УДК 519.21 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 2

О ГРАНИЦАХ ДЛЯ ДИСПЕРСИИ ЧИСЛА НУЛЕЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОГО ГАУССОВСКОГО СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА*

Р. Н. Мирошин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Известно, что дисперсия числа нулей дифференцируемого гауссовского стационарного процесса с непрерывной компонентой в спектре корреляционной функции представляется интегралом от сложной подынтегральной функции. Ранее автор получил как верхнюю, так и нижнюю границы этого интеграла в аналитическом виде при определенных условиях. В статье эти условия проверяются для нескольких классов процессов, которые включают в себя марковские процессы первого порядка и два класса аналитических процессов. Кроме того, показано, что дисперсия числа нулей может быть получена с помощью этих границ и для процесса с корреляционной функцией, которая не имеет непрерывной компоненты в спектре. Для определенного аналитического процесса возможно записать дисперсию числа нулей в элементарных функциях (ранее такие формулы были известны только для двух процессов). Библиогр. 12 назв.

Ключевые слова: дифференцируемый гауссовский стационарный процесс, неравенства для дисперсии числа нулей, корреляционная функция, косинус процесс, аналитический процесс, дисперсии числа нулей в элементарных функциях.

Аналитическое представление моментов числа нулей случайных процессов нужно в приложениях, например в радиотехнике [1] и в теории разреженного газа [2]. Хотя формулы, связывающие факториальные моменты числа нулей с конечномерными плотностями распределения процесса, известны с 1944 г. [3], для произвольного гауссовского стационарного дифференцируемого процесса простое выражение получено только для среднего числа нулей (формула Райса [3]). В некоторых частных случаях, правда, найдены простые формулы всех моментов (для *косинус-процесса* [4] и для *процесса Уонга* [5]), но в остальном даже дисперсия выражается интегралом от сложной функции [5]. Поэтому имеет смысл определять аналитические границы той же дисперсии, что сделано в [6] в общем виде и проиллюстрировано несколькими примерами. В данной статье увеличено число таких примеров. В частности, использованы границы из [6] для установления дисперсии числа нулей косинус-процесса посредством предельного перехода от некоторого сглаженного процесса (пример 1). Доказана также применимость указанных границ к двум семействам аналитических процессов (примеры 2 и 5) и к семейству марковских процессов первого порядка (пример 3). К ранее известным аналитическим выражениям через элементарные функции дисперсии числа нулей (для процесса Уонга и для одного из возвратных процессов [7]) добавлена подобная формула для одного из аналитических процессов (пример 4).

Далее рассматривается дифференцируемый гауссовский стационарный процесс ξ_t с нулевым средним $\mathbf{M}\xi_t = 0$ и корреляционной функцией $p(t) = \mathbf{M}\xi_0\xi_t$. Масштабы по осям координат выбраны таким образом, чтобы $p(0) = -p''(0) = 1$, с целью исключить масштабные множители, загромождающие формулы (это общности не нарушает). Пусть случайная величина η_t — число нулей ξ_t на интервале $[0, t]$. Согласно Райсу [3] среднее число нулей равно

$$N_1(t) \equiv \mathbf{M}\eta_t = \frac{t}{\pi}\,.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (грант 6.0.24.2010).

Дисперсия $\mathbf{D} = \mathbf{M}(\eta_t - \mathbf{M}\eta_t)^2$ определяется вторым факториальным моментом $N_2(t) = \mathbf{M}\eta_t(\eta_t - 1)$ и средним N_1 по формуле

$$\mathbf{D}(t) = N_2(t) + N_1(t) - N_1^2(t),$$

где (см. [4], [7])

$$N_2(t) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^t (t-\tau)(-f'')(\alpha + \operatorname{ctg}\,\alpha)d\tau\,, \tag{1}$$

$$f \equiv f(\tau) = \arccos p(\tau), \quad \sin\alpha = -\frac{f''\sin f}{1-(f')^2}, \tag{2}$$

причем штрихом отмечена операция дифференцирования. Формула (1) выведена для гауссовских процессов, корреляционная функция которых дважды дифференцируема и имеет непрерывную компоненту в спектре.

В целях упрощения выкладок положим

$$p \equiv p(\tau), \quad q = -p', \quad r = -p'', \quad k_2 = 1 - p^2 - q^2, \quad k_6 = p(pr + q^2) - r. \tag{3}$$

Тогда в силу (2)

$$-f'' = \frac{k_6}{(\sqrt{1-p^2})^3}, \qquad \sin\alpha = \frac{k_6}{k_2}\,. \tag{4}$$

В [6] с помощью формулы (1) доказано следующее утверждение:
если $k_6 \geq 0$ в $[0, t]$, то

$$\boxed{A_- J(t) \leq N_2(t) \leq A_+ J(t)}, \tag{5}$$

где

$$J(t) = t - \arccos p(t),$$

а константы A_- и A_+ суть

$$A_- = \frac{2}{\pi^2}\min_{0\leq\tau\leq t}(\alpha + \operatorname{ctg}\,\alpha), \quad A_+ = \frac{2}{\pi^2}\max_{0\leq\tau\leq t}(\alpha + \operatorname{ctg}\,\alpha). \tag{6}$$

Когда во всем интервале $[0, t]$

$$(\sin\alpha)' \leq 0, \tag{7}$$

границы (6) легко вычисляются:

$$A_- = \frac{2}{\pi^2}[\alpha(0) + \operatorname{ctg}\,\alpha(0)], \quad A_+ = \frac{2}{\pi^2}[\alpha(t) + \operatorname{ctg}\,\alpha(t)], \tag{8}$$

поскольку функция $\alpha + \operatorname{ctg}\,\alpha$ неубывающая:

$$(\alpha + \operatorname{ctg}\,\alpha)' = -\alpha' \cdot \operatorname{ctg}^2\,\alpha \geq 0.$$

Покажем на примере, что неравенство (5) можно использовать и в случае, когда спектр $p(t)$ не имеет непрерывной компоненты, подобрав семейство корреляционных функций $p_\beta(t)$ с непрерывной компонентой в спектре, для которого $p(t)$ является предельной при $\beta \to 0$.

Пример 1. Для *косинус-процесса*

$$p(t) = 1 - \mu^2 + \mu^2 \cos\Big(\frac{t}{\mu}\Big), \quad 0 < \mu \le 1.$$

Спектр $p(t)$ — сумма двух δ-функций, поэтому (1) нельзя применять. Рассмотрим сглаженную корреляционную функцию

$$p_\beta(t) = 1 - \mu^2 + \mu^2 \exp\left(-\frac{\beta|t|}{\mu}\right)\left[\cos\frac{t\sqrt{1-\beta^2}}{\mu} + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\sin\frac{|t|\sqrt{1-\beta^2}}{\mu}\right], \tag{9}$$

имеющую в спектре непрерывную компоненту и тем самым допускающую формулу (1). Для (9) равномерно по t в конечном интервале $p_\beta(t) \to p(t)$ при $\beta \downarrow 0$.

Нетрудно проверить, что для $p_\beta(t)$ при $\beta \downarrow 0$ в интервале $[0, t]$ из (3)–(4) вытекает

$$k_6 \to k_2, \quad k_2 \to \mu^2(1-\mu^2)\Big[1 - \cos\frac{t}{\mu}\Big]^2, \quad \sin\alpha \to 1, \quad \alpha \to \frac{\pi}{2}\,. \tag{10}$$

В силу непрерывности по β функции (9) при достаточно малых β заключаем из (10), что $k_6 \ge 0$, т. е. справедливо неравенство (5). Переходя в нем к пределу при $\beta \downarrow 0$, получаем

$$J \to t - \arccos p(t), \quad A_- \to \frac{1}{\pi}, \quad A_+ \to \frac{1}{\pi}\,.$$

Таким образом, для косинус-процесса

$$N_2(t) = \frac{t}{\pi} - \frac{\arccos p(t)}{\pi}\,. \tag{11}$$

Так как

$$\arccos p(t) = 2\arcsin\Big(\mu \sin\frac{t}{2\mu}\Big), \quad 0 \le t \le 2\pi\mu\,,$$

из (11) находим известное значение $N_2(t)$ для косинус-процесса

$$N_2(t) = \frac{t}{\pi} - \frac{2}{\pi}\arcsin\Big(\mu \sin\frac{t}{2\mu}\Big), \quad 0 \le t \le 2\pi\mu\,.$$

В следующих примерах рассматриваются несколько корреляционных функций, для которых доказываются (5) и (8). Наибольшие трудности возникают при доказательстве (7).

Пример 2. Функция

$$p(t) = \frac{2}{2+t^2} \tag{12}$$

— корреляционная по теореме Бохнера, так как ее спектральная плотность неотрицательна ([9], с. 17(11)). У $p(t)$ есть все производные, т. е. (12) — корреляционная функция аналитического процесса. Для нее равенства (3) имеют следующий вид:

$$q = p^2\tau, \quad r = p^2(1-2p\tau^2), \quad k_2 = \frac{\tau^4(20+8\tau^2+\tau^4)}{(2+\tau^2)^4}, \quad k_6 = \frac{4\tau^4}{(2+\tau^2)^5}(10+3\tau^2) \ge 0, \tag{13}$$

так что по (4)

$$\sin\alpha = -\frac{4(10+3\tau^2)}{(2+\tau^2)(20+8\tau^2+\tau^4)}\,. \tag{14}$$

Дифференцируя (14) по τ, находим

$$(\sin\alpha)' = -\frac{8\tau C}{(2+\tau^2)^2(20+8\tau^2+\tau^4)^2} \le 0, \tag{15}$$

ибо $C = 240 + 200\tau^2 + 60\tau^4 + 6\tau^6 > 0$.

Итак, $k_6 \ge 0$ (см. (13)), а $\sin\alpha$ не возрастает в $[0,t]$ (см. (14)). Поэтому справедливо неравенство (5) с границами (8), причем $A_- = 1/\pi$, поскольку $\alpha(0) = \pi/2$.

Пример 3. Пусть

$$p(t) = 2\varphi(t) - \varphi^2(t), \quad \varphi(t) = \exp\Bigl(-\frac{|t|}{\sqrt{2}}\Bigr).$$

Это частный случай (при $\delta = 1$) корреляционной функции

$$p_\delta(t) = \frac{1+\delta}{\delta}\varphi(t) - \frac{1}{\delta}\varphi^{1+\delta}(t), \quad \varphi(t) = \exp\Bigl(-\frac{|t|}{\sqrt{1+\delta}}\Bigr), \quad \delta > 0, \tag{16}$$

для которой гауссовский процесс (ξ_t, ξ_t') — марковский [10, с. 95]. Обозначим

$$\varphi \equiv \varphi(\tau), \quad p \equiv 2\varphi - \varphi^2,$$

так что

$$k_6 = \varphi(1-\varphi)^3(1+\varphi), \quad k_2 = (1-\varphi)^3(1+3\varphi), \quad \sin\alpha = \varphi\,\frac{1+\varphi}{1+3\varphi}. \tag{17}$$

Дифференцируя $\sin\alpha$ по τ, получаем

$$(\sin\alpha)' = -\varphi\,\frac{1+2\varphi+3\varphi^2}{\sqrt{2}(1+3\varphi)^2} \le 0. \tag{18}$$

Таким образом, $k_6 \ge 0$ и $\sin\alpha$ не возрастает при любых $\tau \ge 0$, т.е. имеет место неравенство (5) с границами (8). Из (17) видим, что $\sin\alpha(0) = 1/2$, т.е. $\alpha(0) = \pi/6$, так что

$$A_- = \frac{2}{\pi^2}\Bigl(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\Bigr).$$

При $\delta = 2$ функция (16) — корреляционная функция процесса Уонга, рассмотренного в [7]. Для остальных $\delta > 0$ доказать, что $k_6 \ge 0$, нетрудно. Именно [10, с. 96],

$$k_6\delta = \varphi m_6, \quad m_6 = 1 - \varphi^{2+2\delta} - (1+\delta)\varphi^\delta(1-\varphi^2).$$

Дифференцируя m_6 по τ, получаем

$$m_6' = \sqrt{1+\delta}\,\varphi^\delta[\delta + 2\varphi^{2+\delta} - (2+\delta)\varphi^2]. \tag{19}$$

В свою очередь, дифференцируя выражение в квадратной скобке в (19) по τ, находим, что его производная неотрицательна:

$$\frac{2\varphi^2}{\sqrt{1+\delta}}\,(2+\delta)(1-\varphi^\delta) \ge 0,$$

т. е. это выражение не убывает, принимая минимальное значение 0 при $\tau = 0$. Тем самым $m_6' \geq 0$ в (19) и m_6 возрастает от нуля, т. е. m_6 и k_6 неотрицательны и неравенство (5) справедливо. Докажем, что $(\sin\alpha)' \leq 0$. Так как

$$(\sin\alpha)' = \frac{\varphi'}{k_2^2\delta}\,\Omega(\varphi), \quad \Omega(\varphi) = \Big(m_6 + \varphi\,\frac{dm_6}{d\varphi}\Big)k_2 - \varphi m_6\frac{dk_2}{d\varphi} \tag{20}$$

и $\varphi' \leq 0$, достаточно доказать, что $\Omega \geq 0$. Согласно [11, с. 96]

$$k_2\delta^2 = \delta^2 - (2+\delta)(1+\delta)\varphi^2 + 4(1+\delta)\varphi^{2+\delta} - (2+\delta)\varphi^{2+2\delta} \geq 0,$$

так что

$$\frac{dk_2}{d\varphi} = -\frac{2}{\delta^2}\varphi(1-\varphi^\delta)^2 \leq 0.$$

Поэтому, в силу (20), если

$$A \equiv m_6 + \varphi\frac{dm_6}{d\varphi} = 1 - (3+2\delta)\varphi^{2+2\delta} - (1+\delta)^2\varphi^\delta + (1+\delta)(3+\delta)\varphi^{2+\delta} \geq 0, \tag{21}$$

то $(\sin\alpha)' \leq 0$. Докажем неравенство (21). Дифференцируем (21) по φ:

$$\frac{dA}{d\varphi} = (1+\delta)\varphi^{\delta-1}B(\varphi), \quad B(\varphi) = -\delta(1+\delta) - 2(3+2\delta)\varphi^{2+\delta} + (2+\delta)(3+\delta)\varphi^2.$$

Функция $B(\varphi)$ имеет экстремумы в точках $\varphi = 0$ (максимум), $\varphi_0 = (3+\delta)/(3+2\delta)$ (минимум), в чем можно убедиться, продифференцировав $B(\varphi)$, причем $B(0) = -\delta(1+\delta) < 0$, $B(\varphi_0) = \delta(1+\delta)[-1+(3+\delta)\varphi_0^2/(3+2\delta)] < 0$ и $B(1) = 0$. Таким образом, $dA/d\varphi \leq 0$ и $A(\varphi)$ не возрастает при $\varphi \in [0,1]$, $A(0) = 1$, $A(1) = 0$, т. е. $A \geq 0$, и тем самым доказано, что α не возрастает и границы (8) имеют место.

Пример 4. Спектральная плотность функции

$$p(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t} \tag{22}$$

согласно [9, с. 37(1)] положительна, т. е. (22) — корреляционная функция некоторого стационарного процесса, причем этот процесс аналитический по крайней мере в гауссовской версии. Нетрудно проверить, что для (22)

$$-f'' = q \equiv -p', \quad \sin\alpha = p,$$

так что $N_2(t)$ в (1) представляется в следующем виде:

$$N_2(t) = -\frac{2}{\pi^2}\int_0^t (t-\tau)p'\Big(\frac{\sqrt{1-p^2}}{p} + \arcsin p\Big)d\tau\,,$$

или, интегрируя по частям, в виде

$$N_2(t) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^t K(\tau)d\tau\,, \tag{23}$$

где

$$K(\tau) = \int_{p(\tau)}^1 \Big(\frac{\sqrt{1-p^2}}{p} + \arcsin p\Big)dp = \frac{\pi}{2} + \ln\frac{1+\sqrt{1-p^2}}{p} - 2\sqrt{1-p^2} - p\cdot\arcsin p. \tag{24}$$

При выводе (23) использовались равенства $p(0) = 1$ (см. (22)) и $K(0) = 0$ (см. (24)), а при выводе (24) — таблицы интегралов (например, [11]).

Подставив правую часть (24) в (23) и снова воспользовавшись таблицами интегралов [11], находим, что

$$N_2(t) = \Big(\frac{t}{\pi}\Big)^2 + \frac{t}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}\ln p(t) - \frac{1}{4} + \Big(\frac{\arcsin p(t)}{\pi}\Big)^2, \quad p(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t}.$$

Этой формулой пополнился пока немногочисленный набор простых представлений для $N_2(t)$.

Пример 5. Согласно [9, с. 37 (3, 4)] функция

$$p(t) \equiv p_n(t) = \Big(\operatorname{ch}\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^{-n}, \tag{25}$$

где n — целое число, имеет неотрицательную спектральную плотность, т. е. является корреляционной функцией с непрерывным спектром, причем, как и при $n = 1$ (в примере 4), аналитического гауссовского процесса. Обозначив $x = \tau/\sqrt{n}$, имеем

$$q = \sqrt{n}\,\frac{\operatorname{sh} x}{(\operatorname{ch} x)^{n+1}}, \quad r = \frac{\operatorname{ch}^2 x - (n+1)\operatorname{sh}^2 x}{(\operatorname{ch} x)^{n+2}}, \tag{26}$$

$$k_2 = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^{2n+2}}[\operatorname{ch}^2 x(\operatorname{ch}^{2n} x - 1) - n(\operatorname{ch}^2 x - 1)], \tag{27}$$

$$k_6 = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^{3n+2}}[1 + n\operatorname{ch}^{2n+2} x - (n+1)\operatorname{ch}^{2n} x] \geq 0, \tag{28}$$

т. е. неравенство (5) справедливо. Докажем, что и $(\sin\alpha)' \leq 0$. Очевидно,

$$k_2 = \frac{(y-1)^2 Q_n(y)}{y^{n+1}}, \quad k_6 = \frac{(y-1)^2 P_n(y)}{y^{3n/2+1}},$$

где $y = \operatorname{ch}^2 x$,

$$P_n(y) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)y^k, \quad Q_n(y) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)y^{n-k-1}.$$

Поэтому

$$\sin\alpha \equiv \frac{k_6}{k_2} = \frac{1}{(\sqrt{y})^n}\,\frac{P_n(y)}{Q_n(y)}. \tag{29}$$

Дифференцируем (29) по y:

$$(\sin\alpha)'_y = \frac{\Omega(y)}{2y^{n/2+1}Q_n^2(y)}, \tag{30}$$

где

$$\Omega(y) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=k}^{k+n-1} A_{km}(n)y^m = \sum_{m=0}^{n-1} y^m \sum_{k=0}^{m} A_{km}(n) + \sum_{m=n}^{2n-2} y^m \sum_{k=m-n-1}^{n-1} A_{km}(n), \tag{31}$$

$$A_{km}(n) = (k+1)(n-m+k)(4k-n-2m).$$

Обозначим

$$B_m(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{m} A_{km}(n), & 0 \le m \le n-1, \\ \sum_{k=m-n-1}^{n-1} A_{km}(n), & n \le m \le 2n-2. \end{cases}$$

Тогда (31) запишется в виде

$$\Omega(y) = \sum_{m=0}^{2n-2} B_m(n) y^m. \tag{32}$$

Используя известные формулы для конечных сумм первых трех степеней k (см. [12, с. 15]), получаем

$$6B_m(n) = (m+1)(m+2)C_m(n), \tag{33}$$

где $C_m(n)$ — отрицательные коэффициенты:

$$C_m(n) = \begin{cases} -3n(n-m) + 2m, & 0 \le m \le n-1, \\ 3n(n-m) - 2n - 2m - 4, & n \le m \le 2n-2, \end{cases}$$

т. е. $B_m(n) \le 0$. В силу (33), (32) и (30) отсюда следует, что $(\sin\alpha)' \le 0$ и справедливы границы (7), в частности, $A_- = 1/\pi$.

Замечания. 1. Так как для фиксированного $\tau \ge 0$ при $n \to \infty$ очевидно

$$p_n(\tau) \to \exp\Big(-\frac{\tau^2}{2}\Big) \equiv p_0(\tau),$$

$N_2(t)$ в пределе $n \to \infty$ совпадает с $N_2(t)$ для аналитического процесса с корреляционной функцией $p_0(t)$, рассмотренного в [7].

2. Для корреляционной функции (25) можно переписать формулу (1) так, что часть подынтегральной функции при множителе $(t-\tau)$ окажется зависящей только от переменной p. Действительно, в (26)–(28) заменяем $\operatorname{sh} x$ на $\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$, а затем $\operatorname{ch} x$ — на $p^{-1/n}$. Далее делаем замену переменной $x = \tau/\sqrt{n}$ и получаем из (1)

$$N_2(t) = \frac{2n}{\pi^2} \int_0^{\epsilon} (\epsilon - x) F_n(x) dx, \tag{34}$$

где $\epsilon = t/\sqrt{n}$, $F_n(x) = -f''(\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)$, а f и α в $F_n(x)$ вычислены для $p(x) = (\operatorname{ch} x)^{-n}$.

Литература

1. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.
2. *Аксенова О. А., Халидов И. А.* Шероховатость поверхности в аэродинамике разреженного газа: фрактальные и статистические модели. СПб.: Изд-во ВВМ, 2004. 120 с.
3. *Райс С. О.* Математический анализ случайного шума / пер. с англ. // Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. М., 1953. С. 88–238. (*Rice S. O.* Mathematical analysis of random noise // Bell System Tech. J. 1944. Vol. 23. P. 282–332; 1945. Vol. 24. P. 46–156.)
4. *Мирошин Р. Н.* О дисперсии числа нулей гауссовского стационарного процесса. // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2001. Вып. 1. С. 40–47.
5. *Мирошин Р. Н.* О распределении числа нулей процесса Уонга на большом интервале времени // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5. Вып. 3. С. 809–816.
6. *Мирошин Р. Н.* Простое неравенство для дисперсии числа нулей дифференцируемого гауссовского стационарного процесса // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2014. Т. 1(59). Вып. 3. С. 399–409.

7. *Мирошин Р. Н.* Случайные процессы и поля (учебное пособие). СПб.: НИИХ С.-Петерб. ун-та, 2003. 284 с.

8. *Steinberg H., Schultheiss P. M., Wogrin C. A., Zweig F.* Short time frequency measurements of narrow-band random signals by means of a zero counting process // J. Appl. Phys. 1955. Vol. 26. N 2. P. 195–201.

9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: в 3 т. М.: Наука, 1965. Т. 1. 294 с.

10. *Мирошин Р. Н.* Пересечения кривых гауссовскими процессами. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 212 с.

11. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1966. 228 с.

12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2014 г.

Сведения об авторе

Мирошин Роман Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор; miroshin-roman1938@yandex.ru

ON BOUNDS FOR THE VARIANCE OF THE NUMBER OF ZEROS OF DIFFERENTIABLE GAUSSIAN STATIONARY PROCESS

Roman N. Miroshin

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; miroshin-roman1938@yandex.ru

It is known that the variance of the number of zeros of differentiable Gaussian stationary process with the continuous component in the spectrum of a correlation function can be represented by the integral of a sophisticated integrand. Previously, author obtained both upper and lower bounds of this integral under certain conditions in analytical form. In the article, these conditions are checked for several classes of processes, which include part of the first-order Markov processes and two classes of analytic processes. Furthermore, it is shown that the variance of the number of zeros can be obtained with these bounds for process with the correlation function, which has no continuous component in the spectrum. For certain analytic process it is possible to write the variance of the number of zeros in elementary functions (previously such formulas were known for only two processes). Refs 12.

Keywords: differentiable Gaussian stationary process, inequalities for the variance of the number of zeros, correlation function, cosine process, analytic process, the variance of the number of zeros in elementary functions.

References

1. Tikhonov V. I., *Statistical Radio Electronics*, (Radio i svyaz, Moscow, 1982) [in Russian].

2. Aksenova O. A., Khalidov I. A., *Surface roughness in the aerodynamics of rarefied gas: fractal and statistical models*, (VVM, St. Petersburg, 2004) [in Russian].

3. Rice S. O., "Mathematical analysis of random noise", *Bell System Tech. J.* **23**, 282–332 (1944); **24**, 46–156 (1945).

4. Miroshin R. N., "On the variance of the number of zeros of a stationary Gaussian process", *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **34**(1), 30–35 (2001).

5. Miroshin R. N., "On the distribution of the number of zero-crossings of Wong process for a large time interval", *Fundam. Prikl. Mat.* **5**, Iss. 3, 809–816 (1999) [in Russian].

6. Miroshin R. N., "A simple inequality for the variance of the number of zeros of a differentiable Gaussian stationary process" *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **47**(3), 115–122 (2014).

7. Miroshin R. N., *Random processes and fields (Tutoreal)*, (NIIKH of St. Petersburg Univ., St. Petersburg, 2003) [in Russian].

8. Steinberg H., Schultheiss P. M., Wogrin C. A., Zweig F., "Short time frequency measurements of narrow-band random signals by means of a zero counting process", *J. Appl. Phys.* **26**(2), 195–201 (1955).

9. Bateman H., Erdélyi A., "Higher transcendental functions", **1**, 294 p. (McGrow-Hill, 1953).

10. Miroshin R. N., *Curve-crossings of Gaussian processes*, (Leningr. univ., Leningrad, 1981) [in Russian].

11. Dwight H. B., *Tables of integrals and other mathematical data*, (McMillan, 1961).

12. Gradstein I. S., Ryzhyk I. M., "Tables of integrals, sums, series and products", 1108 p. (Nauka, Moscow, 1971) [in Russian].