

ОСОБЕННОСТИ ЛОКАЛИЗАЦИИ В БАЛКЕ БЕРНУЛЛИ—ЭЙЛЕРА НА НЕОДНОРОДНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ*

Д. А. Индейцев¹, Т. С. Куклин², Ю. А. Мочалова²

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

² Институт проблем машиноведения РАН,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

Работа связана с явлением локализации в одномерных конструкциях конечной и бесконечной длины, лежащих на неоднородном основании. На примере бесконечной балки, поджатой силой, исследовалась возможность локализации колебаний в области дефекта основания и особенности потери устойчивости конструкции в этом случае. Показано, что существование локализованных мод (trapped modes) связано с возникновением, наряду с непрерывным спектром, точного (дискретного) спектра, лежащего ниже частоты отсечки конструкции. Получена зависимость локализованных дискретных частот от сжимающей силы. Стремление к нулю первой дискретной частоты при увеличении силы определяет локализованную форму потери устойчивости и критическую силу, которые совпадают с решением соответствующей статической задачи. Результаты работы сравнивались с результатами, полученными для систем конечных размеров. Библиогр. 9 назв. Ил. 8.

Ключевые слова: локализация, упругое основание, потеря устойчивости, частота отсечки.

1. Введение. Неограниченность какого-либо из размеров тела приводит к существованию непрерывного спектра собственных частот, в отличие от дискретного спектра у тел конечных размеров. В данной работе мы ограничимся рассмотрением бесконечной балки Бернулли—Эйлера, покоящейся на упругом основании и поджатой силой P . Если жесткость упругого основания постоянна, то потеря устойчивости такой балки при увеличении силы равносильна обращению в ноль групповой скорости изгибной волны в нижней точки непрерывного спектра [1]. Это подтверждает известную аналогию между динамическим и статическим подходами при исследовании устойчивости для однородных балок бесконечной длины [2]. Существование в упругом основании дефекта, например финитной области отслоения или области с меньшим значением жесткости упругого основания, может приводить к появлению наряду с непрерывным спектром дискретного спектра собственных частот [3]. Под локализованной формой, соответствующей дискретной частоте, будем понимать форму, сосредоточенную вблизи неоднородности упругого основания и имеющую ограниченную энергию. Математически существование локализованных мод эквивалентно наличию как непрерывного, так и дискретного спектра собственных значений соответствующих краевых задач.

Остается открытым вопрос о существовании связи между локализованной формой потери устойчивости в области дефекта, соответствующего области дефекта основания, и локализованной формой колебаний, соответствующей нижней частоте дискретного спектра собственных частот колебаний. Естественно полагать, что дискретный спектр, располагающийся ниже границы непрерывного, при наличии силы P также будет смещаться к нулю. Обращение первой (нижней) частоты колебаний в ноль должно определить в первую очередь локализованную форму потери устойчивости в области неоднородности упругого основания. Сравнение полученного результата со статическим решением позволяет ответить на поставленный вопрос.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00349).

В последние годы наблюдается повышение интереса к исследованию явления локализации в задачах о потере устойчивости протяженных конструкций (см. [4, 5] и ссылки к ним). Эти задачи возникают в самых разных областях механики, начиная от традиционной строительной механики [4, 6] и заканчивая теорией тонких пленок и композитных материалов [7, 8]. Обычно локализацию связывают с возникновением точек возврата, при которых характерные показатели меняются от мнимых к вещественным и комплексно-сопряженным, что, в свою очередь, вызвано неоднородностью (дефектом) винклеровского основания [4]. Влияние неоднородности основания (рассматривается как линейное, так и нелинейное основание) на локализованную потерю устойчивости в статических задачах проанализировано в работе [5]. В работе [4] указывается на математическую аналогию статических задач о локальной потере устойчивости конструкции и динамических задач о существовании локализованных форм колебаний конструкции. Но связь между двумя этими явлениями остается не исследованной. Цель данной работы продемонстрировать, что именно существование локализованного решения динамической задачи, вызванного ослаблением жесткости основания, приводит к локальной потере устойчивости в статике и, кроме того, проанализировать влияние длины конструкции на локализацию.

2. Постановка задачи. Будем рассматривать бесконечную балку погонной плотности ρ и жесткости на изгиб EI , покоящуюся на неоднородном упругом основании жесткости $k(x)$. Предположим, что балка находится под действием продольной сжимающей нагрузки P . Дифференциальное уравнение, описывающее динамику поведения балки на упругом основании, имеет вид

$$\rho \ddot{w} + EI w'''' + P w'' + k(x) w = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (1)$$

Пусть упругое основание имеет дефект — включение длиной $2l$ и жесткостью k_1 , и пусть жесткость упругого основания балки может быть записана в следующем виде: $k(x) = k_0 - (k_0 - k_1)[H(x+l) - H(x-l)]$.

3. Установившиеся колебания балки на неоднородном упругом основании. Локализованные моды. Для определения явления локализации рассмотрим сначала свободные колебания балки ($P = 0$) на неоднородном упругом основании, которые описываются следующим дифференциальным уравнением:

$$\rho EI w'''' + (k(x) - \rho \omega^2) w = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

Здесь ω — частота свободных колебаний и при $|x| \rightarrow \infty$ прогиб балки $w(x)$ стремится к нулю.

Под локализованным решением спектральной задачи (2) будем понимать собственную форму колебаний $w(x)$, удовлетворяющую (2) и экспоненциально убывающую при $|x| \rightarrow \infty$. Спектральная задача (2) рассматривалась в работе [3] и было показано, что

(а) при $\omega > \omega_{b0}$, $\omega_{b0} = \sqrt{k_0/\rho}$ — частота отсечки балки, начинается непрерывный спектр частот, которому соответствуют бегущие моды колебаний;

(б) при $\omega < \omega_{b0}$ дискретный спектр собственных частот существует, если частота отсечки включения $\omega_1 = \sqrt{k_1/\rho}$ меньше частоты отсечки балки (или, что то же самое, жесткость основания включения меньше жесткости основания самой балки, $k_1 < k_0$). Соответствующие этим частотам моды — стоячие волны, локализованные в области неоднородности основания.

Вопросы о числе собственных частот, лежащих до частоты отсечки, и их зависимости от длины неоднородности основания не были исследованы в [3]. Найдем

уравнение для определения собственных частот и проведем его анализ. Для этого рассмотрим сначала симметричные относительно $x = 0$ формы колебаний балки. Как и в [3], собственные формы в области частот $\omega < \omega_b$ будем искать в виде

$$w_i^s = \begin{cases} A \cos \gamma_1 x + B \operatorname{ch} \gamma_1 x, & x < l, \\ e^{-\gamma_0(x-l)} (C \cos \gamma_1 x + D \sin \gamma_1 x), & x > l, \end{cases} \quad (3)$$

где $\gamma_1 = [\rho(\omega^2 - \omega_1^2)/EJ]^{1/4}$, $\gamma_0 = [\rho(\omega_b^2 - \omega^2)/EJ]^{1/4}$. Используя условие сопряжения участков балки (прогиб $w(x)$ вместе с тремя производными непрерывен в точке $x = l$), получим систему уравнений для определения коэффициентов формы колебаний. Приравнявая определитель этой системы нулю, найдем следующее уравнение для определения собственных частот:

$$\operatorname{tg} \gamma z = \frac{[4\nu^2(\nu^2 + 1) - 1] \operatorname{th} \gamma z + 8\nu^3}{4\nu \operatorname{th} \gamma z - 4\nu^2(\nu^2 - 1) + 1}. \quad (4)$$

Аналогично получается частотное уравнение для асимметричных форм колебаний, которое имеет вид

$$\operatorname{ctg} \gamma z = -\frac{[4\nu^2(\nu^2 + 1) - 1] \operatorname{cth} \gamma z + 8\nu^3}{4\nu \operatorname{cth} \gamma z - 4\nu^2(\nu^2 - 1) + 1}. \quad (5)$$

Здесь введены следующие безразмерные параметры:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_b}, \quad \Omega_{b1} = \frac{\omega_{b1}}{\omega_b}, \quad z = l \sqrt[4]{\frac{k_0}{EI}}, \quad \gamma = \sqrt[4]{\Omega^2 - \Omega_{b1}^2}, \quad \nu = \sqrt[4]{\frac{1 - \Omega^2}{4(\Omega^2 - \Omega_{b1}^2)}}.$$

Решения уравнений (4) и (5) определяют дискретный спектр частот, лежащий ниже частоты отсечки $\Omega_{b1} < \Omega < 1$. Этим частотам соответствуют локализованные моды колебаний. Число собственных частот зависит от величины параметра z и соотношения жесткостей k_1/k_0 .

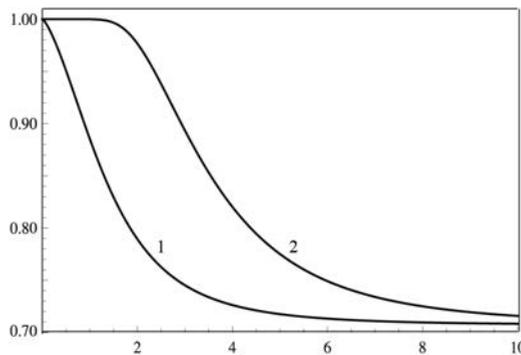


Рис. 1. Зависимость собственных частот от длины включения при $k_1/k_0 = 0.5$.

В зависимости от значения параметра z , который определяет длину зоны дефекта, уравнения (4) и (5) могут иметь различное число корней. При достаточно малых z уравнение (5) не имеет корней и спектральная задача (1) имеет единственную собственную частоту Ω_1^s , которой соответствует симметричная локализованная форма.

При увеличении значения z появляется вторая частота Ω_2^{as} , корень уравнения (5), которой соответствует асимметричная форма, и так далее. Порядок расположения дискретных собственных частот определяется следующим неравенством:

$$\Omega_{b1} < \Omega_1^s < \Omega_2^{as} < \dots < \Omega_i^s < \Omega_{i+1}^{as} < \dots < 1.$$

Определим значения параметра z , при которых появляются новые формы колебаний. При увеличении z гиперболические тангенс и котангенс достаточно быстро стремятся к единице, поэтому уравнения (4) и (5) можно упростить и записать в виде

$$\operatorname{tg}z\gamma = f(\Omega), \quad \operatorname{ctg}z\gamma = -f(\Omega), \quad f(\Omega) = \frac{2\nu^2 + 2\nu - 1}{-2\nu^2 + 2\nu + 1}. \quad (6)$$

Тогда длина включения, при которой возникают новые симметричные и асимметричные локализованные формы колебаний определяется из уравнений (6), если положить частоту равной частоте отсечки балки. Первая симметричная мода существует всегда, асимметричные формы появляются при $z = \pi(4i - 3)/4\sqrt[4]{1 - \Omega_{b1}}$, симметричные при $z = \pi(4i - 1)/4\sqrt[4]{1 - \Omega_{b1}}$, $i = 1, \dots, N$.

На рис. 1 построена зависимость первой (симметричной) и второй (асимметричной) собственных частот от длины дефекта для $k_1/k_0 = 0.5$.

Для включения длины $z = 10$ и жесткости $\Omega_{b1} = \sqrt{0.5}$ существует шесть корней уравнений (4), (5) и соответственно шесть локализованных форм. Первые четыре построены на рис. 2. Штриховой линией выделена зона включения. Как видно, формы локализованы вблизи включения и быстро затухают при удалении от него.

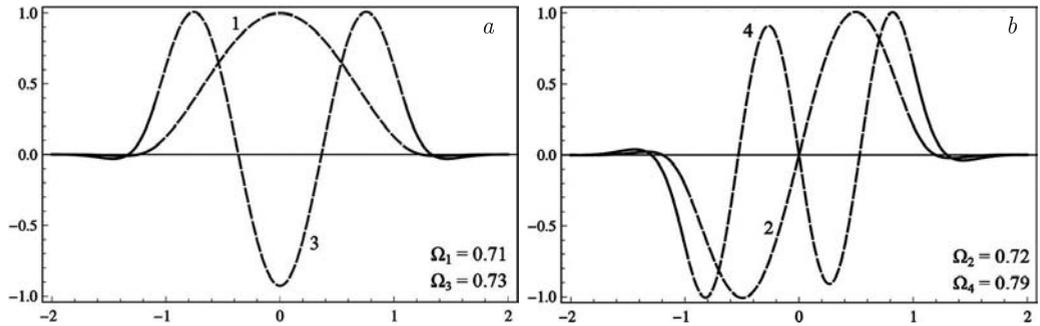


Рис. 2. Локализованные формы колебаний ($k_1/k_0 = 0.5$): a — симметричные моды, b — асимметричные.

Замечание. Остается открытым вопрос, как изменятся полученные результаты при переменной жесткости основания дефекта. Если жесткость основания включения $k_1(x)$ меньше k_0 или, более точно, $\int_{-l}^l (k_0 - k_1(x)) dx > 0$, то будет существовать дискретный спектр собственных частот, лежащий ниже частоты отсечки балки. Для определения значений собственных частот в этом случае может быть использован метод ВКБ [4].

4. Локализованные формы колебаний балки, поджатой силой P . Вернемся к исходной задаче (1) о колебаниях балки, поджатой силой P :

$$EIw'''' + Pw'' + [k(x) - \rho\omega^2]w = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (7)$$

При $|x| \rightarrow \infty$ прогиб балки $w(x)$ стремится к нулю. С помощью преобразования Фурье спектральную задачу (7) можно свести к интегральному уравнению для определения $w(x)$:

$$w(x) = (k_0 - k_1) \int_{-l}^l G(|x - \xi|, \omega) w(\xi) d\xi. \quad (8)$$

Здесь $G(x, \omega)$ — функция Грина балки, поджатой силой P :

$$G(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\kappa x}}{EI\kappa^4 - P\kappa^2 + k - m\omega^2} d\kappa. \quad (9)$$

Прежде чем перейти к определению функции Грина, проанализируем дисперсионное соотношение, стоящее в знаменателе подынтегральной функции, которое может быть записано в виде

$$\omega^2 = (k_0 - P\kappa^2 + EI\kappa^4)/\rho. \quad (10)$$

Дисперсионная кривая имеет минимум в точке $\kappa_p = \sqrt{P/2EI}$, $\omega_p = \omega_{b0} \sqrt{1 - P^2/P_e^2}$ [1]. Здесь $P_e = 2\sqrt{k_0 EJ}$ — сила Эйлера, при которой теряет устойчивость однородная бесконечная балка, лежащая на упругом основании k_0 . Таким образом, непрерывный спектр начинается не с частоты отсечки балки ω_{b0} , а с частоты $\omega_p < \omega_{b0}$, величина которой зависит от силы P . Появление локализованных колебаний возможно только в области $\omega < \omega_p$. Вычисляя в этой области несобственный интеграл (9) с помощью теоремы о вычетах, получим следующее выражение для функции Грина:

$$G(|x|, \omega) = \frac{\mu}{k} \frac{e^{-b|x|} \cos(a|x| - \varphi/2)}{\sqrt[4]{1 - \Omega^2} \sqrt{1 - \Omega^2 - \bar{p}^2}}, \quad (11)$$

$$a = \kappa(\sqrt{1 - \Omega^2} + \bar{p}), \quad b = \kappa(\sqrt{1 - \Omega^2} - \bar{p}), \quad \varphi = \arctan \frac{1}{\bar{p}} \sqrt{1 - \Omega^2 - \bar{p}^2}.$$

Здесь $\bar{p} = P/P_e$, $\mu = \sqrt[4]{k/4EI}$. Подставляя (11) в (8), получим интегральное уравнение для определения собственных форм и частот в области $\Omega < \Omega_p$, $\Omega_p = \sqrt{1 - p^2}$. Используя метод, предложенный в [3] (смотри п. 2.2), из этого интегрального уравнения можно получить выражение для для нижней границы дискретного спектра, которая определяется как $\Omega_{p1} = \sqrt{\Omega_{b1}^2 - \bar{p}^2}$. Итак, дискретный спектр и соответствующие ему локализованные формы колебаний возникают в диапазоне частот $\Omega_{p1} < \Omega < \Omega_p$, который зависит от силы \bar{p} .

4.1. Статическая потеря устойчивости балки на неоднородном упругом основании. Рассмотрим сначала задачу о статической потере устойчивости балки: положим $\omega = 0$ в уравнении (7). Анализ интегрального уравнения (8) в этом случае показывает, что критическая сила p , при которой балка на неоднородном основании теряет устойчивость, всегда больше силы Эйлера, соответствующей балке с упругим основанием k_1 , а именно $p_1 < p < 1$, $p_1 = \sqrt{k_1/k_0}$. Заметим, что здесь и далее черта над безразмерной силой p опускается.

Будем искать локализованную форму потери устойчивости балки с помощью метода, предложенного в п. 2, а именно разделяем решение на симметричную и асимметричную часть. Используя условия сопряжения, получаем систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов форм потери устойчивости. Для того чтобы существовало нетривиальное решение задачи, определитель этой системы должен обращаться в ноль. Вычисляя определитель и приравнявая его нулю,

получим трансцендентные уравнения для определения критической силы, которые не приводим здесь в силу их громоздкости.

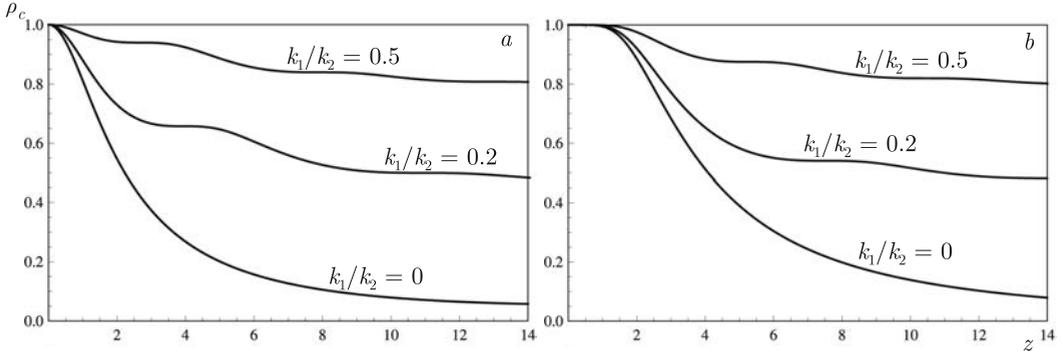


Рис. 3. Зависимость критической силы от длины включения.

Для двух первых (симметричной и асимметричной) форм потери устойчивости зависимость минимальной критической силы от параметра z для разных значений k_1/k_0 представлена на рис. 3, *a* и *b* соответственно. При малых z критическая сила p близка к единице, то есть к силе Эйлера, при которой теряет устойчивость бесконечная балка на однородном упругом основании k_0 . При увеличении длины области дефекта основания z значение критической силы уменьшается, и при больших z критическая сила стремится к силе Эйлера балки на упругом основании k_1 . Характерной особенностью кривых $p_c^s(z)$ и $p_c^{as}(z)$ является наличие «ступеней» — зон, где при увеличении длины области дефекта критическая сила остается постоянной (при $k_1 \neq 0$). Отметим, что в центре каждой «ступени» происходит перестройка на новую форму потери устойчивости.

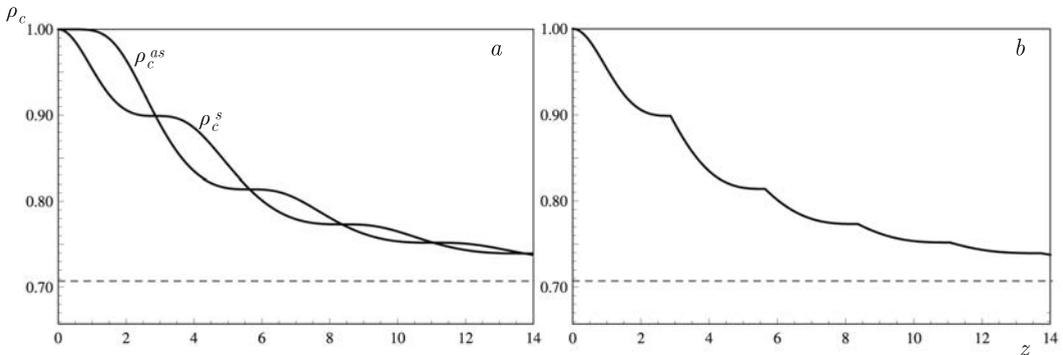


Рис. 4. Зависимость $p_c(z)$ при $k_1/k_0 = 0.5$.

На рис. 4, *a* представлены две кривые $p_c^s(z)$, $p_c^{as}(z)$ при $k_1/k_0 = 0.5$. Кривые асимптотически стремятся к значению критической силы Эйлера, соответствующей упругому основанию k_1 (штриховая линия). Они пересекаются в точках, которые являются серединами «ступеней» для кривых $p_c^s(z)$ и $p_c^{as}(z)$. Таким образом, в зависимости от длины включения теряет устойчивость либо симметричная форма, либо асимметричная, т. е. с увеличением зоны дефекта происходит перестройка формы потери устойчивости. Из этого следует, что рассматривая потерю устойчивости балки с

включением в общем случае, мы получим чередование симметричных и асимметричных форм потери устойчивости. Первая симметричная, затем первая асимметричная, затем вторая симметричная и т. д. Для построения $p_c(z)$ необходимо взять минимум из двух кривых на рис. 4, *a*. Кривая $p_c(z)$ представлена на рис. 4, *b* и имеет точки разрыва первой производной. В этих точках происходит переход на новую форму потери устойчивости. Для нашего примера для включения длины $z = 1$ минимальной критической силе будет соответствовать первая симметричная форма, для длины 3 — вторая, для 5 — третья и так далее. Четыре формы потери устойчивости балки Бернулли—Эйлера для различных значений z изображены на рис. 5, где штрихом выделена зона включения.

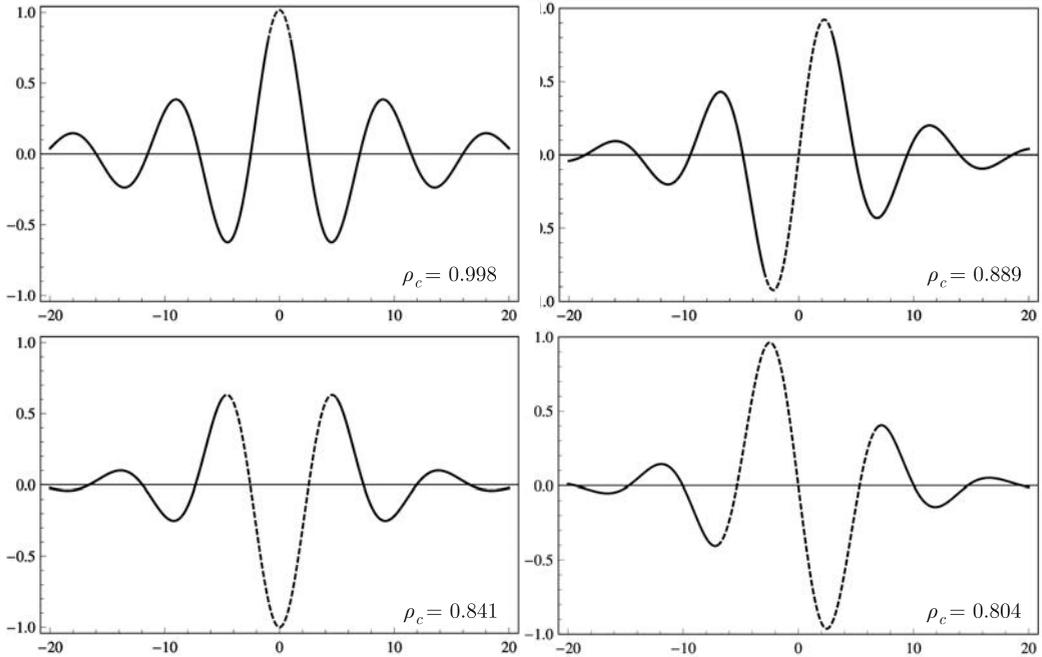


Рис. 5. Локализованные формы потери устойчивости, построенные для различных длин $z = 1, 3, 5, 7$ и $k_1/k_0 = 0.5$.

Проведем аналогию с балкой конечной длины. Рассмотрим потерю устойчивости поджатой балки Бернулли—Эйлера на упругом основании конечной длины z , шарнирно опертой по краям [9]. Выражение для определения критической силы имеет вид

$$\sin z \left[p - \sqrt{p^2 - 1} \right]^{1/2} \sin z \left[p + \sqrt{p^2 - 1} \right]^{1/2} = 0. \quad (12)$$

Зависимость критической силы от длины балки z , определяемая уравнением (12), представлена на рис. 6, *a*. Кривая состоит из частей парабол, в точке пересечения которых происходит переход на следующую форму потери устойчивости. Таким образом, в отличие от свободно прогибающейся балки, форма потери устойчивости балки на упругом основании может состоять из нескольких полуволн синусоиды, число которых определяется длиной балки [9]. Заметим, что особенностью поведения критической силы является наличие участков возрастания критической силы при уве-

личении длины включения. Это следствие наличия упругого основания и отсутствия изгибающего момента на краях балки.

Теперь рассмотрим балку, концы которой жестко закреплены. Уравнение для определения критической силы в этом случае имеет вид

$$\cos \mu z \cos \nu z + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\nu} + \frac{\nu}{\mu} \right) \sin \mu z \sin \nu z = 1, \quad (13)$$

где $\nu = (p - \sqrt{p^2 - 1})^{1/2}$ и $\mu = (p + \sqrt{p^2 - 1})^{1/2}$. График зависимости критической силы от длины балки приведен на рис. 6, *b*. Кривая состоит из монотонных участков, где в точках разрыва первой производной происходит переход на новую форму потери устойчивости.

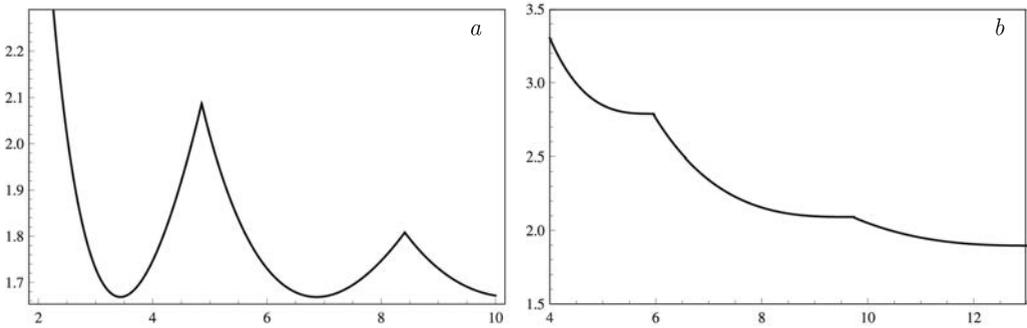


Рис. 6. Зависимость критической силы от длины балки для разных граничных условий: *a* — шарнирное закрепление, *b* — жесткая заделка.

Сравним рис. 4, *b* и рис. 6. Видно, что поведение $p(z)$ на рис. 4, *b* аналогично поведению $p(z)$ для балок конечных размеров (рис. 6, *a* и *b*). Таким образом, при локальной потере устойчивости бесконечная балка на упругом основании с включением конечной длины $2z$ ($k_1 < k_0$) ведет себя как конструкция конечной длины, а именно балка длины $2z$ на упругом основании k_1 со специальными граничными условиями.

Для определения критической силы был использован статистический критерий, то есть исследовано, при каких условиях наряду с начальным состоянием равновесия бесконечной балки на упругом основании возникают соседние, новые равновесные формы. Обратимся теперь к динамическому критерию потери устойчивости. Рассмотрим колебания балки, вызванные малыми возмущениями начального равновесного состояния, и покажем, что сила p достигает своего критического значения, когда частота собственных колебаний обращается в нуль.

4.2. Динамическая задача. Для определения собственных частот будем использовать метод, предложенный в п. 3 и п. 4.1, а именно получим уравнения для определения частот для симметричных и асимметричных форм колебаний. Рассмотрим сначала случай, когда $k_1 = 0$. В этом случае из статического решения задачи известно, что для любых значений z устойчивость теряет первая симметричная форма. Зависимость $\Omega(p)$ представлена на рис. 7. Графики построены для трех разных длин включения. Чем больше длина области отслоения, тем меньше жесткость конструкции и собственная частота меньше. Кривая $\Omega = \Omega^*(p)$ построена для однородной балки, она показывает, как нижняя точка непрерывного спектра стремится к нулю. При любой длине включения и любых параметрах задачи дискретная частота обращается в ноль при силе, меньшей, чем сила Эйлера. Это говорит о том, что происходит

локальная потеря устойчивости. Заметим, что полученные здесь значения критической силы совпадают со значениями, полученными при решении соответствующей статической задачи. Например, при $z = 0.7$ критическая сила, при которой конструкция теряет устойчивость, $p_c = 0.89$. Тот же результат мы получаем, положив $k_1 = 0$ в задаче о симметричных колебаниях в части 4.1.

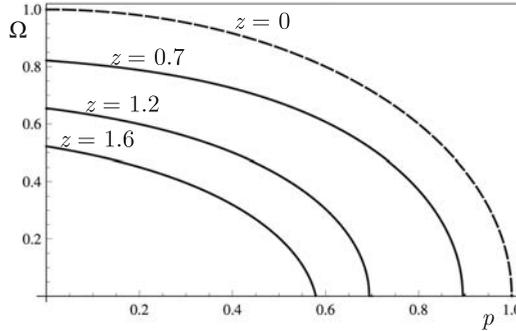


Рис. 7. Зависимость собственных частот от силы p при $k_1 = 0$.

При $k_1 \neq 0$ ситуация усложняется. Как известно из решения статической задачи, форма потери устойчивости зависит от длины области дефекта z . Чтобы понять, как происходит потеря устойчивости в динамической задаче (7), проанализируем зависимость собственных частот колебаний от p . Результаты численного анализа представлены на рис. 8. На рисунке 8, *a* построены кривые $\Omega(p)$ при $z = 2.1$ и $k_1/k_0 = 0.5$. В этом случае существуют две частоты дискретного спектра и соответствующие им симметричная и асимметричная локализованные моды колебаний. Частота, соответствующая симметричной локализованной моде, при увеличении значения p первая обращается в ноль и в этом случае первой теряет устойчивость симметричная форма. На рис. 8, *b* кривые $\Omega(p)$ построены для $z = 4$. Как видно из графика, потеря устойчивости наступает, когда при увеличении силы вторая собственная частота (штриховая линия) обращается в ноль, и форма потери устойчивости — вторая (асимметричная) локализованная форма. Этот полностью совпадает с результатом, полученным в задаче о статической потере устойчивости. Отметим, что значения частот при нулевой силе поджатия точно совпадают со значениями, полученными при решении соответствующей спектральной задачи (п. 3).

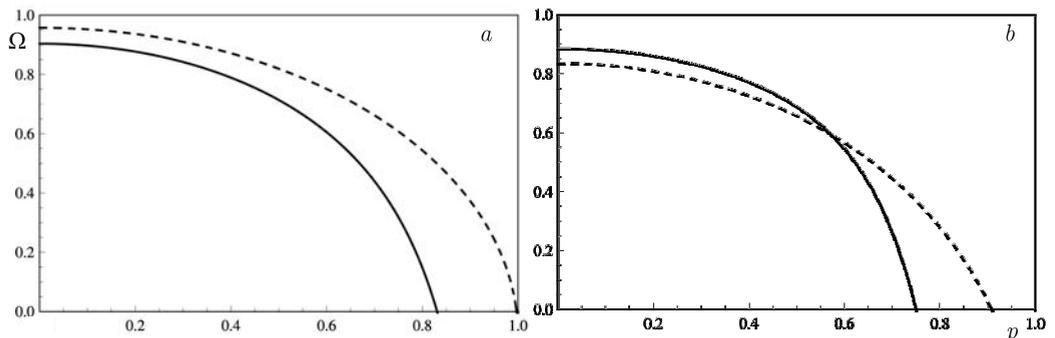


Рис. 8. Зависимость собственных частот от силы p при $k_1/k_0 = 0.5$: *a* — $z = 2.1$, *b* — $z = 4$.

5. Заключение. В работе на примере бесконечной балки, поджатой силой P , была исследована возможность локализации колебаний в области дефекта основания и особенности потери устойчивости конструкции в этом случае. Показано, что существование локализованных мод связано с возникновением, наряду с непрерывным спектром, точечного (дискретного) спектра, лежащего ниже частоты отсечки конструкции. Получена зависимость локализованных дискретных частот от силы поджатия. Стремление к нулю первой дискретной частоты при увеличении силы определяет локализованную форму потери устойчивости и критическую силу, которые совпадают с решением соответствующей статической задачи. Результаты работы сравнивались с результатами, полученными для систем конечных размеров.

Литература

1. Нелинейные волны / под ред. С. Лейбовича, А. Сибаса. М: Изд-во Мир, 1974.
2. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1961.
3. Индейцев Д. А., Кузнецов Н. Г., Мотыгин О. В., Мочалова Ю. А. Локализация линейных волн. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та. 2007.
4. Luongo A. Mode localization in dynamics and buckling of linear imperfect continuous structures // *Nonlinear Dynamics*. 2001. Vol. 25. P. 133–156.
5. Coman C. D. Inhomogeneities and localised buckling patterns // *IMA J. of Applied Mathematics*. 2006. Vol. 71. P. 133–152.
6. Кургузов В. Д. Моделирование отслоения тонких пленок при сжатии // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2014. Т. 7, № 1. С. 91–99.
7. Hunt G. W., Wade M. A. Localization and mode interaction in sandwich structures // *Proc. R. Soc. Lond.* 1998. P. 1197–1216.
8. Wade M. A. Localized buckling in sandwich struts with pre-existing delaminations and geometrical imperfections // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2002. Vol. 50. P. 1767–1787.
9. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Физматлит, 1967.

Статья поступила в редакцию 23 октября 2014 г.

Сведения об авторах

Индейцев Дмитрий Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН; dmitry.indeitsev@gmail.com

Куклин Тимофей Сергеевич — аспирант; kuklints@gmail.com

Мочалова Юлия Алексеевна — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник; yumochalova@yandex.ru

LOCALIZATION IN BERNOULLI—EULER BEAM ON INHOMOGENEOUS ELASTIC FOUNDATION

Dmitry A. Indeitsev¹, Timofey S. Kuklin², Yulia A. Mochalova²

¹ St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; dmitry.indeitsev@gmail.com

² Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS, Bolshoy pr. V. O., 61, St. Petersburg, 199178, Russian Federation; kuklints@gmail.com, yumochalova@yandex.ru

The study concerns localization phenomenon in continuous structures of finite and infinite length. For a compressed infinite Bernoulli—Euler beam on a inhomogeneous elastic foundation it is shown that the existence of localization modes is due to a point spectrum of the corresponding boundary value problem. Similarity between buckling of the compressed beam and the localized modes of oscillations is analyzed. Dependence of localized point frequencies on the compressive load is shown. Setting the fundamental frequency to zero, one defines the localized buckling mode and the critical load, whose value is the same as that found in the static problem. Refs 9. Figs 8.

Keywords: localization, buckling, elastic foundation, cut-off frequency.

References

1. Leibovich S., Seebass A. R., *Nonlinear Waves* (Cornell Univ. Press, Ithaca, 1974; Mir, Moscow, 1977).
2. Bolotin V. V., *Non-conservative Problems of the Elastic Stability Theory* (Fizmatlit, Moscow, 1961) [in Russian].
3. Indeitsev D. A., Kuznetsov N. G., Motygin O. B., Mochalova Yu. A., *Localization of Linear Waves* (St. Petersburg Univ., St. Petersburg, Russia, 2007) [in Russian].
4. Luongo A., "Mode localization in dynamics and buckling of linear imperfect continuous structures", *Nonlinear Dyn.* **25**, 133–156 (2001).
5. Coman C. D., "Inhomogeneities and localised buckling patterns", *IMA J. Appl. Math.* **71**, 133–152 (2006).
6. Kurguzov V. D., "Simulation of thin films delamination under compression", *Vychisl. Mekh. Sploshnykh Sred* **7**, 91–99 (2014) [in Russian].
7. Hunt G. W., Wadee M. A., "Localization and mode interaction in sandwich structures", *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **454**, 1197–1216 (1998).
8. Wadee M. A., "Localized buckling in sandwich struts with pre existing delaminations and geometrical imperfections", *J. Mec. Phys. Solids* **50**, 1767–1787 (2002).
9. Vol'mir A. S., *Stability of Deformable Systems* (Fizmatlit, Moscow, 1967) [in Russian].

ХРОНИКА

26 ноября 2014 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме Ученых РАН выступил кандидат физ.-мат. наук, доцент В. Г. Быков (Санкт-Петербургский государственный университет) с докладом на тему «Устойчивость псевдорегулярной прецессии неуравновешенного ротора при ограниченном возбуждении».

Краткое содержание доклада:

Рассматриваются прецессионные движения гибкого неуравновешенного ротора под действием постоянного внешнего вращающего момента при учете сил внешнего сопротивления и внутреннего трения в вале. Показано, что в зависимости от величины вращающего момента и параметров системы движение центра масс ротора может иметь характер как регулярной, так и псевдорегулярной прецессии. Построена приближенная система уравнений относительно средней угловой скорости собственного вращения ротора и средних значений амплитуды и угловой скорости прецессионного движения и на ее основе выведены аналитические формулы условий существования и устойчивости псевдорегулярной прецессии.