УДК 517.9 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 2

О СОВПАДЕНИИ ОПРЕДЕЛЕНИЙ ГЕЛИГА—ЛЕОНОВА—ЯКУБОВИЧА, ФИЛИППОВА И АЙЗЕРМАНА—ПЯТНИЦКОГО*

М. А. Киселева[1], *Н. В. Кузнецов*[1,2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
[2] Университет Ювяскюля, Финляндия, 40014, Jyväskylä, Seminarenkatu 15

В настоящей работе изучается класс систем с разрывной правой частью, широко встречающегося в прикладных задачах. Разрывные системы тесно связаны с понятием «дифференциального включения», которое впервые было введено в работах А. Маршо и С. К. Зарембы. В данной работе приведены три различных подхода к доопределению дифференциальных включений: определение по Филиппову, по Айзерману—Пятницкому и по Гелигу—Леонову—Якубовичу. Для рассматриваемого класса систем показано, в каких случаях эти определения совпадают, а в каких случаях они различны. Библиогр. 19 назв. Ил. 2.

Ключевые слова: дифференциальное включение, разрывная система, доопределенная нелинейность.

Рассмотрим следующую систему с разрывной правой частью:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b\psi(\sigma), \quad \sigma = c^* x, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, A — постоянная матрица порядка n, b, c — векторные величины порядка n и $\psi(\sigma)$ — кусочно-непрерывная функция в $\mathbb{R}$. Если $\psi(\sigma)$ непрерывна в некоторой области, то теорема Пеано гарантирует существование решения $x(t)$ системы (1) вблизи t_0, удовлетворяющего условию $x(t_0) = x_0$, где x_0 — точка из области непрерывности. Однако возникает вопрос, как определять решение, когда ψ претерпевает разрыв. Пусть Σ — множество точек разрыва функции $\psi(\sigma)$. В данной статье будут рассматриваться разрывы первого рода, т. е. функция $\psi(\sigma)$ непрерывна для значений σ, близких к σ_0, и существуют конечные пределы

$$\lim_{\sigma\to\sigma_0+0} \psi(\sigma) = \psi(\sigma_0 + 0) \quad \text{и} \quad \lim_{\sigma\to\sigma_0-0} \psi(\sigma) = \psi(\sigma_0 - 0).$$

Существует много определений решения разрывных систем (систем с разрывной правой частью) [1–16]. Все они схожи в том, что значение разрывной функции в каждой точке заменяется некоторым множеством. В рассматриваемом случае функция $\psi(\sigma)$ заменяется на многозначную функцию $\phi(\sigma)$. Заметим, что в точках непрерывности функции $\psi(\sigma)$ многозначная функция $\phi(\sigma)$ состоит из одной точки и совпадает с $\psi(\sigma)$. В точках разрыва $\phi(\sigma)$ представляет собой множество, которое доопределяется тем или иным способом.

Определение 1. *Решением уравнения (1) называется абсолютно непрерывная вектор-функция $x(t)$, определенная на отрезке или интервале I, для которой*

$$\frac{dx}{dt} \in Ax + b\phi(\sigma), \quad \sigma = c^* x \tag{2}$$

почти всюду на I.

Выражение (2) называется дифференциальным включением [4].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 14-21-00041) и СПбГУ.

Каким образом необходимо задать в точке разрыва $\sigma_0 \in \Sigma$ множество значений $\phi(\sigma_0)$ выхода $\psi(\sigma)$, чтобы для полученного определения решения выполнялись аналоги основных свойств дифференциальных уравнений и это определение имело физический смысл?

Приведем три различных доопределения, которые мы будем рассматривать далее.

Первое доопределение было введено А. Ф. Филипповым в 1960 году и называется простейшим выпуклым доопределением [4, 17].

Определение 2. *Пусть для каждой точки σ функция $\phi(\sigma)$ является наименьшим выпуклым замкнутым множеством, содержащим значения вектор-функции $\phi(\sigma')$, когда $\sigma' \notin \Sigma$, $\sigma' \to \sigma$.*

Решение $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ включения (2) называется решением по Филиппову.

В нашем случае в точках разрыва σ_0 для доопределения по Филиппову $\phi(\sigma_0) = [\phi(\sigma_0 - 0), \phi(\sigma_0 + 0)]$.

Перейдем к рассмотрению следующего определения решения — определения М. А. Айзермана и Е. С. Пятницкого, введенного в 1974 году [5].

Пусть для $\sigma \notin \Sigma$ выполняется следующее условие: $\phi_\nu(\sigma)$ равномерно сходятся к $\phi(\sigma)$ ($\phi_\nu(\sigma) \rightrightarrows \phi(\sigma)$), где $\phi_\nu(\sigma)$ — непрерывные равномерно ограниченные[1] на I функции, зависящие от ν.

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b\phi_\nu(\sigma), \quad \sigma = c^* x.$$

В силу непрерывности правых частей этой системы существует решение $x_\nu(t)$. А значит, можно найти подпоследовательность $\nu_k \to 0$, такую что $x_{\nu_k}(t)$ равномерно сходится:

$$x_{\nu_k}(t) \rightrightarrows x(t). \tag{3}$$

Функция $x(t)$ удовлетворяет условию Липшица на I, а значит, абсолютно непрерывна и дифференцируема почти всюду на I. Таким образом, $x(t)$ удовлетворяет определению решения дифференциального включения. Вообще говоря, может существовать не один такой предел.

Определение 3. *Любой предел (3) называется решением по Айзерману—Пятницкому.*

Следующее определение было введено в 1978 году А. Х. Гелигом, Г. А. Леоновым и В. А. Якубовичем [6].

Определение 4. *Пусть для $\phi(\sigma)$ в точках разрыва $\sigma_0 \in \Sigma$ выполнены следующие условия:*

1) множество $\phi(\sigma_0)$ ограничено, замкнуто и выпукло;

2) многозначная функция $\phi(\sigma)$ полунепрерывна сверху[2].

Тогда решение $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ включения (2) называется решением по Гелигу—Леонову—Якубовичу.

[1] Функции $\phi_\nu(\sigma)$ равномерно ограничены на I, если $\exists C > 0\ \forall \nu \in E\ \forall t \in I\ |\phi_\nu(\sigma(t))| \le C$.

[2] Функция $f(x,t)$ называется полунепрерывной сверху в точке (x_0, t_0), если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon, x_0, t_0)$, что множество $f(x_1, t_1)$ принадлежит ε-окрестности множества $f(x_0, t_0)$, если точка (x_1, t_1) находится в δ-окрестности точки (x_0, t_0).

Здесь в точках разрыва σ_0 первое условие из определения по Гелигу—Леонову—Якубовичу означает, что множество $\phi(\sigma_0)$ является отрезком, а второе условие означает, что этот отрезок является подмножеством $[\phi(\sigma_0-0),\phi(\sigma_0+0)]$.

В каком случае все три определения совпадают? В следующей теореме приведен ряд достаточных условий такого совпадения для важного класса систем.

Теорема 1. *Рассмотрим систему*

$$\frac{dx}{dt}\in Ax+b\phi(\sigma),\quad \sigma=c^*x, \tag{4}$$

где A — постоянная матрица порядка n, b, c — векторные величины порядка n и $\phi(\sigma)$ является скалярной нелинейностью, которая имеет лишь изолированные точки разрыва первого рода и для которой значениями в точках разрыва являются отрезки $[\phi(\sigma_0-0),\phi(\sigma_0+0)]$.

Тогда доопределение по Филиппову, по Айзерману—Пятницкому и по Гелигу—Леонову—Якубовичу совпадают.

Доказательство. Пусть $x(t)$ — какое-то решение дифференциального включения (4). Изучим поведение системы (4) вблизи разрыва $c^*x(t)=\sigma_0$. Пусть в какой-то момент времени t_1 траектория $x(t)$ попала на гиперплоскость $c^*x(t)=\sigma_0$ и остается там для всех t из промежутка $[t_1,t_2]$, т. е. $\sigma_0=c^*x(t)\ \forall t\in[t_1,t_2]$. Говорят, что в таком случае траектория находится в скользящем режиме. Покажем, что на скользящем режиме разрывная нелинейность $\phi(\sigma(t))$ может быть заменена на некоторую измеримую функцию времени $\xi(t)$, для которой $\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+b\xi(t)$ для почти всех t и $\xi(t)\in\phi[c^*x(t),t]$. Говорят, что $\xi(t)$ — это доопределенная нелинейность. Согласно теореме из [18, с. 38] измеримая доопределенная нелинейность существует для достаточно широкого класса систем, включая системы, рассматриваемые в данной работе.

Справедливо следующее равенство для почти всех t:

$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+b\xi(t),\quad \sigma(t)=c^*x(t). \tag{5}$$

Отсюда получаем

$$\frac{d\sigma(t)}{dt}=c^*Ax(t)+c^*b\xi(t).$$

Примем $l_1=-c^*b$, т. е.

$$\frac{d\sigma(t)}{dt}=c^*Ax(t)-l_1\xi(t). \tag{6}$$

Пусть сначала $l_1\neq0$.

При $\sigma\to\sigma_0+0$ уравнение (6) имеет вид

$$\frac{d\sigma}{dt}=c^*Ax(t)-l_1\phi(\sigma_0+0), \tag{7}$$

а при $\sigma\to\sigma_0-0$ — вид

$$\frac{d\sigma}{dt}=c^*Ax(t)-l_1\phi(\sigma_0-0). \tag{8}$$

Предположим, что траектория непрерывного уравнения (7) или (8) в некоторый момент времени t_1 попала в точку, лежащую на гиперплоскости $\sigma = \sigma_0$, т. е. $\sigma_0 = c^* x(t)$.

Очевидно, что если $c^* Ax(t) > l_1 \phi(\sigma_0 + 0)$, то траекторию можно продолжить в силу уравнения (7) в полупространство $\sigma > \sigma_0$, поскольку значение $d\sigma/dt$ для $t = t_1$ согласно (7) является положительным. Аналогично, если траектория уравнения (7) или (8) в некоторый момент времени t_1 попала в точку, лежащую на гиперплоскости $\sigma = \sigma_0$ и выполнено $c^* Ax(t) < l_1 \phi(\sigma_0 - 0)$, то траекторию можно продолжить в полупространство $\sigma < \sigma_0$ в силу системы (8).

Таким образом, траектории системы, построенные таким образом, «прошивают» часть гиперплоскости $\sigma = \sigma_0$, определяемую неравенством $c^* Ax(t) > l_1 \phi(\sigma_0 + 0)$, в сторону возрастания σ, а часть гиперплоскости $\sigma = \sigma_0$, определяемую неравенством $c^* Ax(t) > l_1 \phi(\sigma_0 + 0)$, — в сторону убывания σ.

Рассмотрим теперь случай, когда в момент времени $t = t_1$ выполнены следующие соотношения:

$$c^* x_0 = \sigma_0, \quad l_1 \phi(\sigma_0 - 0) < c^* A x_0 < l_1 \phi(\sigma_0 + 0), \tag{9}$$

здесь $x_0 = x(t_1)$

Траектории не «прошивают» часть гиперплоскости (9), а «стыкуются» на ней. Действительно, из точки, координаты которой удовлетворяют соотношениям (9), нельзя выпустить траекторию в полупространство $\sigma > \sigma_0$, так как в силу (7) $d\sigma/dt < 0$. Аналогично, из этой точки не удается продолжить траекторию в полупространство $\sigma < \sigma_0$, так как из (8) получаем, что $d\sigma/dt > 0$. Следовательно, траектория остается в гиперплоскости $\sigma = \sigma_0$ до тех пор, пока $l_1 \phi(\sigma_0 - 0) < c^* A x_0 < l_1 \phi(\sigma_0 + 0)$, т. е. $d\sigma/dt = 0$. Возникает скользящий режим. Для такой траектории согласно (6) получаем, что доопределенная нелинейность определяется как

$$\xi(t) = \frac{1}{l_1} c^* Ax(t).$$

А значит, поле направлений, задающее скользящий режим, описывается следующим образом:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \frac{1}{l_1} bc^* Ax(t). \tag{10}$$

Заметим, что в случае, если $\sigma = \sigma_0$ и $l_1 \phi(\sigma_0 - 0) = c^* Ax$ или $l_1 \phi(\sigma_0 + 0) = c^* Ax$, траектории, удовлетворяющие этим условиям, также задаются системой (10).

Предположим теперь, что $l_k = -c^* A^{k-1} b = 0$ для всех $k = 1, \ldots, m-1$, а $l_m = -c^* A^{m-1} b \neq 0$. Тогда

$$\frac{d^k \sigma(t)}{dt} = c^* A^k x(t)$$

для $k = 1, \ldots, m-1$, но

$$\frac{d^m \sigma(t)}{dt} = c^* A^m x(t) - l_m \xi(t).$$

В этом случае мы можем провести исследование поведения траекторий, аналогичное исследованию, проведенному при $l_1 \neq 0$.

Пусть траектория в некоторый момент времени t_1 попала на гиперплоскость $\sigma = \sigma_0$. Мы получим, что траектория «прошивает» точки гиперплоскости, для которых

$c^*A^k x(t) \neq 0$ хотя бы для одного $k < m$, либо выполнены следующие соотношения:

$$c^*A^k x(t) = 0 \quad k = 1, \dots, m-1,$$
$$c^*A^m x(t) > l_m \phi(\sigma_0 + 0) \quad \text{или} \quad c^*A^m x(t) < l_m \phi(\sigma_0 - 0).$$

Скользящий режим для траектории, попавшей на гиперплоскость $\sigma = \sigma_0$, возникает при следующих условиях:

$$c^*Ax(t) = \ldots = c^*A^{m-1}x(t) = 0,$$
$$l_m \phi(\sigma_0 - 0) \leq c^*A^m x(t) \leq l_m \phi(\sigma_0 + 0).$$

Таким образом, если $\phi(\sigma_0) = [\phi(\sigma_0 - 0), \phi(\sigma_0 + 0)]$, то, как было показано выше, поле направлений на гиперплоскости разрыва определяется однозначно. При любом другом задании нарушается выполнение уравнения (5). Решение, удовлетворяющее такому заданию, является решением в смысле определения по Гелигу—Леонову—Якубовичу.

В работах Айзермана и Пятницкого также вводится понятие репрезентативной системы — системы уравнений, которая обращается в тождество почти всюду при подстановке решений по Айзерману—Пятницкому и только их. Согласно результатам, полученным во второй части [5] (в частности см. *Основную теорему*), решение по Айзерману—Пятницкому является решением системы (2), в которой $\phi(\sigma)$ в каждой точке σ является выпуклым замкнутым множеством, содержащим значения $\phi(\sigma')$, когда $\sigma' \notin \Sigma$, $\sigma' \to \sigma$. То есть каждое решение по Филиппову является решением по Айзерману—Пятницкому [19, с. 23]. Также каждое решение по Айзерману—Пятницкому является решением по Гелигу—Леонову—Якубовичу.

Значит, построенное решение является решением в смысле определений по Айзерману и Пятницкому и по Филиппову. Теорема доказана.

Заметим, что если отрезок $\phi(\sigma_0)$ не совпадает с $[\phi(\sigma_0 - 0), \phi(\sigma_0 + 0)]$, то ввиду полунепрерывности функции $\phi(\sigma)$

$$[\phi(\sigma_0 - 0), \phi(\sigma_0 + 0)] \subset \phi(\sigma_0).$$

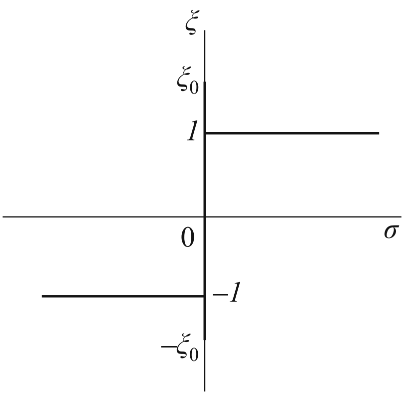

Рис. 1. Нелинейность $\xi(\sigma)$ типа «срывное трение».

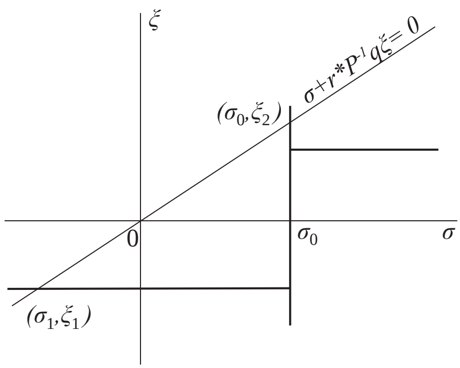

Рис. 2. Нелинейность $\xi(\sigma)$.

Тогда, как можно убедиться, траектории «прошивают» точки многообразия

$$c^*x = \sigma_0, \quad \frac{1}{l_1}c^*Ax \in \phi(\sigma_0) \setminus [\phi(\sigma_0 - 0), \phi(\sigma_0 + 0)],$$

но вместе с тем на этом многообразии имеется и скользящий режим. Таким образом, в точках этого многообразия заведомо нет единственности решения, а значит, утверждение теоремы становится неверным.

Продемонстрируем это утверждение на конкретном примере [6]. Рассмотрим нелинейность $\phi(\sigma) = \mathrm{sign}\sigma$ при $\sigma \neq 0$, а $\phi(0) = [-\xi_0, \xi_0]$, где $\xi_0 > 1$ (см. рис. 1). Нелинейности такого типа описывают «срывное трение», т. е. случай, когда коэффициент трения в покое может принимать большие значения, чем при движении. Поскольку для допределений по Филиппову и по Айзерману—Пятницкому важны значения нелинейности лишь при $\sigma \neq 0$, то система (5) с указанной нелинейностью будет иметь те же решения (в смысле Филиппова или Айзермана—Пятницкого), что и система с нелинейностью $\mathrm{sign}\sigma$. Для доопределения по Гелигу—Леонову—Якубовичу существенно множество значений в точке разрыва. Пусть, например, нелинейность имеет вид, показанный на рис. 2. Все стационарные решения системы (5) имеют вид $x = -A^{-1}b\xi$, где ξ — ордината любой точки (σ, ξ) пересечения графика нелинейности с «характеристической прямой» $\sigma + c^*A^{-1}b\xi = 0$ (мы предполагаем, что $\det A \neq 0$). Предположим, имеется пересечение в двух точках (σ_1, ξ_1) и (σ_0, ξ_2) — см. рис. 2. Тогда по Филиппову и по Айзерману—Пятницкому имеется только одно стационарное решение: $x_1 = -A^{-1}b\xi_1$. В смысле определения Гелига—Леонова—Якубовича стационарных решений два: $x_1 = -A^{-1}b\xi_1$ и $x_2 = -A^{-1}b\xi_2$.

В работе существенно использованы идеи сравнения определений и примеры, представленные в монографии [6]. Задача строго сравнения определений, была поставлена пред авторами Г. А. Леоновым. Авторы благодарны А. Х. Гелигу за внимание к данной работе и ценные замечания.

Литература

1. *Marchaud A.* Sur les champs continus de demi-droites et les équations différentielles du premier ordre. 1934. T. 62. C. 1–38.

2. *Zaremba S. K.* Sur les équations au paratingent // Bull. Sci. Math. 1936. Vol. 60, N 2. P. 139–160.

3. *Carathéodory C.* Vorlesungen über reelle Funktionen. Leipzig und Berlin: Verlag und Druck Von BG Teubner, 1918.

4. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Математический сборник. 1960. Т. 51, № 1. С. 99–128.

5. *Айзерман М. А., Пятницкий Е. С.* Основы теории разрывных систем. I, II // Автоматика и телемеханика. 1974. № 7, 8. С. 33–47, 39–61.

6. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.

7. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. Наука, 1974.

8. *Cortes Jorge.* Discontinuous dynamical systems // Control Systems, IEEE. 2008. Vol. 28, N 3. P. 36–73.

9. *Hui Qing, Haddad MM, Bhat S.* Semistability, finite-time stability, differential inclusions, and discontinuous dynamical systems having a continuum of equilibria // Automatic Control, IEEE Transactions on. 2009. Vol. 54, N 10. P. 2465–2470.

10. *Dieci L., Lopez L.* A survey of numerical methods for IVPs of ODEs with discontinuous right-hand side // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2012. Vol. 236, N 16. P. 3967–3991.

11. *Orlov Y. V.* Discontinuous Systems: Lyapunov Analysis and Robust Synthesis under Uncertainty Conditions. Communications and Control Engineering. Springer, 2008.

12. *Boiko I.* Discontinuous Control Systems: Frequency-Domain Analysis and Design. Springer London, Limited, 2008.

13. *Luo A.* Discontinuous Dynamical Systems. Higher Education Press, 2012.

14. *Akhmet M.* Principles of Discontinuous Dynamical Systems. Springer, 2010.

15. Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications / M. Bernardo, C. Budd, A. R. Champneys et al. Applied Mathematical Sciences. Springer, 2008.

16. *Fečkan M.* Bifurcation and Chaos in Discontinuous and Continuous Systems. Nonlinear Physical Science. Higher Education Press, 2011.

17. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука: Главная редакция физико-математической литературы, 1985.

18. *Yakubovich V. A., Leonov G. A., Gelig A. Kh.* Stability of stationary sets in control systems with discontinuous nonlinearities. World Scientific Singapore, 2004.

19. *Финогенко И. А.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Серия «Неклассические задачи динамики и управления»; вып. 1. Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2013.

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2014 г.

С в е д е н и я   о б   а в т о р а х

Киселева Мария Алексеевна — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник; maria.kiseleva.87@gmail.com

Кузнецов Николай Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент; nkuznetsov239@gmail.com

COINSIDENCE OF THE GELIG—LEONOV—YAKUBOVICH, FILIPPOV, AND AIZERMAN—PYATNITSKY DEFINITIONS

Maria A. Kiseleva[1], *Nikolay V. Kuznetsov*[1,2]

[1] St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation;
[2] University Jyväskylä, Seminarenkatu 15, Jyväskylä, 40014, Finland
maria.kiseleva.87@gmail.com, nkuznetsov239@gmail.com

This paper studies a class of systems with discontinuous right-hand side, which is widely used in applications. Discontinuous systems are closely related to the concept of "differential inclusion", which was first introduced in the works of A. Marchaud and S. K. Zaremba. In the following work three different ways to define differential inclusions are be given: Filippov, Aizerman—Pyatnitsky and Gelig—Leonov—Yakubovich definitions. For the class of systems under study it is shown when these definitions coincide, and when they differ. Refs 19. Figs 2.

Keywords: differential inclusion, discontinuous system, extended nonlinearity.

References

1. Marchaud A., *Sur les champs continus de demi-droites et les équations différentielles du premier ordre* **62**, 1–38 (1934).

2. Zaremba S. K., "Sur les équations au paratingent", *Bull. Sci. Math.* **60**(2), 139–160 (1936).

3. Carathéodory C., *Vorlesungen über reelle Funktionen* (Leipzig und Berlin, Verlag und Druck Von BG Teubner, 1918).

4. Filippov A. F., "Differential equations with discontinuous right-hand sides", *Matematicheskii Sbornik* **51**(1), 99–128 (1960) [in Russian].

5. Aizerman M. A., Pyatnitskiy E. S., "Fundamentals of the theory of discontinuous systems. I, II", *Avtomatika i Telemechanika* No 7, 8, 33–47, 39–61 (1974) [in Russian].

6. Gelig A. Kh., Leonov G. A., Yakubovich V. A., *Stability of nonlinear systems with a nonunique equilibrium state* (Nauka, 1978) [in Russian].

7. Krasovskiy N. N., Subbotin A. I., *Positional Differential Games* (Nauka, 1974) [in Russian].

8. Cortes Jorge, "Discontinuous dynamical systems", *Control Systems, IEEE* **28**(3), 36–73 (2008).

9. Hui Qing, Haddad MM, Bhat S. "Semistability, finite-time stability, differential inclusions, and discontinuous dynamical systems having a continuum of equilibria", *Automatic Control, IEEE Transactions on.* **54**(10), 2465–2470 (2009).

10. Dieci L., Lopez L., “A survey of numerical methods for IVPs of ODEs with discontinuous right-hand side”, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **236**(16), 3967–3991 (2012).

11. Orlov Y. V., *Discontinuous Systems: Lyapunov Analysis and Robust Synthesis under Uncertainty Conditions. Communications and Control Engineering* (Springer, 2008).

12. Boiko I., *Discontinuous Control Systems: Frequency-Domain Analysis and Design* (Springer London, Limited, 2008).

13. Luo A., *Discontinuous Dynamical Systems* (Higher Education Press, 2012).

14. Akhmet M., *Principles of Discontinuous Dynamical Systems* (Springer, 2010).

15. Bernardo M., Budd C., Champneys A. R., et al. *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications* (Applied Mathematical Sciences, Springer, 2008).

16. Fečkan M., *Bifurcation and Chaos in Discontinuous and Continuous Systems. Nonlinear Physical Science* (Higher Education Press, 2011).

17. Filippov A. F., *Differential equations with discontinuous right-hand side* (Moscow, Nauka, 1985) [in Russian].

18. Yakubovich V. A., Leonov G. A., Gelig A. Kh., *Stability of stationary sets in control systems with discontinuous nonlinearities* (World Scientific Singapore, 2004).

19. Finogenko I. A., *Differential equations with discontinuous right-hand side*, Issue 1 (Series “Non-classical dynamical and control problems” Irkutsk: IDSTU SO RAS, 2013) [in Russian].