УДК 519.8 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 2

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ РОЛСА О РАЗМЕЩЕНИИ НА ПЛОСКОСТИ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ*

Н. К. Кривулин, П. В. Плотников

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Минимаксная задача размещения одиночного объекта на плоскости с прямоугольной метрикой изучается при помощи методов тропической (идемпотентной) математики. Такая задача, известная как задача Ролса или задача посыльного, возникает при размещении пунктов экстренной помощи (больниц, пожарных депо) в городах с прямолинейными перпендикулярными друг другу улицами. В терминах тропической алгебры задача сводится к минимизации функционала, который задается на множестве трехмерных векторов с помощью подходящим образом составленной матрицы и вычисляется с использованием мультипликативно сопряженного транспонирования. Минимум целевой функции находится при ограничениях на множество допустимых решений в виде некоторого соотношения, которое связывает компоненты векторов. Применяется новый результат спектральной теории матриц в идемпотентной алгебре, который позволяет находить общее решение для задачи минимизации таких функционалов в случае, когда она не имеет дополнительных ограничений. На основе этого результата получено общее решение в терминах тропической алгебры для задачи с ограничениями на допустимое решение. Полученное решение затем использовано для построения полного решения задачи Ролса о размещении, которое обобщает известное частное решение рассматриваемой задачи. Библиогр. 16 назв.

Ключевые слова: идемпотентное полуполе, спектральный радиус матрицы, полное решение, прямоугольная метрика, задача Ролса о размещении.

1. Введение. Модели и методы тропической (идемпотентной) математики, которая занимается теорией и приложениями полуколец с идемпотентным сложением [1–6], находят применение при решении многих задач, включая задачи размещения. Среди примеров таких приложений можно назвать задачи размещения на графах [1, 7] и задачи размещения в пространстве с метрикой Чебышёва или прямоугольной метрикой [8–10].

В работе [8] изучается минимаксная задача размещения одиночного объекта на плоскости с прямоугольной метрикой (метрикой L_1), которая возникает, например, при размещении пунктов экстренной помощи населению (больниц, пожарных депо) в городах с прямолинейными перпендикулярными друг другу улицами. Эта задача известна как задача Ролса, названная так по имени автора теории справедливости, американского философа Дж. Ролса (J. Rawls, 1921–2002), а также как задача посыльного.

Задача Ролса сводится в терминах тропической математики к нахождению таких векторов $\boldsymbol{x}$, при которых достигается минимум в задаче

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x}^{-}$ обозначает мультипликативно сопряженный вектор и $\boldsymbol{A}$ — некоторая матрица.

Известно [11], что минимум в задаче (1) равен спектральному радиусу λ матрицы $\boldsymbol{A}$ и достигается на любом собственном векторе, который отвечает λ. Для решения задачи Ролса в работе [8] потребовалось показать, что на самом деле множество решений задачи (1) шире, чем множество собственных векторов матрицы $\boldsymbol{A}$. Было построено решение задачи Ролса в явном виде, однако проверить, что таким образом получены все решения и других решений нет, при этом не удалось.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ в рамках научного проекта № 13-02-00338.

Новое общее решение задачи (1) при весьма общих условиях было затем найдено в работах [12–14], что позволяет теперь уточнить полученные в [8] результаты. Цель настоящей работы состоит в развитии на основе найденного общего решения задачи (1) нового метода исследования задачи Ролса, который гарантирует ее полное решение.

В работе сначала вводятся основные понятия идемпотентной алгебры, а также описано общее решение задачи (1). Затем рассматривается задача Ролса, которая сводится к задаче (1) с дополнительными ограничениями. Основной результат представлен в заключительном разделе, где построена новая схема решения задачи (1) с учетом ограничений и приведено полное решение рассматриваемой задачи Ролса.

2. Вводные замечания и предварительные результаты. В этом разделе приведен краткий обзор основных понятий и результатов тропической математики, на которые опирается последующее исследование и решение задачи Ролса. Подробное изложение теории и методов тропической математики, а также примеры разнообразных приложений, представлены, например, в работах [1–6].

Пусть числовое множество $\mathbb{X}$ замкнуто относительно операций сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$, а также содержит нуль $\mathbb{0}$ и единицу $\mathbb{1}$. Будем считать, что $\langle\mathbb{X},\mathbb{0},\mathbb{1},\oplus,\otimes\rangle$ является коммутативным полукольцом, в котором сложение идемпотентно (т. е. $x\oplus x=x$), а умножение обратимо (т. е. у каждого элемента $x\neq\mathbb{0}$ существует обратный элемент x^{-1} такой, что $x\otimes x^{-1}=\mathbb{1}$), и называть это полукольцо идемпотентным полуполем.

Целая степень числа в полуполе определяется обычным путем: для любого $x\neq\mathbb{0}$ и целого $n>0$ выполняется $x^0=\mathbb{1}$, $x^n=x^{n-1}\otimes x$, $x^{-n}=(x^{-1})^n$ и $\mathbb{0}^n=\mathbb{0}$. Считается, что операция возведения в степень может быть распространена на случай рационального показателя. В дальнейшем знак умножения $\otimes$ в выражениях будет опускаться. Обозначение степени будет использоваться в смысле идемпотентного полуполя.

Идемпотентное сложение определяет на $\mathbb{X}$ частичный порядок по правилу $x\leq y$ тогда и только тогда, когда $x\oplus y=y$. Операции сложения и умножения в полуполе, очевидно, являются монотонными относительно этого порядка. Предполагается, что частичный порядок может быть продолжен до линейного порядка на $\mathbb{X}$. Заметим, что тогда $\mathbb{X}$ образует делимую упорядоченную абелеву группу по умножению.

Примером идемпотентного полуполя рассматриваемого типа является полуполе вещественных чисел $\mathbb{R}_{\max,+}=\langle\mathbb{R}\cup\{-\infty\},-\infty,0,\max,+\rangle$.

В $\mathbb{R}_{\max,+}$ нулевым элементом является $-\infty$, а единичным — число 0. Каждому элементу $x\in\mathbb{R}$ сопоставляется обратный элемент x^{-1}, равный $-x$ в обычной алгебре. Для любой пары $x,y\in\mathbb{R}$ определена степень x^y, значение которой соответствует арифметическому произведению xy. Порядок, порожденный операцией идемпотентного сложения, совпадает с обычным линейным порядком на множестве $\mathbb{R}$.

Множество столбцов (векторов) порядка n с элементами из $\mathbb{X}$ обозначается $\mathbb{X}^n$. Вектор, все элементы которого равны $\mathbb{0}$, называется нулевым, а вектор, который вообще не имеет нулевых элементов, называется регулярным.

Сложение двух векторов и умножение вектора на число выполняется обычным путем с использованием операций $\oplus$ и $\otimes$.

Вектор $\boldsymbol{b}$ линейно зависит от векторов $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m$, если $\boldsymbol{b}=w_1\boldsymbol{a}_1\oplus\cdots\oplus w_m\boldsymbol{a}_n$, где $w_1,\dots,w_m\in\mathbb{X}$. Как обычно, множество всех линейных комбинаций векторов $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m$ образует линейную оболочку этих векторов.

Для ненулевого вектора $\boldsymbol{a}=(a_i)\in\mathbb{X}^n$ определен мультипликативно сопряженный вектор-строка $\boldsymbol{a}^-=(a_i^-)$, где $a_i^-=a_i^{-1}$, если $a_i\neq\mathbb{0}$, и $a_i^-=\mathbb{0}$ — в противном случае.

Обозначим через $\mathbb{X}^{m\times n}$ множество матриц из m строк и n столбцов, состоящих из элементов множества $\mathbb{X}$. Сложение и умножение матриц, а также умножение на число выполняются по стандартным правилам с заменой обычных операций на $\oplus$ и $\otimes$.

Рассмотрим квадратные матрицы из множества $\mathbb{X}^{n\times n}$. Матрица, диагональные элементы которой равны $\mathbb{1}$, а остальные элементы равны $\mathbb{0}$, называется единичной и обозначается $\boldsymbol{I}$. Для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ и целого $m > 0$ выполняется $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{A}$.

След матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ вычисляется по формуле $\mathrm{tr}\boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}$.

Пусть задана некоторая матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$. Рассмотрим задачу нахождения регулярных векторов $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, при которых достигается минимум в задаче (1).

Чтобы описать общее решение задачи, потребуются следующие определения.

Спектральным радиусом матрицы $\boldsymbol{A}$ называется величина

$$\lambda = \bigoplus_{m=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/m}(\boldsymbol{A}^m).$$

Матрице $\boldsymbol{A}$ можно сопоставить матрицу (известную также как матрица Клини)

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}.$$

В работах [12–14] получено общее решение задачи в следующей форме.

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — матрица со спектральным радиусом $\lambda > \mathbb{0}$ и $\boldsymbol{A}_\lambda = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}$. Тогда минимум в задаче* (1) *равен λ, а общее регулярное решение имеет вид*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_\lambda^*\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n.$$

На основе этого результата ниже будет найдено полное решение минимаксной задачи размещения одиночного объекта на плоскости с прямоугольной метрикой.

3. Задача размещения с прямоугольной метрикой. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана прямоугольная метрика, которая для любых двух векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$ вычисляется в обычной арифметике по формуле

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Рассмотрим следующую минимаксную задачу размещения. Предположим, что для всех $i = 1, \ldots, m$ заданы векторы $\boldsymbol{r}_i = (r_{1i}, r_{2i})^T \in \mathbb{R}^2$ и числа $w_i \in \mathbb{R}$. Требуется найти все векторы $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, при которых достигается минимум

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2} \max_{1\leq i\leq m} (\rho(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{x}) + w_i). \qquad (2)$$

Существует геометрическое решение этой задачи [15, 16], известной как задача Ролса или задача посыльного. Алгебраическое решение в терминах тропической математики было дано в работе [8], однако оставалось неясным, является ли оно полным.

Ниже будет представлено новое доказательство последнего результата, которое показывает, что найденное решение является полным.

Сначала так же, как в работе [8], представим задачу в терминах идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$. Прямоугольная метрика записывается следующим образом:

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (x_1^{-1}y_1 \oplus y_1^{-1}x_1)(x_2^{-1}y_2 \oplus y_2^{-1}x_2).$$

Целевая функция в задаче (2) может быть представлена в форме

$$\bigoplus_{i=1}^{m} w_i(x_1^{-1}r_{1i} \oplus r_{1i}^{-1}x_1)(x_2^{-1}r_{2i} \oplus r_{2i}^{-1}x_2) = ax_1^{-1}x_2 \oplus bx_1x_2^{-1} \oplus cx_1^{-1}x_2^{-1} \oplus dx_1x_2,$$

где после группировки членов использованы обозначения

$$a = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i} r_{2i}^{-1}, \qquad b = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i}^{-1} r_{2i}, \qquad c = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i} r_{2i}, \qquad d = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1}.$$

Тогда задача размещения (2) принимает вид

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2} (ax_1^{-1}x_2 \oplus bx_1x_2^{-1} \oplus cx_1^{-1}x_2^{-1} \oplus dx_1x_2). \tag{3}$$

Чтобы перейти к векторной форме записи, в работе [8] вводятся вектор и матрица:

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & a & \mathbb{0} \\ b & \mathbb{0} & c \\ \mathbb{0} & d & \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Затем исходная двумерная задача сводится к расширенной задаче оптимизации на множестве трехмерных векторов

$$\min_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3} \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}, \tag{4}$$

из числа решений которой следует выбрать те векторы, у которых первый и последний элементы — взаимно-обратные (противоположные — в терминах обычной арифметики).

4. Анализ и новое решение задачи. Пусть λ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}_\lambda = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}$. По теореме 1 минимум в задаче (4) равен λ. Все решения имеют вид

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}_\lambda^{*}\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3, \tag{5}$$

и поэтому образуют линейную оболочку столбцов матрицы $\boldsymbol{A}_\lambda^{*}$.

Для определения спектрального радиуса λ найдем степени матрицы $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} ab & \mathbb{0} & ac \\ \mathbb{0} & ab \oplus cd & \mathbb{0} \\ bd & \mathbb{0} & cd \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & a^2b \oplus acd & \mathbb{0} \\ ab^2 \oplus bcd & \mathbb{0} & abc \oplus c^2d \\ \mathbb{0} & abd \oplus cd^2 & \mathbb{0} \end{pmatrix},$$

а затем вычислим

$$\lambda = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{A}^2) \oplus \operatorname{tr}^{1/3}(\boldsymbol{A}^3) = (ab \oplus cd)^{1/2}.$$

Заметим, что при этом выполняются неравенства $ab \leq \lambda^2$, $cd \leq \lambda^2$ и $abcd \leq \lambda^4$.

Чтобы записать решения расширенной задачи (4), необходимо вычислить матрицу

$$\boldsymbol{A}_\lambda^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A}_\lambda \oplus \boldsymbol{A}_\lambda^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \lambda^{-1}a & \lambda^{-2}ac \\ \lambda^{-1}b & \mathbb{1} & \lambda^{-1}c \\ \lambda^{-2}bd & \lambda^{-1}d & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что второй столбец матрицы $\boldsymbol{A}_\lambda^*$ является линейной комбинацией двух других. Действительно,

$$\lambda^{-1}a \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \lambda^{-1}b \\ \lambda^{-2}bd \end{pmatrix} \oplus \lambda^{-1}d \begin{pmatrix} \lambda^{-2}ac \\ \lambda^{-1}c \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1}a \\ \mathbb{1} \\ \lambda^{-1}d \end{pmatrix}.$$

Тогда для представления всех решений (5) достаточно построить линейную оболочку только первого и последнего столбцов $\boldsymbol{A}_\lambda^*$ в виде

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \lambda^{-2}ac \\ \lambda^{-1}b & \lambda^{-1}c \\ \lambda^{-2}bd & \mathbb{1} \end{pmatrix} \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2.$$

Переходя к скалярной форме записи, получим три равенства:

$$y_1 = v_1 \oplus \lambda^{-2}acv_2, \qquad y_2 = \lambda^{-1}bv_1 \oplus \lambda^{-1}cv_2, \qquad y_3 = \lambda^{-2}bdv_1 \oplus v_2.$$

Для решения исходной задачи сначала нужно найти все векторы $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, которые удовлетворяют этим равенствам и условию для координат

$$y_1 = y_3^{-1}.$$

После этого останется определить все векторы $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$, координаты которых определяются равенствами

$$x_1 = v_1 \oplus \lambda^{-2}acv_2, \qquad x_2 = \lambda^{-1}bv_1 \oplus \lambda^{-1}cv_2. \tag{6}$$

Условие для первой и третьей координаты вектора $\boldsymbol{y}$ записывается в виде

$$v_1 \oplus \lambda^{-2}acv_2 = (\lambda^{-2}bdv_1 \oplus v_2)^{-1}.$$

После умножения на $\lambda^{-2}bdv_1 \oplus v_2$ имеем равенство $\lambda^{-2}bdv_1^2 \oplus v_1v_2 \oplus \lambda^{-2}acv_2^2 = \mathbb{1}$. Полученное равенство равносильно системе неравенств

$$v_1 \leq \lambda b^{-1/2}d^{-1/2}, \qquad v_1v_2 \leq \mathbb{1}, \qquad v_2 \leq \lambda a^{-1/2}c^{-1/2}, \tag{7}$$

в которой хотя бы одно неравенство должно выполняться как равенство.

Рассмотрим три случая, в которых одно из неравенств заменяется равенством.

4.1. Случай 1. Первое неравенство выполняется как равенство. Заменим первое неравенство в (7) равенством, которое будет однозначно определять значение v_1. После подстановки этого значения во второе неравенство имеем систему

$$v_1 = \lambda b^{-1/2}d^{-1/2}, \qquad v_2 \leq \lambda^{-1}b^{1/2}d^{1/2}, \qquad v_2 \leq \lambda a^{-1/2}c^{-1/2}.$$

В силу условия $abcd \leq \lambda^4$ выполняется неравенство $\lambda^{-1}b^{1/2}d^{1/2} \leq \lambda a^{-1/2}c^{-1/2}$, а тогда полученная система сводится к системе

$$v_1 = \lambda b^{-1/2}d^{-1/2}, \qquad v_2 \leq \lambda^{-1}b^{1/2}d^{1/2}.$$

Подставим найденные значения в решение (6). Применяя неравенства $ab \leq \lambda^2$ и $cd \leq \lambda^2$, находим, что $\lambda^{-2}acv_2 \leq \lambda^{-3}ab^{1/2}cd^{1/2} \leq v_1$ и $\lambda^{-1}cv_2 \leq \lambda^{-2}b^{1/2}cd^{1/2} \leq \lambda^{-1}bv_1$.
Тогда решение (6) принимает вид

$$x_1 = v_1 = \lambda b^{-1/2}d^{-1/2}, \qquad x_2 = \lambda^{-1}bv_1 = b^{1/2}d^{-1/2}.$$

Нетрудно проверить, что при условии $\alpha = 1$ решение можно записать в форме

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \lambda^{2\alpha-1}(a^{1-\alpha}b^{-\alpha}c^{1-\alpha}d^{-\alpha})^{1/2} \\ (a^{\alpha-1}b^{\alpha}c^{1-\alpha}d^{-\alpha})^{1/2} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

4.2. Случай 2. Второе неравенство выполняется как равенство. Предположим, что второе неравенство в системе (7) является равенством. В этом случае система принимает вид

$$v_1 \leq \lambda b^{-1/2}d^{-1/2}, \qquad v_1v_2 = \mathbb{1}, \qquad v_2 \leq \lambda a^{-1/2}c^{-1/2}.$$

Воспользуемся равенством $v_2 = v_1^{-1}$. Первое и третье условия системы можно объединить в виде двойного неравенства

$$\lambda^{-1}a^{1/2}c^{1/2} \leq v_1 \leq \lambda b^{-1/2}d^{-1/2}.$$

Чтобы записать решение исходной задачи в форме (6), сначала заметим, что

$$\lambda^{-2}acv_2 \leq \lambda^{-1}a^{1/2}c^{1/2} \leq v_1.$$

При этом, если $\lambda^2 = ab$, то имеем неравенство $\lambda^{-1}cv_2 \leq \lambda^{-1}b^{1/2}c^{1/2} \leq \lambda^{-1}bv_1$, откуда следует, что решение можно записать в виде

$$x_1 = v_1, \qquad x_2 = \lambda^{-1}bv_1, \qquad \lambda^{-1}a^{1/2}c^{1/2} \leq v_1 \leq \lambda b^{-1/2}d^{-1/2}.$$

Введем параметр $0 \leq \alpha \leq 1$ и запишем решение в параметрической форме. Заменим двойное неравенство для v_1 выражением

$$v_1 = a^{\alpha/2}b^{(\alpha-1)/2}c^{(1-\alpha)/2}d^{-\alpha/2} = \lambda^{2\alpha-1}(a^{1-\alpha}b^{-\alpha}c^{1-\alpha}d^{-\alpha})^{1/2}.$$

Заметим, что при $\alpha = 0$ это выражение совпадает с левой границей двойного неравенства для v_1, а при $\alpha = 1$ оно равно правой границе.

После подстановки приходим к результату, который обобщает решение (8) в форме

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \lambda^{2\alpha-1}(a^{1-\alpha}b^{-\alpha}c^{1-\alpha}d^{-\alpha})^{1/2} \\ (a^{\alpha-1}b^{\alpha}c^{1-\alpha}d^{-\alpha})^{1/2} \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{9}$$

В случае, когда $\lambda^2 = cd$, справедливо неравенство $\lambda^{-1}bv_1 \leq \lambda^{-1}b^{1/2}c^{1/2} \leq \lambda^{-1}cv_2$. С учетом этого неравенства имеем

$$x_1 = v_1, \qquad x_2 = \lambda^{-1}cv_2 = c^{1/2}d^{-1/2}v_1^{-1}, \qquad \lambda^{-1}a^{1/2}c^{1/2} \leq v_1 \leq \lambda b^{-1/2}d^{-1/2}.$$

Записывая двойное неравенство для v_1 в параметрическом виде

$$v_1 = a^{(1-\alpha)/2} b^{-\alpha/2} c^{\alpha/2} d^{(\alpha-1)/2} = \lambda^{2\alpha-1} (a^{1-\alpha} b^{-\alpha} c^{1-\alpha} d^{-\alpha})^{1/2},$$

снова получаем решение задачи, представленное как (9).

4.3. Случай 3. Третье неравенство выполняется как равенство. Заменив третье неравенство в системе (7) на равенство, получаем

$$v_1 \leq \lambda b^{-1/2} d^{-1/2}, \qquad v_1 \leq \lambda^{-1} a^{1/2} c^{1/2}, \qquad v_2 = \lambda a^{-1/2} c^{-1/2}.$$

В силу неравенства $\lambda b^{-1/2} d^{-1/2} \geq \lambda^{-1} a^{1/2} c^{1/2}$ система принимает вид

$$v_1 \leq \lambda^{-1} a^{1/2} c^{1/2}, \qquad v_2 = \lambda a^{-1/2} c^{-1/2}.$$

Учитывая, что $v_1 \leq \lambda^{-1} a^{1/2} c^{1/2} = \lambda^{-2} a c v_2$ и $\lambda^{-1} b v_1 \leq \lambda^{-2} a^{1/2} b c^{1/2} \leq \lambda^{-1} c v_2$, имеем

$$x_1 = \lambda^{-2} a c v_2 = \lambda^{-1} a^{1/2} c^{1/2}, \qquad x_2 = \lambda^{-1} c v_2 = a^{-1/2} c^{1/2}.$$

Осталось проверить, что это решение совпадает с (8) при $\alpha = 0$.

4.4. Формулировка основного результата. Результаты анализа задачи (3) для всех рассмотренных случаев можно объединить в виде следующего утверждения, которое уточняет решение, полученное в [8].

Теорема 2. *Минимум* $\lambda = (ab \oplus cd)^{1/2}$ *в задаче* (3) *достигается тогда и только тогда, когда*

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \lambda^{2\alpha-1} (a^{1-\alpha} b^{-\alpha} c^{1-\alpha} d^{-\alpha})^{1/2} \\ (a^{\alpha-1} b^{\alpha} c^{1-\alpha} d^{-\alpha})^{1/2} \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

где

$$a = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i} r_{2i}^{-1}, \qquad b = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i}^{-1} r_{2i}, \qquad c = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i} r_{2i}, \qquad d = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1}.$$

Записывая общий результат в терминах обычных арифметических операций, получим полное решение исходной задачи размещения (2) в следующей форме.

Следствие 1. *Минимум* $\lambda = \max(a+b, c+d)/2$ *в задаче* (2) *достигается тогда и только тогда, когда*

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} (2\alpha-1)\lambda + (1-\alpha)(a+c)/2 - \alpha(b+d)/2 \\ (1-\alpha)(c-a)/2 - \alpha(d-b)/2 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

где

$$a = \max_{1 \leq i \leq m} (w_i + r_{1i} - r_{2i}), \qquad b = \max_{1 \leq i \leq m} (w_i - r_{1i} + r_{2i}),$$
$$c = \max_{1 \leq i \leq m} (w_i + r_{1i} + r_{2i}), \qquad d = \max_{1 \leq i \leq m} (w_i - r_{1i} - r_{2i}).$$

Заметим, что последнее решение по форме соответствует результатам [15, 16].

В заключение авторы выражают благодарность рецензентам за ряд важных замечаний и предложений, которые учтены при подготовке окончательного варианта статьи.

Литература

1. *Cuninghame-Green R. A.* Minimax algebra and applications // Advances in Imaging and Electron Physics / ed. by Peter W. Hawkes. San Diego, CA: Academic Press, 1994. Vol. 90 of Advances in Imaging and Electron Physics. P. 1–121.

2. *Маслов В. П., Колокольцов В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 144 с.

3. *Golan J. S.* Semirings and Affine Equations Over Them: Theory and Applications. New York: Springer, 2003. Vol. 556 of Mathematics and Its Applications. 256 p.

4. *Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J.* Max-plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2006. 226 p.

5. *Кривулин Н. К.* Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 256 с.

6. *Butkovič P.* Max-linear Systems: Theory and Algorithms. Springer Monographs in Mathematics. London: Springer, 2010. 272 p.

7. *Zimmermann K.* Disjunctive optimization, max-separable problems and extremal algebras // Theoret. Comput. Sci. 2003. Vol. 293, N 1. P. 45–54.

8. *Krivulin N. K.* An extremal property of the eigenvalue of irreducible matrices in idempotent algebra and solution of the Rawls location problem // Vestnik St. Petersburg Univ. Math. 2011. Vol. 44, N 4. P. 272–281.

9. *Krivulin N.* A new algebraic solution to multidimensional minimax location problems with Chebyshev distance // WSEAS Trans. Math. 2012. Vol. 11, N 7. P. 605–614.

10. *Krivulin N.* Complete solution of a constrained tropical optimization problem with application to location analysis // Relational and Algebraic Methods in Computer Science / ed. by P. Höfner, P. Jipsen, W. Kahl, M. E. Müller. Springer, 2014. Vol. 8428 of Lecture Notes in Computer Science. P. 362–378.

11. *Cuninghame-Green R. A.* Describing industrial processes with interference and approximating their steady-state behaviour // Oper. Res. Quart. 1962. Vol. 13, N 1. P. 95–100.

12. *Krivulin N.* A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints // Optimization. 2015. Vol. 64, N 5. P. 1107–1129.

13. *Krivulin N.* A constrained tropical optimization problem: Complete solution and application example // Tropical and Idempotent Mathematics and Applications / ed. by G. L. Litvinov, S. N. Sergeev. Providence, RI: AMS, 2014. Vol. 616 of Contemp. Math. P. 163–177.

14. *Krivulin N.* Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems // Linear Algebra Appl. 2015. Vol. 468. P. 211–232.

15. *Elzinga J., Hearn D. W.* Geometrical solutions for some minimax location problems // Transport. Sci. 1972. Vol. 6, N 4. P. 379–394.

16. *Francis R. L.* A geometrical solution procedure for a rectilinear distance minimax location problem // AIIE Trans. 1972. Vol. 4, N 4. P. 328–332.

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2014 г.

Сведения об авторах

Кривулин Николай Кимович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор; nkk@math.spbu.ru

Плотников Павел Владимирович — аспирант; pavplot@gmail.com

ON ALGEBRAIC SOLUTION OF THE RAWLS LOCATION PROBLEM ON THE PLANE WITH RECTILINEAR METRIC

Nikolay K. Krivulin, Pavel V. Plotnikov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; nkk@math.spbu.ru, pavplot@gmail.com

A minimax single-facility location problem with rectilinear metric is examined by using methods of tropical (idempotent) mathematics. This problem, known as the Rawls problem or the messenger problem, appears in the location of emergency services (hospitals, fire stations) in the cities with straight rectangular streets. In terms of idempotent algebra, the problem is reduced to minimizing a functional, given on the set of three-dimensional vectors by an appropriately constructed matrix and calculated by using the multiplicative conjugate transposition. The minimum of the objective function is found subject to constraints in the form of a relation that holds between components of the vectors. A new result of the spectral theory of matrices in idempotent algebra is applied, which offers a general solution to the problem of minimizing such functionals without additional constraints. Based on the result, a general solution to the problem with constraints on the feasible solution is given in terms of the tropical algebra. The solution obtained is then used to derive a complete solution to the Rawls location problem, which extends a known particular solution of the problem under consideration. Refs 16.

Keywords: idempotent semifield, spectral radious of matrix, complete solution, rectilinear metric, the Rawls location problem.

References

1. Cuninghame-Green R. A. “Minimax algebra and applications”, *Advances in Imaging and Electron Physics* / ed. by Peter W. Hawkes. San Diego, CA: Academic Press, 1994. Vol. 90 of Advances in Imaging and Electron Physics. P. 1–121.

2. Maslov V. P., Kolokoltsov V. N., *Idempotent Analysis and Its Applications to Optimal Control Theory* (Moscow, Nauka, 1994) [in Russian].

3. Golan J. S. *Semirings and Affine Equations Over Them: Theory and Applications* (New York, Springer, 2003. Vol. 556 of Mathematics and Its Applications) 256 p.

4. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. “Max-plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems”, *Princeton Series in Applied Mathematics* (Princeton, NJ, Princeton University Press, 2006) 226 p.

5. Krivulin N. K., *Methods of Idempotent Algebra for Problems in Modeling and Analysis of Complex Systems* (St. Petersburg, Saint Petersburg Univ. Press, 2009) [in Russian].

6. Butkovič P. *Max-linear Systems: Theory and Algorithms*, Springer Monographs in Mathematics (London, Springer, 2010) 272 p.

7. Zimmermann K. “Disjunctive optimization, max-separable problems and extremal algebras”, *Theoret. Comput. Sci.* **293**(1), 45–54 (2003).

8. Krivulin N. K. “An extremal property of the eigenvalue of irreducible matrices in idempotent algebra and solution of the Rawls location problem”, *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **44**(4), 272–281 (2011).

9. Krivulin N. “A new algebraic solution to multidimensional minimax location problems with Chebyshev distance”, *WSEAS Trans. Math.* **11**(7), 605–614 (2012).

10. Krivulin N. “Complete solution of a constrained tropical optimization problem with application to location analysis”, *Relational and Algebraic Methods in Computer Science* / ed. by P. Höfner, P. Jipsen, W. Kahl, M. E. Müller (Switzerland, Springer, 2014). Vol. 8428 of Lecture Notes in Computer Science. P. 362–378.

11. Cuninghame-Green R. A. “Describing industrial processes with interference and approximating their steady-state behaviour”, *Oper. Res. Quart.* **13**(1), 95–100 (1962).

12. Krivulin N. “A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints”, *Optimization* 1–23 (2013).

13. Krivulin N. “A constrained tropical optimization problem: Complete solution and application example”, *Tropical and Idempotent Mathematics and Applications* / ed. by G. L. Litvinov, S. N. Sergeev (Providence, RI, AMS, 2014). Vol. 616 of Contemp. Math. P. 163–177.

14. Krivulin N. “Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems”, *Linear Algebra Appl.* 1–22 (2014).

15. Elzinga J., Hearn D. W. “Geometrical solutions for some minimax location problems”, *Transport. Sci.* **6**(4), 379–394 (1972).

16. Francis R. L. “A geometrical solution procedure for a rectilinear distance minimax location problem”, *AIIE Trans.* **4**(4), 328–332 (1972).