УДК 517.938 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 2

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ: УСТОЙЧИВОСТЬ, НЕУСТОЙЧИВОСТЬ, АТТРАКТОР*

И. Е. Зубер, А. Х. Гелиг

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Рассматривается система

$$x_{k+1} = A(k)x_k, \tag{1}$$

где $A(k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ — матрица, коэффициенты $a_{ij}(k)$ которой являются неупреждающими функционалами произвольной природы. Предполагается, что элементы, стоящие выше главной диагонали до $(p+1)$-го столбца включительно и ниже главной диагонали от $(p+1)$-го столбца до $(n-1)$-го столбца включительно, удовлетворяют условию

$$\sup_k |a_{ij}(k)| \le \alpha.$$

Для остальных элементов имеет место оценка

$$\sup_k |a_{ij}(k)| \le \delta.$$

Получена верхняя оценка на параметр δ, при которой система (1) глобально экспоненциально устойчива, если

$$\sup_k |a_{ii}(k)| < 1 \quad (i \in \overline{1,n}),$$

и неустойчива, если существует j, при котором

$$\inf_k |a_{jj}(k)| > 1.$$

В случае, когда элементы, стоящие на главной диагонали, являются функциями от x_k и удовлетворяют при $0 < r < R$ условиям

$$\sup_{|x_k|>R} |a_{ii}(k)| < 1, \qquad \inf_{|x_k|<r} |a_{ii}(k)| > 1 \quad (i \in \overline{1,n}),$$

система (1) имеет глобальный аттрактор. Библиогр. 4 назв.

Ключевые слова: неопределенные дискретные системы, устойчивость, неустойчивость, глобальный аттрактор.

1. Введение. Устойчивости и асимптотическому поведению решений дискретных систем посвящена обширная литература. Из последних работ укажем [1, 2]. В [3] исследовалась устойчивость неопределенных дискретных систем с помощью метода линейных матричных неравенств. В [4] для некоторого класса неопределенных дискретных систем были получены условия глобальной экспоненциальной устойчивости с помощью построения специальной квадратичной функции Ляпунова. В данной статье класс устойчивых неопределенных дискретных систем значительно расширен. При этом получены также условия неустойчивости состояния равновесия и наличия глобального аттрактора.

2. Формулировка результата. Рассмотрим систему

$$x_{k+1} = A(k)x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $A(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица, элементы $a_{ij}(k)$ которой являются неупреждающими функционалами произвольной природы, например, функциями от k и $x(j)$ при $j \le k$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14.01.00107а).

Предполагается выполнение следующих условий:

$$\sup_k |a_{ii}(k)| \le \alpha_* < 1, \quad i \in \overline{1,n}, \tag{2}$$

$$\sup_k |a_{ij}(k)| \le \alpha \tag{3}$$

при

$$(i,j) \in \Omega_\alpha = \{i \in \overline{1,p-1};\ j \in \overline{i+1,p}\} \cup \{i \in \overline{p+2,n};\ j \in \overline{p+1,i-1}\},$$

$$\sup_k |a_{ij}(k)| \le \delta \tag{4}$$

при

$$i \ne j, (i,j) \in \Omega_\delta = \{i \in \overline{1,n};\ j \in \overline{1,n}\} \setminus \Omega_\alpha.$$

В (2)–(4) α_* и α — заданные параметры, а δ — достаточно малое число, которое будет выбрано ниже. Иными словами, элементы матрицы $A(k)$, стоящие на главной диагонали, обладают свойством (2); элементы, стоящие выше главной диагонали до p-го столбца включительно и ниже главной диагонали от $(p+1)$-го столбца до $(n-1)$-го столбца включительно, удовлетворяют условию (3). Для остальных элементов справедлива оценка (4).

Представим матрицу $A(k)$ в виде

$$A(k) = A_\alpha(k) + A_\delta(k), \tag{5}$$

где матрица $A_\alpha(k)$ получается из $A(k)$ обнулением всех элементов, удовлетворяющих условию (4). Матрица $A_\alpha(k)$ имеет следующий вид:

$$A_\alpha(k) = A_1(k) + A_2(k), \tag{6}$$

где

$$A_1(k) = \begin{pmatrix} A_p(k) & O_p^{n-p} \\ O_{n-p}^p & O_{n-p}^{n-p} \end{pmatrix}, \quad A_2(k) = \begin{pmatrix} O_p^p & O_p^{n-p} \\ O_{n-p}^p & A_{n-p}(k) \end{pmatrix}.$$

Здесь O_j^i — нулевая $(i \times j)$-матрица,

$$A_p(k) = \begin{pmatrix} a_{11}(k) & a_{12}(k) & \dots & a_{1,p-1}(k) & a_{1,p}(k) \\ 0 & a_{22}(k) & \dots & a_{2,p-1}(k) & a_{2,p}(k) \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{pp}(k) \end{pmatrix},$$

$$A_{n-p}(k) = \begin{pmatrix} a_{p+1,p+1}(k) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n-1,p+1}(k) & & \dots & a_{n-1,n-1}(k) & 0 \\ a_{n,p+1}(k) & & \dots & a_{n,n-1}(k) & a_{nn}(k) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V_k = x_k^* H x_k, \tag{7}$$

где $H = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_n) > 0$. Приращение $\Delta V_k = V_{k+1} - V_k$ имеет вид

$$\Delta V_k = x_k^*(A^*(k)HA(k) - H)x_k.$$

Потребуем наличие свойства

$$\Delta V_k < -\varepsilon |x_k|^2, \quad \varepsilon > 0, \tag{8}$$

из которого следует глобальная экспоненциальная устойчивость системы (1). Ввиду соотношения (5) свойство (8) эквивалентно матричному неравенству

$$D \stackrel{\text{def}}{=} (A_\alpha(k) + A_\delta(k))^* H (A_\alpha(k) + A_\delta(k)) - H + \varepsilon I_n < 0, \tag{9}$$

где I_n — единичная $(n \times n)$-матрица. Очевидно представление

$$D = D_1 + D_2 - \varepsilon I_n,$$

где

$$\begin{aligned} D_1 &= A_\alpha^*(k) H A_\alpha(k) - H + 2\varepsilon I_n, \\ D_2 &= A_\alpha^*(k) H A_\delta(k) + A_\delta^*(k) H A_\alpha(k) + A_\delta^*(k) H A_\delta(k). \end{aligned} \tag{10}$$

Для справедливости (9) достаточно выполнения неравенств

$$D_1 < 0, \tag{11}$$

$$D_2 < \varepsilon I_n. \tag{12}$$

Мы сначала выберем параметры $h_1, \ldots, h_n$ таким образом, чтобы удовлетворить неравенству (11), а затем выберем δ в условии (4), при которой справедлива оценка (12). Ввиду представления (6) оценка (11) эквивалентна следующим неравенствам:

$$B_p(k) \stackrel{\text{def}}{=} A_p(k)^* H_1 A_p(k) - H_1 + 2\varepsilon I_p < 0, \tag{13}$$

$$B_{n-p}(k) \stackrel{\text{def}}{=} A_{n-p}(k)^* H_2 A_{n-p}(k) - H_2 + 2\varepsilon I_{n-p} < 0, \tag{14}$$

где $H_1 = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_p)$, $H_2 = \mathrm{diag}(h_{p+1}, \ldots, h_n)$. Обозначим через $\beta_{ij}(k)$ элементы матрицы $B_p(k)$. Они имеют следующий вид:

$$\begin{array}{rcl} \beta_{11}(k) &=& (a_{11}^2(k) - 1)h_1 + 2\varepsilon, \\ \beta_{22}(k) &=& a_{12}^2(k)h_1 + (a_{22}^2(k) - 1)h_2 + 2\varepsilon, \\ \vdots && \\ \beta_{pp}(k) &=& a_{1p}^2(k)h_1 + a_{22}^2(k)h_2 + \cdots + (a_{pp}^2(k) - 1)h_p + 2\varepsilon, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \beta_{12}(k) &=& \beta_{21}(k) = a_{11}(k)a_{12}(k)h_1, \\ \beta_{13}(k) &=& \beta_{31}(k) = a_{11}(k)a_{13}(k)h_1, \\ \vdots && \\ \beta_{1p}(k) &=& \beta_{p1}(k) = a_{11}(k)a_{1p}(k)h_1, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \beta_{23}(k) &=& \beta_{32}(k) = a_{12}(k)a_{13}(k)h_1 + a_{22}(k)a_{23}(k)h_2, \\ \vdots && \\ \beta_{2p}(k) &=& \beta_{p2}(k) = a_{12}(k)a_{1p}(k)h_1 + a_{22}(k)a_{2p}(k)h_2 \\ \vdots && \end{array}$$

Обозначим через $\Delta_j(k)$ главные диагональные миноры матрицы $B_p(k)$, отсчитываемые сверху. Очевидно, что

$$\Delta_1(k) = (a_{11}^2(k) - 1)h_1 + 2\varepsilon.$$

Поэтому в силу условия (2) $\Delta_1(k) < (\alpha_* - 1)h_1 + 2\varepsilon$ и $\Delta_1(k) < -1$ при $h_1 = \frac{1+2\varepsilon}{1-\alpha_*}$. Предположим, что найдены такие h_i $(i < l)$, что $\mathrm{sign}\Delta_i(k) = (-1)^i$. Представим $\Delta_l(k)$ в виде

$$\Delta_l(k) = \begin{vmatrix} K_{l-1}(k) & q_l(k) \\ q_l^*(k) & \varkappa_l(k) + (a_{ll}^2(k) - 1)h_l \end{vmatrix},$$

где $\det K_{l-1}(k) = \Delta_{l-1}(k)$, $\varkappa_l(k) = a_{1l}^2(k)h_1 + a_{2l}^2(k)h_2 + \cdots + a_{2,l-1}^2(k)h_{l-1} + 2\varepsilon$, а $q_l(k)$ и $K_{l-1}(k)$ зависят только от выбранных $h_1, \ldots, h_{l-1}$ и параметров α_* и α из условий (2), (3). По лемме Шура

$$\Delta_l(k) = \Delta_{l-1}(k)[\varkappa_l(k) + (a_{ll}^2(k) - 1)h_l - q_l^*(k)K_{l-1}^{-1}(k)q_l(k)].$$

В силу условия (2) выражение, стоящее в квадратных скобках, отрицательно при достаточно большом h_l и, следовательно, $\mathrm{sign}\Delta_l(k) = -\mathrm{sign}\Delta_{l-1}(k)$. Таким образом, выбраны такие $h_1, \ldots, h_p$, при которых справедлива оценка (13). Аналогичным способом выбираются последовательно h_n, h_{n-1}, …, h_{p+1}, при которых справедливо неравенство (14). При этом главные диагональные миноры отсчитываются снизу.

Найдем теперь оценку на параметр δ в условии (4), которая гарантирует справедливость неравенства (12). Из неравенства Рэлея следует, что для выполнения (12) достаточно, чтобы

$$\lambda_{\max}(D_2) < \varepsilon. \tag{15}$$

Будем обозначать через $|M|$ евклидову норму матрицы M, а через $\|M\| = \sqrt{\lambda_{\max}(MM^*)}$ — ее спектральную норму. Поскольку матрица D_2 симметрична, $\lambda_{\max}(D_2) = \|D_2\|$. Оценим $\|D_2\|$. Из (10) следует оценка

$$\|D_2\| \leq \|A_\delta\|^2\|H\| + 2\|A_\delta\| \cdot \|H\| \cdot \|A_\alpha\|.$$

Поскольку $\|H\| = h_* = \max\limits_{i\in\overline{1,n}} h_i$ и $\|A_\alpha\| \leq |A_\alpha|$, справедливо неравенство

$$\|D_2\| \leq (|A_\delta|^2 + 2|A_\delta| \cdot |A_\alpha|)h_*. \tag{16}$$

Из условий (3), (4) вытекают оценки

$$|A_\alpha| \leq \varkappa_1 = \sqrt{n\alpha_*^2 + 0,5\alpha^2(n^2 - 2np + 2p^2 - n)},$$

$$|A_\delta| \leq \delta\varkappa_2, \quad \varkappa_2 = \sqrt{0,5n^2 + np - p^2 - 0,5n}.$$

Отсюда и из (16) следует неравенство

$$\|D_2\| \leq h_*(\delta^2\varkappa_2^2 + 2\delta\varkappa_2\varkappa_1).$$

Поэтому свойство (15) выполняется, если

$$0 \leq \delta < \frac{-\varkappa_1 h_* + \sqrt{\varkappa_1^2 h_*^2 + \varepsilon}}{\varkappa_2}. \tag{17}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. *Если выполнены условия* (2)–(4) *и параметр* δ *удовлетворяет оценке* (17), *то система* (1) *глобально экспоненциально устойчива.*

Замечание. Условия (2)–(4) весьма ограничительны, так как исключают из рассмотрения системы, коэффициенты которых являются полиномами относительно $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_0$. Однако, если начальное состояние x_0 принадлежит ограниченной области, то рассуждения остаются в силе и гарантируют экспоненциальную устойчивость, но не в целом, а в большом. Действительно, пусть супремумы в условиях (2)–(4) берутся в области $\mathcal{D} = \{|x(i)| \leq R, \quad i = k, k-1, \ldots, 0\}$. Тогда согласно неравенству Рэлея

$$\lambda_{\min}(H)|x|^2 \leq x^* H x \leq \lambda_{\max}(H)|x|^2$$

траектории не выйдут из $\mathcal{D}$, если $x_0^* H x_0 < h_{\min}(H) R^2$.

Предположим теперь, что не все элементы, стоящие на главной диагонали, удовлетворяют неравенству (2). Пусть

$$\begin{aligned} &\inf_k |a_{ii}(k)| > 1 && \text{при} \quad i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}, \\ &\sup_k |a_{ii}(k)| \leq \alpha_* < 1 && \text{при} \quad i \in \overline{1,n} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Легко видеть, что все рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, остаются в силе с той лишь разницей, что параметры h_i при $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ выбираются отрицательными. Поэтому функция Ляпунова (7) будет знакопеременной (либо отрицательной, если $s = n$ в условии (18)), что при наличии свойства (8) приводит к неустойчивости состояния равновесия $x = 0$. Таким образом, справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (3), (4), (18) *и* δ *удовлетворяет оценке* (17), *где* $h_* = \max\limits_{i \in \overline{1,n}} |h_i|$, *то состояние равновесия системы* (1) *неустойчиво.*

Рассмотрим систему (1), в которой элементы, стоящие на главной диагонали, являются функциями от x_k, удовлетворяющими условиям

$$\sup_{|x_k| > R} |a_{ii}(x_k)| \leq \alpha_* < 1, \qquad \inf_{|x_k| < r} |a_{ii}(x_k)| > 1, \quad i \in \overline{1,n}, \tag{19}$$

где $r < R$. Остальные элементы обладают свойствами (3), (4). Построим матрицу $H > 0$ по теореме 1. Из неравенства Рэлея следует, что

$$\mathcal{M}_1 = \{x \,\big|\, x^* H x > h_* R^2\} \subset \{x \,\big|\, |x| > R\}.$$

Поэтому все траектории, выпущенные из множества $\mathcal{M}_1$, при $n \to \infty$ входят в $\mathcal{M}_+ = \{x \,\big|\, x^* H x \leq h_* R^2\}$. Построим отрицательно определенную матрицу H_3 по теореме 2. Согласно неравенству Рэлея $x^* H_3 x < \lambda_{\max}(H_3)|x|^2$. Отсюда следует оценка $|x|^2 < \dfrac{x^* H_3 x}{\lambda_{\max}(H_3)}$. Поэтому $|x|^2 < r^2$, если

$$x \in \mathcal{M}_2 = \{x \,\big|\, x^*(-H_3)x < -\lambda_{\max}(H_3) r^2\},$$

и все траектории, начинающиеся в множестве $\mathcal{M}_2$, при $k \to \infty$ его покидают. Таким образом, доказана

Теорема 3. *Если выполнены условия* (3), (4), (19) *и δ удовлетворяет оценке* (17), *то система* (1) *имеет глобальный аттрактор, находящийся в области* $\mathcal{M}_+ \setminus \mathcal{M}_2$.

3. Заключение. Рассмотрена дискретная система, коэффициенты которой являются произвольными неупреждающими функционалами, в частности функциями от состояний системы в неупреждающие моменты времени. С помощью квадратичной функции Ляпунова получены достаточные условия глобальной экспоненциальной устойчивости, неустойчивости и существования глобального аттрактора.

Литература

1. *Huabin Chen, Yong Zhang, Yang Zhao.* Stability analysis for uncertain neutral systems with discrete and distributed delays // Applied Mathematics and Computation. 2012. Vol. 218. P. 11351–11361.
2. *Jong Son Shin, Toshiki Naito.* Representation of Solutions, Translation Formulae and Asymptotic Behavior in Discrete Linear Systems and Periodic Continuous Linear Systems // Hiroshima Math. J. 2014. Vol. 44. P. 75–126.
3. *Katasuya Yokoi.* Recurrence Properties of a Class of Nonautonomous Discrete Systems // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2013. Vol. 20. P. 689–705.
4. *Зубер И. Е., Гелиг А. Х.* Устойчивость неопределенных дискретных систем // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2009. Сер. 1. Вып. 1. с. 3–9.

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2014 г.

Сведения об авторах

Зубер Ирина Ефремовна — доктор технических наук, ведущий научный сотрудник; zuber-yanikum@mail.ru

Гелиг Аркадий Хаимович — доктор физико-математических наук, профессор; agelig@yandex.ru

UNCERTAIN DISCRETE SYSTEMS: STABILITY, UNSTABILITY, ATTRACTOR

Irina E. Zuber, Arkadiy Kh. Gelig

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; zuber-yanikum@mail.ru, agelig@yandex.ru

We consider a system

$$x_{k+1} = A(k)x_k, \tag{1}$$

where coefficients of matrix $A(k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ $a_{ij}(k)$ are nonlook-ahead functionals of arbitrary character. It is supposed that elements placed above principal diagonal to $(p+1)$ column with index $(p+1)$ inclusively and elements placed below principal diagonal from column with index $(p+1)$ to column with index $(n-1)$ incensively comply with condition $\sup_k |a_{ij}(k)| \leq \alpha$. The rest elements comply with estimation $\sup_k |a_{ij}(k)| \leq \delta$.

The upper estimation for parameter δ is received for which system (1) is globally exponentially stable if $\sup_k |a_{ii}(k)| < 1 \quad (i \in \overline{1,n})$ and this system is unstable if such j exists that $\inf_k |a_{jj}(k)| > 1$. In case when elements placed on principal diagonal are functions of x_k and if $0 < r < R$ comply with conditions $\sup_{|x_k|>R} |a_{ii}(x_k)| < 1, \quad \inf_{|x_k|<r} |a_{ii}(x_k)| > 1 \quad (i \in \overline{1,n})$ the system (1) has global attractor. Refs 4.

Keywords: uncertain discrete systems, stability, unstability, global attractor.

References

1. Huabin Chen, Yong Zhang, Yang Zhao, “Stability analysis for uncertain neutral systems with discrete and distributed delays”, *Applied Mathematics and Computation* **218**, 11351–11361 (2012).
2. Jong Son Shin, Toshiki Naito, “Representation of Solutions, Translation Formulae and Asymptotic Behavior in Discrete Linear Systems and Periodic Continuous Linear Systems”, *Hiroshima Math. J.* **44**, 75–126 (2014).
3. Katasuya Yokoi, “Recurrence Properties of a Class of Nonautonomous Discrete Systems”, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.* **20**, 689–705 (2013).
4. Zuber I. E., Gelig A. Kh., “Stability of uncertain discrete systems”, *Vestnik SPbGU* Ser. 1. Is. 1. P. 3–9 (2009) [in Russian].