МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

БИФУРКАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА С НЕЛИНЕЙНОЙ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ СИЛОЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА*

Ю. Н. Бибиков, В. А. Плисс

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Рассматриваются малые периодические возмущения осциллятора $\ddot{x} + x^3 + ax\dot{x} = 0$, где $a^2 < 8$. Малость возмущения определяется как малостью окрестности положения равновесия $x = 0$, так и наличием малого положительного параметра.

Указываются условия, при выполнении которых при переходе малого параметра через нулевое значение от положения равновесия ответвляется инвариантный двумерный тор (в автономном случае предельный цикл). Библиогр. 4 назв.

Ключевые слова: бифуркация, инвариантный тор.

§ 0. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + x^3 + ax\dot{x} = X(x, \dot{x}, t, \varepsilon), \tag{1}$$

где $X(x, y, t, \varepsilon)$ — достаточно гладкая по x, y, ε в окрестности точки $(0, 0, 0)$ функция, непрерывная и периодическая по t с периодом T (в частности, от t не зависящая), ε — малый положительный параметр, a — постоянная, $a^2 < 8$.

Предположим, что порядок малости функции X по $x, \dot{x}, \varepsilon$ не ниже четвертого, если, приписывая переменной x первое измерение, приписать переменным y, ε второе измерение. Пусть, кроме того, $X(0, 0, \varepsilon) = 0$ при всех допустимых ε. Тем самым X можно рассматривать как малое возмущение уравнения

$$\ddot{x} + x^3 + ax\dot{x} = 0, \tag{2}$$

сохраняющее положение равновесия $x = 0$.

Вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения (1) рассматривался в автономном случае еще А. М. Ляпуновым [1]. В работе [2] результаты А. М. Ляпунова были обобщены на случай периодического по t возмущения X.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 13-01-00439, 13-01-00624) и СПбГУ (тема 6.0.112.2010).

В настоящей работе рассматривается вопрос о бифуркации положения равновесия $x = 0$ с ответвлением при переходе малого параметра ε через нулевое значение инвариантного двумерного тора (в автономном случае предельного цикла).

Случай $a = 0$ рассмотрен в работе [3].

§ 1. Введение обобщенных полярных координат. Уравнение (2) эквивалентно системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x^3 - axy, \tag{3}$$

траектории которой определяются дифференциальным уравнением

$$ydy + (x^3 + axy)dx = 0.$$

Интегрируя это уравнение подстановкой $y = zx^2$, находим

$$2y^2 + ax^2y + x^4 = A\exp\left\{\frac{a}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{arctg}\frac{4y + ax^2}{x^2\sqrt{\Delta}}\right\}, \tag{4}$$

где A — произвольная положительная постоянная, $\Delta = 8 - a^2 > 0$. Так как равенство (4) нечетно по отношению к переменной x, для системы (3) начало координат является центром. Следовательно, уравнение (2) — осциллятор.

Введем в рассмотрение функции $C(\varphi)$, $S(\varphi)$, удовлетворяющие системе (3) с независимой переменной φ. Тогда

$$C' = S, \quad S' = -aCS - C^3. \tag{5}$$

В силу (4) имеет место интегральное тождество

$$2S^2 + aC^2S + C^4 = B(C, S), \tag{6}$$

где $B = \exp\left\{\frac{a}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{arctg}\frac{4S+aC^2}{C^2\sqrt{\Delta}}\right\}$.

Положим $S(0) = 0$. Тогда $C(0) = \exp\left\{\frac{a}{4\sqrt{\Delta}}\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{\Delta}}\right\}$. Функции $C(\varphi)$, $S(\varphi)$ — периодические, период которых обозначим через 2ω.

В системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x^3 - axy + X(x, y, t, \varepsilon), \tag{7}$$

эквивалентной уравнению (1), введем обобщенные полярные координаты r, φ по формулам

$$x = rC(\varphi), \quad y = r^2S(\varphi). \tag{8}$$

Используя (5) и (6), получим систему

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{SX(rC, r^2S, t, \varepsilon)}{r(2S^2 + aC^2S + C^4)} \equiv R(r, \varphi, t, \varepsilon), \\ \dot{\varphi} = r - \dfrac{CX(rC, r^2S, t, \varepsilon)}{r^2(2S^2 + C^2S + C^4)} \equiv r - \Phi(r, \varphi, t, \varepsilon). \end{cases} \tag{9}$$

К системе (9) можно применить метод неопределенных коэффициентов в том виде, как он использовался в работе [3].

§ 2. Существование инвариантного тора при $\varepsilon > 0$. Представим возмущение X в виде

$$X = a_1(t)x^4 + a_2(t)x^2\dot{x} + a_3(t)\dot{x}^2 + \varepsilon b_1(t)x^2 + \varepsilon b_2(t)\dot{x} + X^*, \tag{10}$$

где порядок малости X^* в указанном выше смысле не ниже пятого, $a_i(t)$, $b_j(t)$ — периодические функции (в частности, постоянные), $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$.

Соответственно, в системе (9)

$$\begin{aligned} R &= P(\varphi, t)r^3 + \varepsilon Q(\varphi, t)r + O(r^4 + \varepsilon r^2 + \varepsilon^2 r), \\ \Phi &= \Phi_1(\varphi, t, r) + \varepsilon\Phi^*(\varphi, t, r, \varepsilon) + r^{-1}\varepsilon^2 q(\varphi, t, \varepsilon), \end{aligned} \tag{11}$$

где $\Phi_1 = O(r^2)$, Φ^* не имеет особенности по r, ε.

В силу (10)

$$\begin{aligned} P &= \left(a_1C^4S + a_2C^2S^2 + a_3S^3\right)\left(2S^2 + aC^2S + C^4\right)^{-1}, \\ Q &= \left(b_1C^2S + b_2S^2\right)\left(2S^2 + aC^2S + C^4\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Положим в (9)

$$r = \sqrt{\varepsilon}(\alpha + z), \ \alpha > 0, \ |z| < \alpha. \tag{13}$$

Получим систему вида

$$\begin{cases} \dot{z} = \varepsilon Z_1(\varphi, t) + \varepsilon z Z_2(\varphi, t) + O\left(\varepsilon z^2 + \varepsilon^{3/2}\right), \\ \dot{\varphi} = \sqrt{\varepsilon}\alpha + \varepsilon\Delta(\varphi, t) + O\left(\sqrt{\varepsilon}z + \varepsilon^{3/2}\right), \end{cases} \tag{14}$$

где

$$Z_1 = \alpha^3 P + \alpha Q, \quad Z_2 = 3\alpha^2 P + Q. \tag{15}$$

Лемма 1. *Существует замена*

$$z = w\left(1 + \sqrt{\varepsilon}g_1(\varphi) + \varepsilon g_2(\varphi, t)\right) + \sqrt{\varepsilon}h_1(\varphi) + \varepsilon h_2(\varphi, t), \tag{16}$$

приводящая систему (14) *к виду*

$$\begin{cases} \dot{w} = \varepsilon L(\alpha) + \varepsilon M(\alpha)w + O\left(\sqrt{\varepsilon}w^2 + \varepsilon^{3/2}\right), \\ \dot{\varphi} = \sqrt{\varepsilon}\alpha + \varepsilon\Delta(\varphi, t) + O\left(\sqrt{\varepsilon}w + \varepsilon^{3/2}\right), \end{cases} \tag{17}$$

где

$$L = \alpha^3\bar{P} + \alpha\bar{Q}, \quad M = 3\alpha^2\bar{P} + \bar{Q}. \tag{18}$$

Здесь и далее черта обозначает среднее значение функции.

Доказательство. Дифференцируя (16) по t, учитывая (14) и (17) и приравнивая коэффициенты при ε и εw, получаем уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{dh_1}{d\varphi}\alpha + \frac{\partial h_2}{\partial t} = Z_1 - L, \\ &\frac{dg_1}{d\varphi} + \frac{\partial g_2}{\partial t} = Z_2 - \frac{dh_1}{d\varphi} - M. \end{aligned}$$

Представим Z_1 и Z_2 в виде $Z_i = \bar{Z}_i + \widehat{Z}_i(\varphi) + \widetilde{Z}_i(\varphi, t)$, $i = 1, 2$, где $\widehat{Z}_i(\varphi)$ — среднее значение $Z_i - \bar{Z}_i$ по t. Полагая $L = \bar{Z}_1$, $M = \bar{Z}_2$, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{dh_1}{d\varphi}\alpha = \widehat{Z}_1, \quad \frac{\partial h_2}{\partial t} = \widetilde{Z}_1, \\ &\frac{dg_1}{d\varphi} = \widehat{Z}_2 - \frac{dh_1}{d\varphi}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial t} = \widetilde{Z}_2. \end{aligned}$$

Первые уравнения определяют h_1 и g_1 как первообразные правых частей. Рассматривая φ во вторых уравнениях как параметр, определим и h_2, g_2. $\square$

Замечание. В автономном случае в замене (16) функции h_2 и g_2 отсутствуют.

Аналогично доказывается

Лемма 2. *Существует замена угловой переменной*

$$\varphi = \psi + \sqrt{\varepsilon} f_1(\psi) + \varepsilon f_2(\psi, t), \tag{19}$$

приводящая систему (17) *к виду*

$$\begin{cases} \dot{w} = \varepsilon L(\alpha) + \varepsilon M(\alpha) w + O\left(\varepsilon w^2 + \varepsilon^{3/2}\right), \\ \dot{\varphi} = \sqrt{\varepsilon}\alpha + \varepsilon\overline{\Delta} + O\left(\sqrt{\varepsilon} w + \varepsilon^{3/2}\right). \end{cases} \tag{20}$$

Замена (19) обратима. Положим

$$\psi = \varphi + H(\varphi, t, \varepsilon). \tag{21}$$

Рассмотрим *определяющее уравнение* $L(\alpha) = 0$. Если $\bar{P}\bar{Q} < 0$, то оно имеет положительное решение $\alpha = \alpha^*$. Тогда $M^* = M(\alpha^*) = 2(\alpha^*)^2 \bar{P}$. При этом знак постоянной M^* совпадает со знаком $\bar{P}$.

При $\alpha = \alpha^*$ система (20) удовлетворяет условиям леммы 2.1 из работы [4], согласно которой система (20) имеет периодическое по ψ, t интегральное многообразие, определяемое соотношением $w = F(\psi, t, \varepsilon)$, где $F(\psi, t, \varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Это многообразие можно рассматривать как инвариантный тор. Заменяя в равенстве $w = F(\psi, t, \varepsilon)$ угол ψ по формуле (21) и используя последовательно (16), (13) и (8), получим представление инвариантного тора системы (7).

Тем самым доказана

Теорема. *Если $\bar{P}\bar{Q} < 0$, то уравнение* (1) *имеет при каждом достаточно малом $\varepsilon > 0$ инвариантный двумерный тор с периодами 2ω и T по φ и t соответственно, стягивающийся при $\varepsilon \to 0$ в положение равновесия $x = 0$.*

Замечание 1. Если X не зависит от t, то инвариантный тор превращается в предельный цикл. При этом для доказательства его существования вместо леммы 2.1 работы [4] можно использовать теорему о неявной функции. Для этого следует перейти от системы (17) к дифференциальному уравнению первого порядка, исключив из системы (17) t.

Замечание 2. Можно доказать [4, лемма 2.3], что если $\bar{P} < 0$, то инвариантный тор устойчив, а если $\bar{P} > 0$, то он неустойчив. Соответственно, при $\varepsilon = 0$ в уравнении (1) положение равновесия $x = 0$ асимптотически устойчиво, если $\bar{P} < 0$, и неустойчиво, если $\bar{P} > 0$.

Литература

1. *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения: Соб. соч. М.; Л., 1956. Т. 2. С. 272–331.

2. *Басов В. В., Бибиков Ю. Н.* Об устойчивости положения равновесия в одном случае периодического возмущения центра // Дифференц. уравнения. Т. 33, № 5. 1997. С. 583–586.

3. *Бибиков Ю. Н.* Устойчивость и бифуркация при периодических возмущениях положения равновесия осциллятора с бесконечно большой или бесконечно малой частотой // Матем. заметки. Т. 65, № 3. 1999. С. 323–335.

4. *Hale J. K.* Integral Manifolds of Perturbed Differential Systems // Ann. of Math. 1961. Vol. 73, N 3. P. 496–531.

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2014 г.

Сведения об авторах

Бибиков Юрий Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор; bibicoff@yandex.ru

Плисс Виктор Александрович — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор; anna1918@mail.ru, vapliss@yandex.ru

BIFURCATION OF THE STATE OF EQUILIBRIUM OF AN OSCILLATOR WITH NON-LINEAR RESTORING FORCE OF THE THIRD ORDER

Yuriy N. Bibikov, Victor A. Pliss

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; bibicoff@yandex.ru, anna1918@mail.ru, vapliss@yandex.ru

Periodic perturbations of on oscillator $\ddot{x}+x^3+ax\dot{x}=0$, $a^2<8$, are considered. Smallness of perturbations is defined by the smallness of the neighborhood of the state of equilibrium $x=0$ and by a small positive parameter.

Branching of the state of equilibrium $x=0$ to invariant two-dimentional tori is under consideration. Refs 4.

Keywords: bifurcation, invariant torus.

References

1. Lyapunov A. M., “Studies of one special case of the problem of stability of motion”, *Collected works* **2**, 272–331 (USSR Academy of Sciences Publisher, Moscow, 1956) [in Russian].

2. Basov V. V., Bibikov Yu. N., “On the stability of an equilibrium point in a certain case of a periodically perturbed center”, *Diff. Uravneniya* **33**, 583–586 (1997) [in Russian].

3. Bibikov Yu. N., “Stability and bifurcation for periodic perturbations of the equilibrium of an oscillator with infinite or infinitesimal oscillation frequency”, *Mathematical Notes* **65**(3), 269–279 (1999).

4. Hale J. K., “Integral Manifolds of Perturbed Differential Systems”, *Ann. of Math.* **73**(3), 496–531 (1961).