УДК 510.51 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 2

СОВМЕСТНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ СВЕРХУ ЗОНЫ И ВРЕМЕНИ ДЛЯ ВЗАИМНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МАШИН ТЬЮРИНГА И АЛГОРИТМОВ МАРКОВА—ПОСТА

Н. К. Косовский, Т. М. Косовская, Н. Н. Косовский

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Доказано, что использование совместно ограниченных сверху по времени и по зоне алгоритмов Маркова—Поста и многоленточных машин Тьюринга взаимозаменяемо с точностью до линейной функции по зоне и полинома по времени машины Тьюринга соответственно. При этом используются не более чем двухбуквенные расширения внешнего алфавита. Библиогр. 4 назв.

Ключевые слова: машина Тьюринга, алгоритм Маркова—Поста, временная и зональная сложность алгоритмов, совместные верхние ограничения сложности.

Введение. В работе рассматривается задача современного раздела математической логики, а именно теории сложности алгоритмов. Многоленточные машины Тьюринга являются эталоном математического понятия алгоритма при оценке памяти и времени в теории сложности алгоритмов [1, 2]. В то же время алгоритмы Маркова—Поста, введённые одним из авторов в [3], значительно более удобны при программировании на них. Их можно рассматривать как существенное обобщение многоленточных машин Тьюринга, сохраняющее итеративность каждого незаключительного правила. Возникает вопрос о соотношении совместных верхних оценок памяти и числа шагов для каждого из этих двух понятий алгоритмов. Теоремы, доказываемые здесь, дают ответ на этот вопрос.

Правила предлагаемой модификации понятия алгоритма Маркова—Поста [3] отличаются от подстановок нормальных алгоритмов Маркова тем, что используются однопосылочные правила Поста, возможно содержащие как переменные для слов, так и переменные для символов. При этом каждая переменная, встречающаяся в заключении правила Поста, должна встречаться и в его посылке. Посылка и заключение однопосылочного правила Поста представляют собой конкатенацию слов в алфавите символов и, возможно, используемых переменных.

Каждое правило Поста применяется детерминированным образом. Для этого все переменные для слов лексикографически упорядочиваются по своим именам. При проверке применимости правила длины их содержимого увеличиваются в цикле на 1, начиная с 0, до длины перерабатываемого слова. Самым внешним циклом является цикл по переменной, имя которой находится первым в лексикографическом порядке. Самым внутренним циклом является цикл по переменной, имя которой находится последним в лексикографическом порядке.

Основные результаты. Поскольку понятие алгоритма Маркова—Поста (с переменными для слов и для символов) является существенным обобщением многоленточной машины Тьюринга, сравнительно легко доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть многоленточная машина Тьюринга M использует более чем однобуквенный внешний алфавит A; имеет одну входную, одну выходную и $k-2$ рабочие ленты; в процессе работы использует на каждой ленте число ячеек, не* *превосходящее $S(n)$, и осуществляет не более $T(n)$ шагов, где n — длина входного слова. Тогда по этой машине Тьюринга можно построить условно равный ей алгоритм Маркова—Поста, использующий двубуквенное расширение алфавита A и дополнительную память размера не более чем $C_M + S(n) \cdot k$ (где C_M — константа, зависящая только от машины M) и совершающая $T(n) + 1$ выполненных правил алгоритма Маркова—Поста.*

Доказательство. При построении алгоритма Маркова—Поста одна дополнительная буква используется для отделения друг от друга содержимого каждой ленты машины Тьюринга. Число вхождений этой буквы в любое неначальное и незаключительное перерабатываемое слово алгоритма Маркова—Поста всегда равно $k - 1$.

Другая дополнительная буква используется для окаймления с двух сторон слова, моделирующего незаключительное состояние машины Тьюринга, которое вписывается в конфигурацию машины Тьюринга перед обозреваемым головкой символом на каждой ленте. Число вхождений этой буквы равно $2k$.

При этом длина перерабатываемого алгоритмом Маркова—Поста слова не может быть больше, чем $C_M + S(n) \cdot k$.

Каждый шаг машины Тьюринга моделируется выполнением одного правила алгоритма Маркова—Поста. Предварительно одним правилом на каждую ленту приписывается два бланковых символа и слово, кодирующее состояние машины Тьюринга, между ними. Эти бланковые символы и заключительное состояние стираются на заключительном шаге алгоритма Маркова—Поста.

Каждая команда машины Тьюринга превращается в правило алгоритма Маркова—Поста. Число выполненных правил такого алгоритма равно $T(n) + 1$. ■

Теорема 2. *Пусть алгоритм Маркова—Поста M' использует более чем однобуквенный алфавит A; в процессе его работы все перерабатываемые слова имеют длину, не превосходящую $S(n)$, и выполняет не более $T(n)$ применений правил, где n — длина входного слова. Тогда можно построить условно равную ему многоленточную машину Тьюринга в однобуквенном расширении алфавита A, работающую на памяти, не превосходящей $C_{M'} + S(n) \cdot V$, где V — максимальное число вхождений переменных для слов в левые части правил, и совершающую не более $C'_{M'} \cdot (T(n) + 1) \cdot (S(n) + 1)^{V+k'}$ шагов, где $C_{M'}$, $C'_{M'}$ и k' — некоторые целые положительные числа, зависящие от M'.*

Схема доказательства. Расширение алфавита A осуществляется введением бланкового символа во внешний алфавит машины Тьюринга. Доказательство теоремы основано на проверке возможности применения очередного правила алгоритма Маркова—Поста с предварительным дублированием перерабатываемого слова на специальной рабочей ленте, а затем моделировании работы этого правила, если установлена возможность его применения. Если правило не применимо, то проверяется возможность применения следующего по прядку записи правила. Если ни одно из правил не применимо, то машина Тьюринга заканчивает свою работу. Число шагов моделирующей машины Тьюринга при этом не превосходит количества правил в M', умноженного на число шагов машины Тьюринга, проверяющей возможность применения очередного правила алгоритма Маркова—Поста и всех предшествующих ему правил в записи алгоритма.

Для моделирования каждого правила используются свои рабочие состояния машины Тьюринга: входные; обеспечивающие пустые начальные значения всех переменных для слов; обеспечивающие переход к следующему шагу цикла; завершение каждого цикла обнулением длины значения его переменной; переход к шагу цикла, непосредственно его содержащему; обеспечивающие сравнение перерабатываемого слова с левой частью правила, в которой все переменные заменены их текущими значениями.

Чтобы избежать экспоненциального числа шагов при переборе всех возможных значений заданной длины у переменной для слов заметим, что длина слова, полученного при замене всех вхождений переменных в левой части правила на слова выбранной длины, должна быть равна длине перерабатываемого слова. Поэтому на каждом шаге проверяем, что сумма длин значений всех переменных, каждая из которых умножена на число её вхождений в левую часть правила, сложенная с суммой длин всех остальных слов, из которых составлена левая часть привила, совпадает с длиной перерабатываемого слова. (В противном случае переходим к следующему шагу соответствующего цикла.) После успешной проверки присваиваем значения всем переменным последовательно слева направо относительно порядка вхождений их в посылку правила алгоритма. (Если хоть одна из переменных получает разные значения, то переходим к следующему шагу соответствующего цикла.)

При удачном сравнении на ленте с перерабатываемым словом записывается правая часть применяемого правила с заменой переменных их текущими значениями. В случае применения заключительного правила алгоритма промежуточное слово переносится на выходную ленту, и машина Тьюринга заканчивает свою работу. Этот перенос производится и тогда, когда ни одно из правил не может быть применено к перерабатываемому слову. В результате машина Тьюринга также заканчивает свою работу.

Значения всех переменных для символов можно хранить на одной дополнительной ленте в формате последовательность пар: (имя переменной, её значение).

Для содержимого каждой переменной для слов, входящих в правило, используется дополнительная лента машины Тьюринга. При этом количество использованных рабочих лент превосходит на 2 максимальное число вхождений переменных для слов в левой части правил среди всех правил алгоритма Маркова—Поста, то есть равно $V + 2$.

На дополнительной ленте формируется значение левой части правила с текущими значениями переменных. Полученное значение левой части правила сравнивается с перерабатываемым словом.

При этом длина использованной части каждой ленты не превосходит $C_{M'} + S(n) \cdot V$, а число шагов не превосходит $C'_{M'} \cdot (T(n) + 1) \cdot (S(n) + 1)^{V+k'}$ для входных слов длины n. Дело в том, что число «микрошагов» алгоритма равно $(T(n) + 1) \cdot (S(n) + 1)^{V}$. Каждый «микрошаг» моделируется за число шагов, не превосходящее полинома от n. ■

Замечание. Доказанные теоремы справедливы и для варианта понятия алгоритма Маркова—Поста, введённого в [4], поскольку в настоящей заметке используется такая модификация алгоритма Маркова—Поста, которая является простым полезным обобщением понятия, введённого там.

Заключение. Доказанная теорема 2 позволяет существенно уточнить и обобщить теорему из [4] (см. также следствие 4 раздела 6.2.2 из [3]). Особенно это касается вида ограничений на параметры полинома, существование которого впервые установлено в теореме из [4].

Литература

1. *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979.

2. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

3. *Яхонтов С. В., Косовский Н. К., Косовская Т. М.* Эффективные по времени и памяти алгоритмические приближения чисел и функций. Учебное пособие. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2012. 256 с.

4. *Косовский Н. К., Косовская Т. М.* Полиномиальный тезис Чёрча для рефал-5 функций, нормальных алгоритмов и их обобщений // Компьютерные инструменты в образовании. №5, 2010. С. 12–21.

Статья поступила в редакцию 2014 г.

Сведения об авторах

Косовский Николай Кириллович — доктор физико-математических наук, профессор; kosov@nk1022.spb.edu

Косовская Татьяна Матвеевна — доктор физико-математических наук, доцент, профессор; kosovtm@gmail.com

Косовский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент; kosovnn@pdmi.ras.ru

UPPER MUTUAL BOUNDS OF SIZE AND TIME FOR A TURING MACHINE AND A MARKOV—POST ALGORITHM FOR MUTUAL SIMULATIONS

Nikolay K. Kosovskiy, Tatiana M. Kosovskaya, Nikolay N. Kosovskiy

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; kosov@nk1022.spb.edu, kosovtm@gmail.com, kosovnn@pdmi.ras.ru

It is proved that the use of a Turing machine and a Markov—Post algorithm having mutual upper bounds upon the time and space are interchangeable up to a linear function of the space and a polynomial under the time of the Turing machine. Not more than two-letters extension of the exterior alphabet is used. Refs 4.

Keywords: Turing machine, Markov—Post algorithm, time and space algorithm complexity, mutual upper bounds of complexity.

References

1. Aho A. V., Hopcroft J. E., Ullman J. D., *The design and analysis of computer algorithms* (Addison-Wesley Publishing Company Reading, Massachusetts, 1976).

2. Garey M. R., Johnson D. S., *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* (Freeman, New York, 1979).

3. Yakhontov S. V., Kosovskii N. K., Kosovskaya T. M., *Efficient upon Time and Space Approximations of Numbers and Functions.* Textbook (St. Petersburg State University Publishing, St. Petersburg, 2012) [in Russian].

4. Kosovskii N. K., Kosovskaya T. M., “Polynomial Church Thesis for Refal-5-Functions, Normal Algorithms and their Generalizations”, *Computer Tools in Education* No 5, 12–21 (2010) [in Russian].