

ПОЛУОБРАТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ТОНКОГО КРЫЛА ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА*

В. И. Богатко¹, Г. А. Колтон², Е. А. Потехина¹

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
² Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»,
Российская Федерация, 199106, Санкт-Петербург, В. О., 21-я линия, 2

Работа посвящена дальнейшему изучению пространственной стационарной задачи обтекания тонкого крыла, движущегося с большой сверхзвуковой скоростью. Головная ударная волна считается присоединенной к передней кромке крыла хотя бы в одной точке. В предыдущих работах авторов решение указанной задачи в рамках метода тонкого ударного слоя для поправок первого приближения было сведено к решению интегродифференциальной системы уравнений для определения двух произвольных функций и формы фронта ударной волны. В настоящей работе рассмотрены некоторые частные решения этой системы. Используется полуобратный метод решения этой системы, при котором вместо уравнения поверхности крыла задается вид одной из произвольных функций. Конкретная форма обтекаемого крыла определяется в процессе построения решения задачи. В рамках такого подхода к решению задачи найдены формулы для определения расстояния между ударной волной и поверхностью крыла и формы поверхности обтекаемого тела. Получены также формулы для распределения давления на поверхности крыла. Отдельно рассмотрен случай треугольного в плане крыла. Библиогр. 5 назв. Ил. 4.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, обтекание тел, гиперзвуковые течения, тонкий ударный слой.

Обтекание крыльев под углом атаки гиперзвуковым потоком газа сопровождается образованием вблизи наветренной стороны обтекаемой поверхности относительно тонкого слоя газа, сильно сжатого при прохождении через головную ударную волну. Для исследования течения с помощью приближенных аналитических решений в этом случае обычно используется метод тонкого ударного слоя (метод «пограничного слоя» Г. Г. Черного) [1]. При этом решение строится в виде рядов специального вида по степеням малого параметра, характеризующего отношение плотностей газа на фронте головной ударной волны.

Стационарная пространственная задача обтекания тонкого крыла гиперзвуковым потоком газа исследовалась в рамках метода тонкого ударного слоя в работах [2–5].

В настоящей работе с использованием результатов, полученных в [4, 5], рассматриваются конкретные примеры обтекания тонкого крыла, помещенного под углом атаки в гиперзвуковой поток идеального газа.

1. Систему координат (x, y, z) выберем таким образом, чтобы поверхность крыла мало отличалась от плоскости (x, z) , а вектор скорости \bar{V} был параллелен плоскости (x, y) (рис. 1). При этом толщина, размах и хорда крыла имеют порядки $c = O(\varepsilon)$, $b = O(\sqrt{\varepsilon})$, $L = O(1)$ соответственно, где ε – малый параметр, характеризующий отношение плотностей газа перед фронтом головной ударной волны и непосредственно за ней. Угол атаки α между скоростью набегающего потока \bar{V} и плоскостью (x, z) не предполагается малым.

*Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (проект 6.0.24.2010).

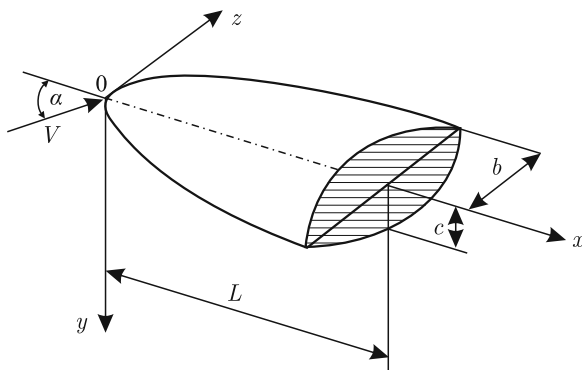


Рис. 1.

Задача обтекания тонкого крыла гиперзвуковым потоком газа в выбранной таким образом системе координат состоит в определении параметров течения (u, v, w — компоненты вектора скорости частиц газа, p — давление, τ — величина, обратная плотности) и формы фронта головной ударной волны.

Течение газа в ударном слое описывается системой нелинейных уравнений в частных производных с граничными условиями на фронте головной ударной волны и поверхности крыла. Головная ударная волна считается присоединенной к передней кромке крыла хотя бы в одной точке. Решение строится методом тонкого ударного слоя [4, 5]. Система уравнений для определения поправок первого приближения расщепляется таким образом, что два уравнения могут быть решены независимо от остальных, при этом одно из них может быть записано в дивергентном виде. Введение новой функции (аналога функции тока) позволяет свести решение задачи к интегрированию нелинейного уравнения второго порядка в частных производных, для построения решения которого используется преобразование Эйлера—Ампера. Полученное решение зависит от двух произвольных функций и неизвестной формы фронта головной ударной волны, для нахождения которых построена интегродифференциальная система уравнений.

Таким образом, решение поставленной задачи сводится [4, 5] к решению интегродифференциальной системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \nu}{\partial x} + \nu \frac{\partial \nu}{\partial z} \right) H(\nu, \nu x - z) = -1, \\ \nu = -\Phi_z, \\ \Phi(x, z) = F(x, z) - \int_{q_b(x, z)}^{\nu(x, z)} H(s, s x - z) ds, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

где $y = F(x, z)$ и $y = \Phi(x, z)$ — уравнения поверхностей крыла и формы фронта головной ударной волны соответственно, H — произвольная функция, введенная в [4], $\nu(x, z)$ и $q_b(x, z)$ — значения параметра q на поверхности головной ударной волны и поверхности крыла соответственно, $q = w$ — проекция скорости частицы газа на ось z ; при этом $q = \text{const}$ на линиях тока.

Величина q_b определится из уравнения

$$\frac{\partial q_b}{\partial x} + q_b \frac{\partial q_b}{\partial z} = 0. \quad (1.2)$$

В общем случае решение интегродифференциальной системы уравнений (1.1) для прямой задачи обтекания сопряжено со значительными трудностями. В работах [4, 5] предлагается полуобратный метод решения задачи, при котором вместо уравнения поверхности крыла $y = F(x, z)$ задается вид функции $H(\nu, \lambda)$, где $\lambda = \nu x - z$. При таком подходе значительно упрощается задача интегрирования системы (1.1) и, кроме того, остается возможность дополнительно задавать уравнение передней кромки крыла $x = x_0(z)$, а для режима обтекания с головной ударной волной, присоединенной вдоль всей передней кромки и наклон $F_{x_0}(z)$ поверхности крыла на передней кромке. Конкретная форма обтекаемого крыла должна определяться в процессе построения решения задачи.

2. Рассмотрим некоторые частные решения системы (1.1).

2.1. Пусть $\nu = \nu(z) = g'(z)$. Тогда, интегрируя первое уравнение из системы (1.1), получим

$$H = -\frac{1}{g'(z)g''(z)}.$$

Таким образом, в этом случае функция H зависит только от ν . Тогда, интегрируя второе уравнение системы (1.1), имеем

$$\Phi(x, z) = -g(z) + f(x).$$

Если $x = x_0(z)$ — уравнение передней кромки крыла, то для присоединенной головной ударной волны имеем

$$0 = \Phi(x_0(z), z) = -g(z) + f(x_0(z)) \implies g(z) = f(x_0(z))$$

и для формы поверхности головной ударной волны получим

$$\Phi(x, z) = f(x) - f(x_0(z)), \quad (2.1.1)$$

где функцию f можно задавать произвольно.

Характеристическая система для уравнения (1.2) имеет вид

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{q_b} = \frac{q_b}{0},$$

а его общее решение с произвольной функцией F_1 можно представить в виде

$$z = x \cdot q_b + F_1(q_b).$$

Произвольную функцию можно определить из условий на передней кромке крыла:

$$\zeta = x_0(\zeta) \cdot q_b(x_0(\zeta), \zeta) + F_1(q_b(x_0(\zeta), \zeta)),$$

где ζ — аппликата точки пересечения рассматриваемой линии тока с передней кромкой крыла $x = x_0(z)$.

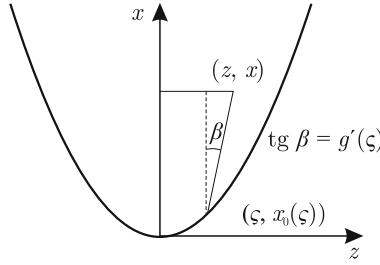


Рис. 2.

Тогда получим параметрическую зависимость функции q_b от x и z :

$$\begin{cases} q_b = \nu(\zeta) = g'(\zeta), \\ z - \zeta = g'(\zeta) (x - x_0(\zeta)). \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Теперь найдем расстояние между ударной волной и поверхностью крыла (рис. 2), а также форму поверхности обтекаемого крыла:

$$\delta(x, z) = - \int_{q_b(x, z)}^{\nu(x, z)} H(s) ds = \int_{\zeta}^z \frac{d\sigma}{g'(\sigma)}, \quad (2.1.3)$$

$$F(x, z) = \Phi(x, z) - \delta(x, z).$$

Здесь $s = g'(\sigma)$, $H(s) = - [g'(\sigma) \cdot g''(\sigma)]^{-1}$, $\nu(x, z) = g'(z)$, $q_b(x, z) = g'(\zeta)$.
Далее, следуя [5], получим

$$y = \Phi(x, z) + \int_q^\nu H(s) ds. \quad (2.1.4)$$

Отсюда

$$v = Dy = \frac{\partial y}{\partial x} + q \frac{\partial y}{\partial z} = f'(x) - q \left[g'(z) + \frac{1}{g'(z)} \right], \quad (2.1.5)$$

и на поверхности крыла будем иметь

$$v_b = f'(x) - \frac{g'(\zeta)}{g'(z)} \left(1 + g'^2(z) \right).$$

Давление определяется из уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial q} = -y_q Dv = H(q) \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} + q \frac{\partial v}{\partial z} \right\} = H(q) \left\{ f''(x) - q^2 \left(1 - \frac{1}{g'^2(z)} g''(z) \right) \right\}.$$

Интегрируя, получаем

$$P = 2f'(x) - g'^2(z) - 1 + \int_\nu^q H(s) \left\{ f''(x) - s^2(z) \left(1 - \frac{1}{g'^2(z)} \right) \right\} ds. \quad (2.1.6)$$

Отсюда при $q = q_b$ имеем

$$\begin{aligned}
 P_b &= 2f'(x) - g'^2(z) - 1 + \int_{\nu}^{q_b} H(s) \left\{ f''(x) - s^2(z) \left(1 - \frac{1}{g'^2(z)} \right) \right\} ds = \\
 &= 2f'(x) - g'^2(z) - 1 + \int_{\zeta}^z \left\{ f''(x) - g'^2(\sigma) g''(z) \left(1 - \frac{1}{g'^2(z)} \right) \right\} \frac{d\sigma}{g'(\sigma)} = \\
 &= 2f'(x) - g'^2(z) - 1 + f''(x) \delta(x, z) - g''(z) \left(1 - \frac{1}{g'^2(z)} \right) [g(z) - g(\zeta)]. \quad (2.1.7)
 \end{aligned}$$

Формула (2.1.7) вместе с (2.1.2) определяет распределение давления на поверхности крыла.

2.2. Пусть $H = \frac{C}{\nu}$, где $C = \text{const}$. Тогда для определения функции ν получим уравнение

$$\frac{\partial \nu}{\partial x} + \nu \frac{\partial \nu}{\partial z} = -\frac{\nu}{C}, \quad (2.2.1)$$

которое имеет частное решение вида

$$\nu = \frac{1}{C} \frac{z}{\exp\left(\frac{x}{C}\right) - 1}, \quad (2.2.2)$$

при этом $\nu = \text{const} = A$ на линиях $\exp\left(\frac{x}{C}\right) - 1 = A_1 z$. Если в качестве передней кромки крыла выбрать линию L с уравнением $x = C \ln(1 + kz)$, где $k = \text{const}$, то $\nu^0 = \nu|_L = \frac{1}{kC} = \text{const}$. Схематическая картина линий уровня величины ν на плоскости (x, z) и расположение линий тока на поверхности крыла в этом случае представлены на рисунках 3 и 4 соответственно.

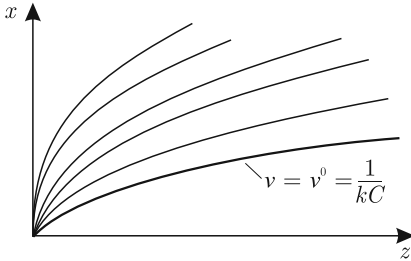


Рис. 3.

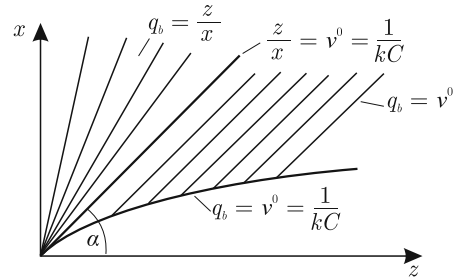


Рис. 4.

Интегрируя второе уравнение из системы (1.1), для формы фронта ударной волны получим

$$\Phi = -\frac{1}{C} \frac{z^2}{2(\exp\left(\frac{x}{C}\right) - 1)} + \varphi(x).$$

Произвольную функцию $\varphi(x)$ найдем из условия на передней кромке крыла:

$$\Phi|_L = 0 - \frac{1}{C} \frac{\exp\left(\frac{x}{C}\right) - 1}{2k^2} + \varphi(x) = 0,$$

и окончательно для формы фронта головной ударной волны, присоединенной к поверхности обтекаемого крыла вдоль всей передней кромки крыла, получим

$$\Phi(x, z) = \frac{1}{2C} \frac{\left[\frac{1}{k^2} (\exp\left(\frac{x}{C}\right) - 1)^2 - z^2 \right]}{\exp\left(\frac{x}{C}\right) - 1}. \quad (2.2.3)$$

Для расстояния между фронтом ударной волны и поверхностью крыла имеем

$$\begin{aligned} \delta(x, z) &= \Phi(x, z) - F(x, z) = - \int_{q_b(x, z)}^{\nu(x, z)} H(s) ds = - \ln \frac{\nu}{q_b} = \\ &= C \begin{cases} \ln C \frac{\exp(\frac{x}{C}) - 1}{x}, & 0 \leq z \leq \nu \circ x, \\ \ln \frac{C \nu^0 (\exp(\frac{x}{C}) - 1)}{z}, & \nu^0 \cdot x \leq z \leq \frac{1}{k} (\exp(\frac{x}{C}) - 1). \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Далее, следуя [5], получим

$$y = \Phi(x, z) + \int_q^\nu H(s) ds = \Phi(x, z) + \ln \frac{\nu}{q} \quad (2.2.5)$$

и

$$\begin{aligned} v = Dy &= \frac{\partial y}{\partial x} + q \frac{\partial y}{\partial z} = \Phi_x + \frac{C}{\nu} \nu_x + q \frac{C}{\nu} \nu_z + \Phi_z \cdot q = \\ &= \Phi_x + \frac{C}{\nu} (\nu_x + q \nu_z) = \Phi_x + \frac{C}{\nu} \left(-\nu \frac{\partial \nu}{\partial z} - \frac{\nu}{C} + q \frac{\partial \nu}{\partial z} \right) - q \nu = \\ &= \Phi_x - 1 + \frac{C}{\nu} (q - \nu) \frac{\partial \nu}{\partial z} - q \nu = \Phi_x - 1 - q \nu + \frac{C}{\nu} (q - \nu) \cdot \frac{\nu}{z} = \\ &= \Phi_x - 1 - q \nu + C \frac{q - \nu}{z}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Остальные параметры течения определяются по аналогии с п. 2.1.

2.3. Пусть теперь

$$H(\nu, \nu x - z) = - \frac{\nu x - z}{a \nu^2}, \quad a > 0, \quad a = \text{const.}$$

Тогда для определения функции ν имеем уравнение

$$\frac{\partial \nu}{\partial x} + \nu \frac{\partial \nu}{\partial z} = \frac{a \nu^2}{\nu x - z}. \quad (2.3.1)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$\nu = \nu(t), \quad t = z/x. \quad (2.3.2)$$

Подставляя (2.3.2) в (2.3.1), получим

$$\dot{\nu} (\nu - t)^2 = a \nu^2. \quad (2.3.3)$$

Одно из частных решений этого уравнения можно найти в виде $\nu = ct$, где c — корень квадратного уравнения $c^2 - (2 + a)c + 1 = 0$. Это уравнение имеет два вещественных корня c_1 и c_2 , и так как $c_1 c_2 = 1$ и $c_1 + c_2 = 2 + a$, получаем $c_1 c_2 > 0$, при этом один корень меньше, а другой больше единицы: $c_1 < 1$, $c_2 > 1$.

Общее решение уравнения (2.3.3) ищем в виде $\nu = t \mu(t)$. Тогда из (2.3.3) получим уравнение для нахождения функции $\mu(t)$:

$$(\mu + t \dot{\mu}) (\mu - 1)^2 = a \mu^2. \quad (2.3.4)$$

После некоторых преобразований его можно привести к уравнению с разделяющимися переменными и представить его общее решение в виде

$$t = \frac{C}{\mu} \left(\frac{\mu - c_1}{\mu - c_2} \right)^B, \quad (2.3.5)$$

где $B = \frac{2+a}{c_2-c_1}$, C — произвольная постоянная.

Рассмотрим обтекание треугольного в плане крыла.

На поверхности крыла $L : z = \Omega x$ имеем

$$q_b = \frac{z}{x}.$$

На кромке крыла $q_b = \nu \circ = \nu(x, \Omega x)$. Если воспользоваться особым решением для функции ν при $c = c_1 < 1$, то $\nu \circ = c_1 \Omega$.

Таким образом

$$\begin{cases} q_b = \frac{z}{x}, & 0 \leq z \leq c_1 \Omega x, \\ q_b = c_1 \Omega, & c_1 \Omega x \leq z \leq \Omega x. \end{cases}$$

Так как $\Phi_z = -\nu$,

$$\Phi = -\frac{c_1}{2} \frac{z^2}{x} + \varphi(x).$$

Произвольную функцию $\varphi(x)$ найдем из условий на поверхности крыла:

$$\Phi|_L = 0 \implies \varphi(x) = \frac{c_1}{2} \Omega^2 x.$$

Следовательно

$$\Phi = \frac{c_1}{2} x \left(\Omega^2 - \frac{z^2}{x^2} \right) = \frac{c_1}{2} x \varphi(t), \quad \text{где} \quad \varphi(t) = \Omega^2 - t^2. \quad (2.3.6)$$

Для расстояния между фронтом ударной волны и поверхностью крыла имеем

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{a} \int_{q_b}^{\nu} \frac{x s - z}{s^2} ds = \frac{1}{a} x \int_{q_b}^{\nu} \frac{s - t}{s^2} ds = \frac{1}{a} x \left[\ln \frac{\nu}{q_b} + t \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{q_b} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{a} x \cdot \begin{cases} \ln c_1 + \frac{1}{c_1} - 1, & 0 \leq t \leq c_1 \Omega, \\ \ln \frac{t}{\Omega} + \frac{1}{c_1} \left(1 - \frac{t}{\Omega} \right), & c_1 \Omega \leq t \leq \Omega. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Далее для определения параметров течения следует действовать по аналогии с п. 2.1.

В заключение отметим, что во всех трех рассмотренных случаях выполняется условие присоединенности ударной волны, полученное ранее в [5].

Литература

1. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., 1959. 220 с.
2. Messiter A. E. Lift of slender delta wings according to newtonian theory // AIAA Journal. 1963. Vol. 1, № 4. P. 1032–1034.

3. Голубинский А. И., Голубкин В. Н. О пространственном обтекании тонкого крыла гиперзвуковым потоком газа // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234, № 5. С. 794–802.

4. Богатко В. И., Гриб А. А., Колтон Г. А. Пространственное обтекание тонкого крыла гиперзвуковым потоком газа // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. 1978. Вып. 2, № 7. С. 158–160.

5. Богатко В. И., Гриб А. А., Колтон Г. А. Второе приближение в теории тонкого крыла конечного размаха, обтекаемого гиперзвуковым потоком газа // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. 1979. Вып. 1, № 1. С. 87–95.

Статья поступила в редакцию 23 октября 2014 г.

Сведения об авторах

Богатко Всеволод Иванович — кандидат физико-математических наук, доцент;
aerovib@gmail.com

Колтон Гарри Абрамович — кандидат физико-математических наук, доцент;
hakolton@gmail.com

Потехина Елена Александровна — кандидат физико-математических наук, ст. науч. сотр.;
eap225@gmail.com

SEMI-INVERSE METHOD FOR THE SOLUTION OF THE THREE-DIMENSIONAL PROBLEM OF HYPERSONIC FLOW PAST A THIN WING

Vsevolod I. Bogatko¹, Garry A. Kolton², Elena A. Potekhina¹

¹ St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; aerovib@gmail.com, eap225@gmail.com

² National Mineral Resources University (University of Mines),

V. O., 21-ya liniya, 2, St. Petersburg, 199106, Russian Federation; hakolton@gmail.com

The work is devoted to the further study of spatial stationary problem of the flow past a thin wing moving at high supersonic speed. The head shock wave is attached to the wing leading edge at least at one point. In previous works of authors, the solution of the specified task for first-order corrections was reduced to the solution of integro-differential system of equations for determining two arbitrary functions and form of the shock front within the method of thin shock layer. Some particular solutions of this system are discussed in present paper. The semi-inverse method was used for solution of this system herewith a form of one of the arbitrary functions was given instead of a wing surface form. The particular form of the streamlined wing was determined in the construction solution process. The formulas to determine the distance between a shock wave and a surface of a wing and surface shape streamlined body were found. Also a formula for the pressure distribution on the surface of the wing was obtained. Separately the case of triangular wing was considered. Refs 5. Figs 4.

Keywords: differential equations in partial derivatives, flows past bodies, hypersonic flow, thin shock layer.

References

1. Chernyi G. G., “Gas flows with a high supersonic velocity” (Moscow, Fizmatgiz, 1959) [in Russian].
2. Messiter A. E., “Lift of slender delta wings according to newtonian theory”, *AIAA Journal* **1**(4), 1032–1034 (1963).
3. Golubinskii A. I., Golubkin V. N., “About spatial hypersonic flow past a thin wing”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **234**, 794–802 (1977).
4. Bogatko V. I., Grib A. A., Kolton G. A., “Three dimensional hypersonic gas flow past the thin wing”, *Vestn. Leningr. Univ. Ser. 1* Issue 2, 158–160 (1978) [in Russian].
5. Bogatko V. I., Grib A. A., Kolton G. A., “The second approximation in the theory of a thin wing of finite span, streamlined a hypersonic gas flow”, *Vestn. Leningr. Univ. Ser. 1* Issue 1, 87–95 (1979) [in Russian].