c = (1 - \nu - 2\nu_1^{*2})$, $f = 2\nu_1^*$, $g = 1 - \nu$. Следуя [5], решение уравнения (2) будем искать в виде

$$w(\rho) = e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\rho \lambda(t) dt} (w_0(\rho) + \varepsilon w_1(\rho) + \dots). \quad (4)$$

После подстановки (4) в (2), собирая члены с одинаковыми степенями ε , получим последовательность уравнений для определения $\lambda(\rho)$, $w_0(\rho)$, $w_1(\rho)$, ... вида

$$\begin{aligned} w_0(\rho)(-a + \rho^2 \lambda^2(\rho)) &= 0, \\ 2\rho^2 w_0'(\rho) \lambda'(\rho) + w_0(\rho)(-b + 2\rho \lambda'(\rho) - \rho^2 \lambda''(\rho)) &= 0, \\ \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Решение первого уравнения (5) дает

$$\lambda(\rho) = \pm \frac{\sqrt{a}}{\rho},$$

а второго —

$$w_0(\rho) = \rho^\beta, \quad \beta = \frac{1}{2} \left(\pm \frac{b}{\sqrt{a}} - 1 \right).$$

Таким образом, двучленное представление решения имеет вид

$$w(\rho) = A\rho^{\gamma_1} + B\rho^{\gamma_2}, \quad (6)$$

где $\gamma_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{a}}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \left(\pm \frac{b}{\sqrt{a}} - 1 \right)$. Константы A и B определяются из граничных условий (3). Подставим одночленное приближение в граничные условия и решим полученную систему относительно A и B . Получим

$$A = -\frac{c}{\varepsilon} \frac{R_1 G_1 p_1 - R_2 G_2 p_2}{F^+(G_1^2 - G_2^2)},$$

$$B = -\frac{c}{\varepsilon} \frac{G_1 G_2 (R_2 G_1 p_2 - R_2 G_2 p_1)}{F^-(G_1^2 - G_2^2)},$$

где $F^\pm = \sqrt{ag} \pm f$ и $G_i = R_i \sqrt{a}/\varepsilon$.

Формула (6) описывает смещение элемента слоя вдоль нормали. В частности, она позволяет оценить изменение толщины слоя в процессе деформации. Действительно,

$$\Delta h = \frac{w(R_2) - w(R_1)}{R_2 - R_1}$$

или с учетом (6)

$$\Delta h = -\frac{c}{\varepsilon} \frac{p_1 R_1 (F^+ G_2 - F^- G_1) + p_2 R_2 (F^- G_2 - F^+ G_1)}{(F^- F^+ (G_1 + G_2))(R_2 - R_1)}. \quad (7)$$

3. Примеры и анализ влияния параметров. Дальнейшие упрощения формулы (7) связаны с учетом порядка отношения величин R_1 и R_2 . Рассмотрим два случая: толстый слой ($R_1 \ll R_2$) и тонкий слой ($R_1 \approx R_2$).

Для толстого слоя положим $\xi = R_1/R_2$ ($\xi \ll 1$). При этом $G_1 \ll G_2$ и в первом приближении

$$\Delta h = -\frac{c}{\varepsilon} \frac{p_1 \xi F^+ + p_2 F^-}{(F^+ F^-)(1 - \xi)}. \quad (8)$$

В качестве примеров будем рассматривать упругий слой с параметрами склеральной оболочки человеческого глаза [9, 10]: $\nu = 0.48$, $p_1 = p * 133.3 \text{Па}$, $p_2 = 0 \text{Па}$, $E = 14 \text{МПа}$, $\nu_1^* = 0.5$, причем считаем, что внутриглазное давление $p = 20 \text{мм рт. ст.}$

На рис. 1, *a* представлены графики зависимости Δh от ε при $\xi = 0.7$. Синяя линия — точное решение, красная линия — формула (8). Интересно, что даже в случае относительно большого значения параметра ξ численные и асимптотические результаты хорошо согласуются, а при $\xi < 0.7$ практически совпадают.

Случай тонкого слоя более сложный, так как в разложение входят два конкурирующих малых параметра. Разложение точного решения задачи с одним малым параметром η , связанным с толщиной слоя, выполнено в работах [2, 3]. Положим $R_1 = (1 - \eta)R_2$ ($\eta = 1 - \xi \ll 1$), тогда

$$\Delta h = -\frac{c}{\varepsilon \eta} \frac{p_1 (1 - \eta) (F^+ - F^- (1 - \eta)^\varkappa) + p_2 (F^- - F^+ (1 - \eta)^\varkappa)}{F^- F^+ (1 + (1 - \eta)^\varkappa)},$$

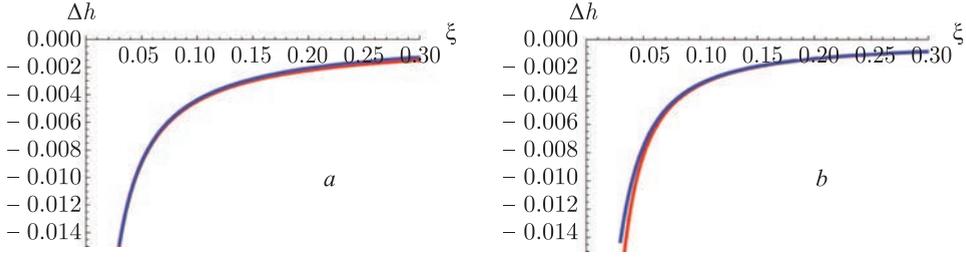


Рис. 1. Сравнение асимптотических и численных значений относительного изменения толщины при изменении параметра относительной жесткости слоя.

где $\varkappa = \sqrt{a}/\varepsilon$. Будем считать, что $\eta\varkappa \ll 1$, то есть $\eta \ll \varepsilon$, тогда, сохраняя главные члены, получим

$$\Delta h = -\frac{c}{2\varepsilon\eta} \frac{p_1(1-\eta)(F^+ - F^-(1-\eta\varkappa)) + p_2(F^- - F^+(1-\eta\varkappa))}{F^- - F^+} (1 + \eta\varkappa/2). \quad (9)$$

На рис. 1, *b* представлены графики зависимости Δh от ε для тонкого слоя $\eta = 0.04$. Синяя линия — точное решение, красная линия — формула (9). Отметим хорошее совпадение графиков при «больших» значениях ε .

На рис. 2 представлены графики зависимости Δh от ε (точные значения) при изменении величины R_1/R_2 в диапазоне $[0.46, 0.96]$. С уменьшением толщины слоя модуль величины Δh быстро возрастает, достигая 10% при $\eta = 0.01$ (тонкая оболочка) и $\varepsilon = 0.1$

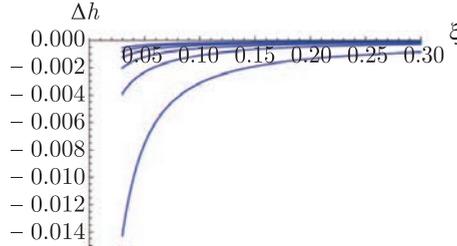


Рис. 2. Зависимость относительного изменения толщины от параметра относительной жесткости слоя для разных значений параметра относительной толщины слоя.

На рис. 3 изображены графики зависимости Δh от $\xi = R_1/R_2$ (точные значения) при изменении величины ε в диапазоне $[0.05, 0.3]$. Как и следовало ожидать, с ростом ε изменение толщины становится меньше. При стремлении толщины слоя к нулю величина изменения толщины неограниченно убывает. Действительно, при малых η главный член в формуле (9) имеет вид

$$\Delta h = -\frac{c}{2\varepsilon\eta} \frac{(p_1 - p_2)(F^+ - F^-)}{F^- - F^+}, \quad (10)$$

и Δh с уменьшением толщины слоя убывает по гиперболическому закону.

На рис. 4, объединяющем рис. 2 и 3, представлена зависимость Δh от ε и $\xi = R_1/R_2$

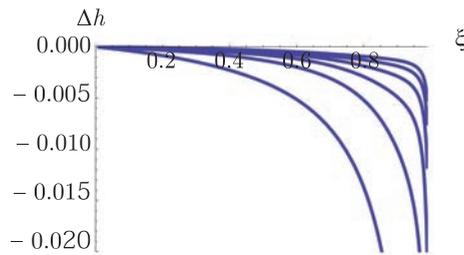


Рис. 3. Зависимость относительного изменения толщины от относительной толщины слоя для разных значений параметра относительной жесткости слоя.

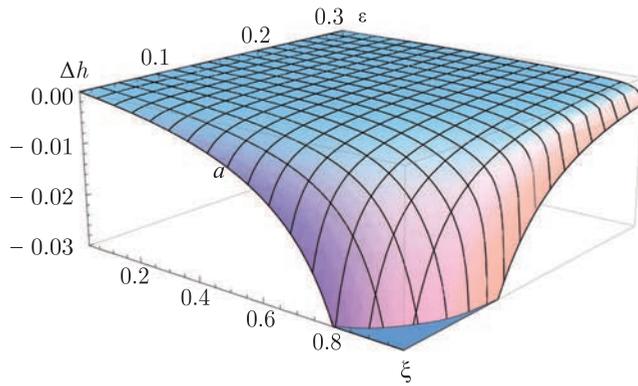


Рис. 4. Зависимость относительного изменения толщины слоя от параметров относительной жесткости и толщины слоя.

Наконец, на рис. 5 представлена зависимость Δh от ν_1 при $R_1/R_2 = 0.96$ для различных значений ε : $\varepsilon = 0.03$ — красная линия, $\varepsilon = 0.1$ — зеленая линия, $\varepsilon = 0.3$ — синяя линия. С увеличением ν_1 относительное изменение толщины линейно растет, причем этот эффект тем больше, чем меньше ε .

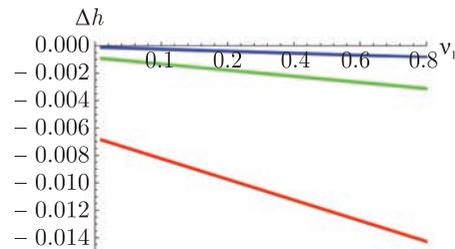


Рис. 5. Зависимость относительного изменения толщины слоя от коэффициента Пуассона.

4. Заключение. Асимптотические соотношения показывают, что при деформации сферического слоя под действием внутреннего давления относительная толщина слоя меняется тем больше, чем меньше толщина слоя.

Изменение толщины склеральной оболочки при увеличении внутриглазного давления, как один из результатов представленного моделирования, согласуется с имеющимися данными о том, что при глаукоме, глазном заболевании, сопровождающимся, как правило, повышенным уровнем внутриглазного давления, также наблюдается уменьшение толщины склеры [6].

Зная относительное изменение толщины сферического слоя при увеличении внутреннего давления, например, при введении внутриглазных инъекций, можно оценить отношение радиального и тангенциального модулей упругости склеральной оболочки.

Литература

1. *Атанацкович Т., Гуран А.* Лекции по теории упругости. СПб., 2003, 400 с.
2. *Бауэр С. М., Воронкова Е. Б.* Модели неклассических теорий анизотропных оболочек в задачах биомеханики глаза // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского, № 4, часть 5. С. 2000–2001.
3. *Бауэр С. М., Воронкова Е. Б.* Неклассические теории анизотропных оболочек в задачах о деформации трансверсально-изотропных сферических и цилиндрических слоев под действием нормального давления // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 3. С. 86–93.
4. *Бауэр С. М., Замураев Л. А., Котляр К. Е.* Модель трансверсально-изотропного сферического слоя для расчета изменения внутриглазного давления при интрасклеральных инъекциях // Российский журнал биомеханики. 2006. Т. 10. № 2. С. 43–49.
5. *Бауэр С. М., Смирнов А. Л., Товстик П. Е., Филиппов С. Б.* Асимптотические методы в механике твердого тела. М.; Ижевск, 2007. 360 с.
6. *Волков В. В.* Глаукома при псевдонормальном давлении. Руководство для врачей. М.: Медицина, 2001.
7. *Родионова В. А., Титаев Б. Ф., Черных К. Ф.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та. 1996. 278 с.
8. *Bauer S. M., Smirnov A. L.* Deformation of the orthotropic spherical layer under normal pressure // Book of Abstracts XLII Summer School–Conference “Advanced Problems in Mechanics”. St. Petersburg (Repino), Russia 2014. P. 38–39.
9. *Kotliar K., Maier M., Bauer S., Feucht N., Lohmann C., Lanzl I.* Effect of intravitreal injections and volume changes on intraocular pressure: clinical results and biomechanical model // Acta Ophthalmologica Scandinavica. Vol. 85. Issue 7. 2007. P. 777–781.
10. *Kotliar K., Maier M., Bauer S., Feucht N., Lohmann C., Lanzl I.* Intravitreal injection of triamcinolone acetonide and intraocular pressure: Author’s reply // Acta Ophthalmologica. Vol. 86. Issue 6. 2008. P. 692–693.

Статья поступила в редакцию 23 октября 2014 г.

Сведения об авторах

Бауэр Светлана Михайловна — доктор физико-математических наук, профессор; s_bauer@mail.ru

Смирнов Андрей Леонидович — кандидат физико-математических наук, доцент; a_l_smirnov@mail.ru

DEFORMATIONS OF THE ORTHOTROPIC SPHERICAL LAYER UNDER NORMAL PRESSURE

Svetlana M. Bauer, Andrei L. Smirnov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; s_bauer@mail.ru, a_l_smirnov@mail.ru

The deformation of the orthotropic spherical layer under normal pressure applied on the outer and inner surfaces is analyzed. The layer is assumed to be slightly orthotropic, it permits to apply asymptotic methods. The equations of zeroth and first approximations are derived. For the shell, which is much softer in the transverse direction than in the tangential plane, one gets singularly perturbed boundary value problem.

Solving this problem in the zeroth approximation the asymptotic formula for the change of the relative layer thickness under normal pressure is obtained. Also the effect of Poisson ratio and the layer thickness on the deformation is studied. For the cases of the thick and thin layers the last formula may be simplified. The asymptotic results well agree with the exact solution. The developed formulas are used in analysis of the scleral shell under intraocular pressure and may also be used in solution of the inverse problem, i.e. in analysis of the stress-strain state of a human eye under injection. The solution of the problem helps to estimate the mechanical parameters of the sclera, i.e. to find the ratio of the tangential and transversal Young modules using clinical data for the sclera thickness change. Refs 10. Figs 5.

Keywords: spherical layer, Lamé problem, transverse isotropy.

References

1. Atanackovic T. M., Guran A., *Theory of Elasticity for Scientists and Engineers* (Birkhäuser, Basel, 2000).
2. Bauer S. M., Voronkova E. B., “Non-classical anisotropic shell theories in ocular biomechanics”, *Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod* N4, Part 5, 2000–2001 [in Russian].
3. Bauer S. M., Voronkova E. B., “Nonclass theories of anisotropic shells in the problems on the deformation of transversely isotropic spherical and cylindrical layers under normal pressure”, *Vestn. S.-Peterb. Univ. Ser. 1* Issue 3, 86–93 (2011).
4. Bauer S. M., Zamuraev L. A., Kotliar K. E., “Model of the transversely isotropic spherical layer for estimation of intraocular pressure changes after intravitreal injections”, *Russ. J. Biomech.* **10**(2), 41–47 (2006).
5. Bauer S. M., Smirnov A. L., Tovstik P. E., Filippov S. B., *Asymptotic methods in mechanics of Solids* (R&C Dynamics, Moscow, Izhevsk, 2007) [in Russian].
6. Volkov V. V., *Glaucoma with pseudonormal pressure* (Medicine, Moscow, 2001) [in Russian].
7. Rodionova V. A., Titaev V. F., Chernykh K. F., *Applied Theory of Anisotropic Plates and Shells*, (Izd. St.Peterb. Univ., St.Petersburg, 1996) [in Russian].
8. Bauer S. M., Smirnov A. L., “Deformation of the orthotropic spherical layer under normal pressure”, *Book of Abstracts XLII Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics”* 38–39 (St.Petersburg (Repino), Russia, 2014).
9. Kotliar K., Maier M., Bauer S., Feucht N., Lohmann C., Lanzl I., “Effect of intravitreal injections and volume changes on intraocular pressure: clinical results and biomechanical model”, *Acta Ophthalmologica Scandinavica* **85**, Issue 7, 777–781 (2007).
10. Kotliar K., Maier M., Bauer S., Feucht N., Lohmann C., Lanzl I., “Intravitreal injection of triamcinolone acetonide and intraocular pressure: Author’s reply”, *Acta Ophthalmologica* **86**, Issue 6, 692–693 (2008).