УДК 517.938 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 2

ГЁЛЬДЕРОВО ОТСЛЕЖИВАНИЕ В СЛУЧАЕ КУБИЧЕСКОГО КАСАНИЯ*

А. А. Петров

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Рассматривается модельный пример диффеоморфизма f двумерной поверхности, удовлетворяющего аксиоме A, в случае кубического касания одномерных устойчивого и неустойчивого многообразий. Доказывается, что в случае, если отображение f обладает классом гладкости C^2, оно обладает гёльдеровым свойством отслеживания с показателем Гёльдера $\frac{1}{3}$. Строится пример диффеоморфизма f класса гладкости C^1, обладающего гёльдеровым свойством отслеживания с показателем Гёльдера $\frac{1}{4}$, но не обладающего гёльдеровым свойством отслеживания с показателем Гёльдера $\gamma > \frac{1}{4}$. Библиогр. 4 назв.

Ключевые слова: динамические системы, отслеживание, кубическое касание, аксиома A.

Введение. В данной работе исследуется вопрос о наличии свойства гёльдерова отслеживания у системы, удовлетворяющего аксиоме A, но не удовлетворяющего условию строгой трансверсальности.

Отметим работу [1], в которой также рассматривается вопрос гёльдерова отслеживания. В ней доказывается, что если для любых $\theta, \omega > 1/2$, любая d-псевдотраектория длины $\sim 1/d^\omega$ диффеоморфизма f класса гладкости C^2 может быть d^θ-отслежена точной, то диффеоморфизм f структурно устойчив.

Одной из отправных точек для данной работы послужила статья [2]. В ней доказано, что в случае, когда M есть поверхность (т. е. замкнутое двумерное многообразие) и диффеоморфизм f удовлетворяет аксиоме A, следующие два утверждения эквивалентны:

(1) f обладает свойством отслеживания,

(2) f удовлетворяет условию C^0-трансверсальности.

В данной же работе мы исследуем вопрос о гёльдеровом свойстве отслеживания в случае кубического касания устойчивого и неустойчивого многообразий C^k-диффеоморфизма f поверхности M (где $k \in \mathbb{N}$). Естественной гипотезой в таком случае является следующая: f обладает гёльдеровым свойством отслеживания с показателем Гёльдера $\frac{1}{3}$. Для модельного примера диффеоморфизма f мы показываем, что это так, если класс гладкости f хотя бы C^2. Также мы строим пример диффеоморфизма f класса гладкости C^1, обладающего гёльдеровым свойством отслеживания с показателем Гёльдера $\frac{1}{4}$ и не обладающего гёльдеровым свойством отслеживания с показателем Гёльдера $\gamma > \frac{1}{4}$.

1. Основные определения. Пусть M — метрическое пространство с метрикой dist, $f \colon M \to M$ — непрерывное отображение.

В данной работе через I мы будем обозначать подмножество $\mathbb{Z}$, являющееся одним из следующих интервалов: $(-\infty, a] \cap \mathbb{Z}$, $[a, \infty) \cap \mathbb{Z}$ или $[a, b] \cap \mathbb{Z}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$.

Нам потребуются следующие три определения.

*Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (проект 6.38.223.2014).

Определение 1. *Пусть $\xi = \{\xi_i\}_{i \in I}$ — последовательность точек в M, и пусть дано число $d > 0$. Будем говорить, что ξ является d-псевдотраекторией для f, если выполнены неравенства*

$$\operatorname{dist}(f(\xi_i), \xi_{i+1}) \leq d, \quad i, i+1 \in I.$$

Определение 2. *Пусть $\xi = \{\xi_i\}_{i \in I} \subset M$ — d-псевдотраектория для f. Будем говорить, что точка $p \in M$ ε-отслеживает d-псевдотраекторию ξ, если для всех допустимых i выполнены неравенства*

$$\operatorname{dist}(f^n(p), \xi_{i+n}) \leq \varepsilon.$$

Определение 3. *Мы будем говорить, что отображение f обладает гёльдеровым свойством отслеживания с показателем Гёльдера, равным $\gamma \in (0,1]$, если найдутся такие константы $L, d_0 > 0$, что для любой $d^{1/\gamma}$-псевдотраектории ξ отображения f с $d \in (0, d_0)$ найдется точка $p \in M$, Ld-отслеживающая псевдотраекторию ξ. Если $\gamma = 1$, то мы будем также говорить, что отображение f обладает липшицевым свойством отслеживания.*

В нашем случае $M = \mathbb{R}^2$, $f\colon M \to M$ — диффеоморфизм. В $\mathbb{R}^2$ мы фиксируем метрику

$$\operatorname{dist}((x,y),(x',y')) = \max\{|x - x'|, |y - y'|\}.$$

Через $\operatorname{Lip}(f)$ мы будем обозначать константу Липшица отображения f.

Введем обозначения

$$W^s(p) = \left\{q \in M \mid \lim_{i \to \infty} \operatorname{dist}(f^i(p), f^i(q)) = 0\right\},$$

$$W^u(p) = \left\{q \in M \mid \lim_{i \to -\infty} \operatorname{dist}(f^i(p), f^i(q)) = 0\right\}.$$

Хорошо известно, что если p — неподвижная гиперболическая точка диффеоморфизма f, то $W^s(p)$ и $W^u(p)$ являются гладко погруженными многообразиями (см., например, [4]).

2. Формулировка основного результата. Пусть $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — диффеоморфизм класса гладкости C^k, где $k \in \mathbb{N}$. Мы будем предполагать, что найдутся такие окрестности $V_1 = (a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$ и $V_2 = (c_1, c_2) \times (d_1, d_2)$ точек $r_1 = (-3, 0)$ и $r_2 = (3, 0)$ соответственно, такая окрестность O начала координат $(0,0)$ и такая константа $\delta > 0$, что выполнены следующие соотношения:

(d1) $f|_{B_\delta(V_1)}(x,y) = (\alpha_1(x+3) - 3, \beta_1 y)$, где $\alpha_1 > 1$, $\beta_1 \in (0,1)$;

(d2) $f|_{B_\delta(V_2)}(x,y) = (\alpha_2(x-3) + 3, \beta_2 y)$, где $\alpha_2 \in (0,1)$, $\beta_2 > 1$;

(d3) $B_\delta(\{(0,0)\}) \subset O$, $B_\delta(f^{-1}(O)) \subset V_1$, $B_\delta(f(O)) \subset V_2$, где $B_\delta(A)$ — δ-окрестность множества $A \subset \mathbb{R}^2$;

(d4) $f|_{B_\delta(O)}(x,y) = (x + b, \phi(x,y))$, где $b > 0$, а отображение ϕ удовлетворяет соотношению $\phi(x, 0) = x^3$.

Соотношение (d4) как раз и означает кубическое касание неустойчивого многообразия $W^u(r_1)$ и устойчивого $W^s(r_2)$, поскольку, как следует из явного вида отображения f, выполнены включения

$$\{(x, x^3) \mid |x| \le \delta\} \subset W^u(r_1),$$

$$\{(x, 0) \mid |x| \le \delta\} \subset W^s(r_2).$$

Мы докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *(1) Если f обладет гёльдеровым свойством отслеживания в $V_1 \cup O \cup V_2$ с показателем Гёльдера γ, то $\gamma \le \frac{1}{3}$.*

(2) Диффеоморфизм f обладает гёльдеровым свойством отслеживания в $V_1 \cup O \cup V_2$ с показателем Гёльдера $\frac{1}{4}$.

(3) Если f принадлежит классу гладкости C^2, то f обладает гёльдеровым свойством отслеживания в $V_1 \cup O \cup V_2$ с показателем Гёльдера $\frac{1}{3}$.

(4) Найдется диффеоморфизм класса гладкости C^1, удовлетворяющий условиям (d1)–(d4)*, но не обладающий гёльдеровым свойством отслеживания с показателем Гёльдера $\gamma > \frac{1}{4}$.*

3. Вспомогательные леммы. Следующая тривиальная лемма является частным случаем более общей классической леммы об отслеживании (см. [3], теорема 1.2.2).

Лемма 1. *Пусть $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – C^1-диффеоморфизм, задающийся в окрестности*

$$V = (a', a'') \times (b', b'')$$

по формуле

$$F|_V(x, y) = (\alpha(x - x_0) + x_0, \beta(y - y_0) + y_0),$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $\beta > 1$, и $(x_0, y_0) \in V$. Тогда для любой d-псевдотраектории $\xi = \{\xi_i\}_{i=0}^N \subset V$, где $d > 0$, найдется такая точка $p \in V$, что выполнены соотношения

$$\begin{gathered}\operatorname{dist}(F^i(p), \xi_i) \le Ld, \quad i = 0, \dots, N,\\ F^i(p) \in V, \quad i = 0, \dots, N,\end{gathered} \tag{1}$$

где $L = \max\{\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{\beta-1}\}$.

В следующей лемме мы опишем множество $C(d, q, F)$ точек, итерации которых остаются в достаточно малой d-окрестности, соответствующей итерации фиксированной точки q.

Лемма 2. *Рассмотрим диффеоморфизм $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, задающийся в δ-окрестности точки (x_0, y_0), $B_\delta(x_0, y_0)$, по формуле*

$$F(x, y) = (\alpha(x - x_0) + x_0, \beta(y - y_0) + y_0),$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (1, \infty)$. Пусть $\nu = \frac{\delta}{2}$, а точка $q \in \mathbb{R}^2$ удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{dist}(q, (x_0, y_0)) \le \frac{\nu}{\beta},$$

и пусть $N \in \mathbb{N}$ — наименьшее натуральное число, такое, что выполнено включение

$$| \left(F^N(q)\right)_y | \in [y_0 + \frac{\nu}{\beta}, y_0 + \nu). \tag{2}$$

Положим для $d \in (0, \frac{\delta}{2\beta})$

$$C(d, q, F) = \{q' \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{dist}\left(F^i(q), F^i(q')\right) \le d, i = 0, \dots, N\},$$

$$C_-(d, q, F) = \left\{(q_x + \Delta_x, q_y + \Delta_y) \mid |\Delta_x| \le d, |\Delta_y| \le \frac{d|q_y - y_0|}{\nu}\right\},$$

$$C_+(d, q, F) = \left\{(q_x + \Delta_x, q_y + \Delta_y) \mid |\Delta_x| \le d, |\Delta_y| \le \frac{\beta d|q_y - y_0|}{\nu}\right\}.$$

Тогда имеют место включения

$$C_-(d, q, F) \subseteq C(d, q, F) \subseteq C_+(d, q, F).$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что в условиях леммы выполнены включения

$$F^i(q) \in B_\nu(x_0, y_0), \quad i = 0, \dots, N. \tag{3}$$

Действительно, $|q_x - x_0| \le \nu$, так как $\operatorname{dist}(q, (x_0, y_0)) \le \frac{\nu}{\beta} \le \nu$, и неравенство (3) следует из сжатия вдоль оси OX с константой $\alpha \in (0, 1)$ к точке x_0 и в силу выбора N.

Нетрудно убедиться, рассуждая по индукции, для любой точки $\widetilde{q} = (q_x + \Delta_x, q_y + \Delta_y) \in C_-(d, q, F) \cup C(d, q, F) \cup C_+(d, q, F)$ выполнено включение

$$F^i(\widetilde{q}) \in B_\delta(x_0, y_0) \tag{4}$$

для $i = 0, \dots, N$.

Покажем справедливость включения $C_-(d, q, F) \subseteq C(d, q, F)$. Пусть $\widetilde{q} = (q_x + \Delta_x, q_y + \Delta_y) \in C_-(d, q, F)$. Тогда, принимая во внимание (2) и (4), мы можем оценить

$$\operatorname{dist}(F^i(\widetilde{q}), F^i(q)) = \max\left(\alpha^i|\Delta_x|, \beta^i|\Delta_y|\right) \max\left(d, d \cdot \frac{| \left(F^N(q)\right)_y - y_0|}{\nu}\right) \le d,$$

что и требовалось.

Осталось показать включение $C(d, q) \subseteq C_+(d, q)$. Предположим противное: нашлась такая точка $\widetilde{q} = (q_x + \Delta_x, q_y + \Delta_y) \in C(d, q)$, что $\widetilde{q} \notin C_+(d, q)$, т. е. выполнено неравенство

$$|\Delta_y| > \frac{\beta d|q_y|}{\nu}.$$

Тогда мы можем оценить

$$\operatorname{dist}\left(F^N(\widetilde{q}), F^N(q)\right) \ge | \left(F^N(\widetilde{q})\right)_y - \left(F^N(q)\right)_y | \ge \beta^N|\Delta_y| > \beta^N \frac{\beta d|q_y|}{\nu} \ge d,$$

откуда

$$\operatorname{dist}\left(F^N(\widetilde{q}), F^N(q)\right) > d,$$

что противоречит предположению $\widetilde{q} \in C(d, q)$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

4. Доказательство основного результата. В этом разделе мы докажем теорему 1.

Мы опустим докательство пункта 2, поскольку в нем, по существу, повторяются рассуждения, приведенные при доказательстве пункта 3. Также, как и пункт 3, пункт 2 сводится к доказательству соотношения (14).

4.1. Доказательство пункта (1). Покажем, что для любого $\gamma \in (\frac{1}{3}, 1]$ f не обладает гёльдеровым свойством отслеживания с показателем Гёльдера γ. Предполагая противное, мы построим $d^{1/\gamma}$ псевдотраекторию (с $d \in (0, d_0)$), которая не может быть Ld-отслежена точной (где константы L, d_0 из определения 3).

Положим

$$\xi_{-n} = f^{-n}(b, 0), \quad n > 0,$$

$$\xi_0 = (b, d^{\frac{1}{\gamma}}),$$

$$\xi_n = f^n(\xi_0), \quad n > 0,$$

где константа $d > 0$ столь мала, что $\xi_0 \in V_2$. Ясно, что последовательность ξ является $d^{1/\gamma}$-псевдотраекторией.

В ходе рассуждений мы несколько раз будем уменьшать число d.

Так, мы можем считать, что выполнено неравенство

$$d \leq \min\left(\frac{\delta}{L}, d_0\right). \tag{5}$$

Из соотношений (d4) и (d2) следует, что $\xi_{-i} \in W^u(r_1)$ при $i \in \mathbb{N}$.

Предположим, что нашлась такая точка $p \in \mathbb{R}^2$, Ld-отслеживающая $d^{1/\gamma}$-псевдотраекторию ξ, т. е., что выполнены неравенства

$$\operatorname{dist}(f^i(p), \xi_i) \leq Ld, \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

В силу соотношения (5), учитывая, что $\xi_{-1} = (0, 0)$, получаем оценку

$$\operatorname{dist}(f^{-1}(p), (0, 0)) = \operatorname{dist}(f^{-1}(p), \xi_{-1}) \leq Ld \leq \delta. \tag{7}$$

Отсюда, принимая во внимание условие (d3), получаем, что $f^{-1}(p) \in O$.

Поскольку, кроме того, $Ld < \frac{\eta}{2}$, для достаточно больших n выполнено неравенство $\operatorname{dist}(f^{-n}(p), r_1) \leq \eta$, откуда следует, что $p \in W^u(r_1)$.

Как следует из условий (d1) и (d3), $[-\delta, \delta] \times \{0\} \subset W^u(r_1)$. Таким образом, $f^{-1}(p) \in [-\delta, \delta] \times \{0\}$, т. е. в координатах $\mathbb{R}^2$ точка $f^{-1}(p)$ имеет вид

$$f^{-1}(p) = (x', 0).$$

В силу (6) выполнена оценка

$$|x'| \leq Ld, \tag{8}$$

поэтому из условия (d4) следует, что $p = f(f^{-1}(p)) = (x' + b, (x')^3)$. Таким образом, используя (8), мы можем оценить y-координату точки p:

$$|x'|^3 \leq L^3 d^3. \tag{9}$$

Ясно, что найдутся такие $d_1 > 0$, $m \in \mathbb{N}$, что для всех $\widetilde{d} \in (0, d_1)$ выполнено включение

$$\operatorname{dist}(f^m(b, (\widetilde{d}^{\frac{1}{\gamma}})), (3,0)) \le \frac{\delta}{2\beta_2},$$

где β_2 — константа из соотношения (d2). Вновь уменьшая $d > 0$, если нужно, можем считать, что $d \in (0, d_1)$.

Отметим, что в силу соотношения (6) выполнено включение

$$f^m(p) \in C(d, \xi_m), \tag{10}$$

где $C(d, \xi_m, f)$ — множество, определенное в лемме 2.

В силу включения (10) и леммы 2, примененной к отображению f, δ и точкам $(x_0, y_0) = (3, 0)$ и $q = \xi_m$, выполнено включение

$$f^m(p) \in C_+(d, \xi_m) = \left\{ ((\xi_m)_x + \Delta_x, (\xi_m)_y + \Delta_y) \mid |\Delta_x| \le d, |\Delta_y| \le \frac{\beta_2 d (\xi_m)_y}{\nu} \right\}, \tag{11}$$

где ν — константа, определенная в формулировке леммы 2.

Уменьшая d, если нужно, мы можем добиться того, чтобы выполнялись включения

$$\begin{aligned} &f^{-i}(C_+(d, \xi_m)) \subset V_2, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1, \\ &f^{-m}(C_+(d, \xi_m)) \subset O. \end{aligned}$$

Из явного вида отображения f в окрестностях V_2 и O (где f линейно) следует также соотношение

$$f^{-m+1}(C_+(d, \xi_m)) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - b| \le \frac{d}{\alpha_2^{m-1}}, y \in \left[d^{\frac{1}{\gamma}} - \frac{\beta_2 d^{\frac{1}{\gamma}+1}}{\nu}, d^{\frac{1}{\gamma}} + \frac{\beta_2 d^{\frac{1}{\gamma}+1}}{\nu} \right] \right\}.$$

Из соотношения (11) следует включение $p \in f^{-m+1}(C_+(d, \xi_m))$, откуда при достаточно малом d следует оценка для y-координаты:

$$p_y \ge d^{\frac{1}{\gamma}} - \frac{\beta_2 d^{\frac{1}{\gamma}+1}}{\nu} \ge 2L^3 d^3,$$

что противоречит оценке (9). Отсюда мы заключаем, что наше предположение о существовании точки p, удовлетворяющей соотношению (7), неверное. Доказательство пункта (1) окончено.

4.2. Доказательство пункта (3). Нам нужно показать, что найдутся такие константы $d_0, L > 0$, что любая d^3-псевдотраектория $\xi = \{\xi_i\}_{i=0}^N \subset V_1 \cup O \cup V_2$ с $d \in (0, d_0)$ может быть Ld-отслежена точной.

В ходе доказательства мы будем несколько раз уменьшать число d_0 и увеличивать L (каждый раз новые константы будут зависеть только от f).

Для начала заметим, что, как следует из явного вида системы, найдется такая константа $d' > 0$, что для любой $(d')^3$-псевдотраектории $\xi = \{\xi_i\}_{i=0}^N \subset V_1 \cup O \cup V_2$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что выполнены включения

$$\begin{aligned} &\xi_i \in V_1, \quad i = 0, \ldots, n-1, \\ &\xi_n \in O, \\ &\xi_i \in V_2, \quad i = n+1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{12}$$

Положим $d_0 = d'$.

Применяя последовательно лемму 1 к $\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$, а затем к $\{\xi_i\}_{i=n+1}^{N}$, получаем, что найдутся точки $p \in V_1$ и $q \in V_2$ и константа $\mathfrak{L} > 0$, удовлетворяющие соотношениям

$$\operatorname{dist}(f^i(p), \xi_i) \le \mathfrak{L} d^3, \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

$$\operatorname{dist}(f^{i-n-1}(q), \xi_i) \le \mathfrak{L} d^3, \quad i = n+1, \ldots, N.$$

В силу липшицевости отображения f и его обратного, f^{-1}, мы можем оценить

$$\operatorname{dist}\left(f^n(p), f^{-1}(q)\right) \le \operatorname{Lip}(f^{-1}) \operatorname{dist}(f^{n+1}(p), q) \le \operatorname{Lip}(f^{-1}) \left(\operatorname{Lip}(f)\mathfrak{L}d^3 + d^3 + \mathfrak{L}d^3\right) \le \mathfrak{C}d^3, \tag{13}$$

где $\mathfrak{C} = \operatorname{Lip}(f^{-1})\,(1 + \mathfrak{L} + \operatorname{Lip}(f)\mathfrak{L})$.

Уменьшая d_0 и учитывая включение (12), мы можем добиться выполнения включений

$$f^n(p) \in B_{\frac{\delta}{2}}(O),$$
$$f^{-1}(q) \in B_{\frac{\delta}{2}}(O).$$

Далее мы покажем, что найдется константа $K > 0$, зависящая только от f, и такая точка $r \in \mathbb{R}^2$, что выполнены неравенства

$$\operatorname{dist}(f^i(p), f^i(r)) \le Kd, \quad i = 0, \ldots, n-1,$$
$$\operatorname{dist}(f^{i-n-1}(q), f^i(r)) \le Kd, \quad i = n+1, \ldots, N,$$

откуда легко получается, что точка r Ld-отслеживает псевдотраекторию ξ с некоторым $L > 0$, зависящим только от f.

Положим

$$D(p) = \{p' \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{dist}(f^i(p'), f^i(p)) \le Kd,\ i = 0, \ldots, n\},$$

$$D(q) = \{p' \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{dist}(f^i(p'), f^i(q)) \le Kd,\ i = 0, \ldots, N-n-1\},$$

где константу $K > 0$ (зависящую только от f) мы выберем позднее. Мы покажем, что

$$f^{n+1}(D(p)) \cap D(q) \neq \varnothing. \tag{14}$$

Тогда любая точка $r \in f^{-n-1}\left(f^{n+1}(D(p)) \cap D(q)\right)$ и является искомой.

Для удобства введем обозначение $f^n(p) = (\widetilde{x}, \widetilde{y})$.

Уменьшая, если нужно, d_0, из явного вида системы f и леммы 2 получаем, что множество

$$C(p) = \left\{(\widetilde{x} + \Delta_x, \widetilde{y} + \Delta_y) \mid |\Delta_x| \le Kd, |\Delta_y| \le \frac{Kd|\widetilde{y}|}{\mathfrak{b}}\right\}, \tag{15}$$

где $\mathfrak{b} = \max(|b_1|, |b_2|)$, удовлетворяет соотношению

$$C(p) \subseteq f^n(D(p)). \tag{16}$$

Рассмотрим два случая:

$$\text{(Y1)} \quad |\widetilde{y}| \ge d^2,$$

$$\text{(Y2)} \quad |\widetilde{y}| < d^2.$$

В случае (Y1) из соотношений (15) и (16) следует, что

$$f^n(D(p)) \supseteq C(p) \supseteq \left\{ (\widetilde{x} + \Delta_x, \widetilde{y} + \Delta_y) \mid |\Delta_x| \le Kd, |\Delta_y| \le \frac{Kd^3}{\mathfrak{b}} \right\},$$

откуда при $K \ge \mathfrak{C}\mathfrak{b}$, учитывая соотношение (13), получаем включение

$$f^{-1}(q) \in f^n(D(p)),$$

что и требовалось.

Рассмотрим случай (Y2). Здесь также возможны две альтернативы:

$$\text{(X1)} \quad |\widetilde{x}| \le Kd,$$

$$\text{(X2)} \quad |\widetilde{x}| > Kd.$$

Мы покажем, что в каждом из этих случаев выполнены неравенства

$$\phi\left(\widetilde{x} + \frac{Kd}{2}, \widetilde{y}\right) - \phi(x, y) \ge \mathfrak{C}d^3, \tag{17}$$

$$\phi\left(\widetilde{x} - \frac{Kd}{2}, \widetilde{y}\right) - \phi(x, y) \le -\mathfrak{C}d^3, \tag{18}$$

где функция ϕ из условия (d4); тогда из простых геометрических соображений получается, что $C(p) \cap S(q) \ne \varnothing$, где $C(p)$ определено в (15), а $S(q) = \{(q_x + \Delta_x, q_y) \mid |\Delta_x| \le Kd\}$. Отсюда, учитывая тот факт, что $S(q) \subset D(q)$, получаем требуемое соотношение (14).

Поскольку f принадлежит классу C^2, учитывая соотношение (d4), мы можем написать

$$\phi(x, y) = x^3 + cy + xy\Psi(x, y) + y^2\Phi(x, y), \tag{19}$$

где Ψ, Φ — непрерывные функции и $c = \frac{\partial \phi}{\partial y}(0, 0)$.

Отметим также, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$x^2 + 3xy + 3y^2 \ge \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{8}. \tag{20}$$

Мы рассмотрим только подслучай (X1) (в подслучае (X2) рассуждения аналогичны). Неравенства (17) и (18) доказываются аналогично, поэтому мы ограничимся доказательством (17).

Так, из (19) получаем соотношение

$$\begin{aligned} \phi(\widetilde{x} + \frac{Kd}{2}, \widetilde{y}) - \phi(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \left(3\widetilde{x}^2 \frac{Kd}{2} + 3\widetilde{x}\left(\frac{Kd}{2}\right)^2 + \left(\frac{Kd}{2}\right)^3 \right) + \\ + \frac{Kd}{2}\widetilde{y}\Psi(\widetilde{x} + Kd, \widetilde{y}) + \widetilde{x}\widetilde{y}\Delta\Psi(\widetilde{x}, \widetilde{y}) + \widetilde{y}^2\Delta\Phi(\widetilde{x}, \widetilde{y}), \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\Delta T(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = T(\widetilde{x} + \frac{Kd}{2}, \widetilde{y}) - T(\widetilde{x}, \widetilde{y}), \quad T = \Psi, \Phi.$$

Уменьшая d_0, если нужно, можем считать, что $|\Delta\Psi(x,y)| \leq 1$, $|\Delta\Phi(x,y)| \leq 1$ при $(x,y) \in B_\delta(O)$. Положим

$$\mathfrak{M} = \max_{p' \in B_\delta(O)} |\Psi(p')|.$$

Отсюда, учитывая (20) и (21) и увеличивая, если нужно, $K > 0$, получаем требуемую оценку:

$$\phi\left(\widetilde{x} + \frac{Kd}{2}, \widetilde{y}\right) - \phi(x,y) \geq \frac{K^3 d^3}{64} - \frac{K d^3 \mathfrak{M}}{2} - Kd^3 - d^4 \geq \mathfrak{C} d^3.$$

4.3. Доказательство пункта 4. Пусть $\alpha_1 = \beta_2 = 4$, $\alpha_2 = \beta_1 = \frac{1}{4}$, $b = 2\frac{1}{2}$, $V_1 = (-4,-2) \times (-1,1)$, $V_2 = (2,4) \times (-1,1)$, $O = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times (-1,1)$, $\delta = \frac{1}{12}$.

Положим

$$\theta(x,y) = \frac{|x||y|}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot |\log|x|| \cdot |\log|y||}, \quad x, y \neq 0,$$

$$\theta(x,0) = 0,$$

$$\theta(0,y) = 0.$$

Ясно, что функция θ обладает классом гладкости C^1.

В качестве функции $\phi(x,y)$ возьмем

$$\phi(x,y) = y + x^3 + \frac{|x||y|}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot |\log|x|| \cdot |\log|y||}.$$

Несложно построить диффеоморфизм $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, удовлетворяющий условиям (d1)–(d4) с заданными нами параметрами.

Мы покажем, что такое f не обладает гёльдеровым свойством отслеживания с показателями Гёльдера $\gamma \in (\frac{1}{4}, 1]$.

Предположим противное. Тогда найдутся такие константы $L, d_0 > 0$ и $\epsilon > 0$, что для любого $d \in (0, d_0)$ любая $d^{4-\varepsilon}$-псевдотраектория может быть Ld-отслежена точной. Мы построим псевдотраекторию, для которой это не так.

Зададим псевдотраекторию ξ по следующему правилу:

$$\xi_0 = \left(0, \frac{d^{3-\varepsilon}}{M}\right),$$

$$\xi_{-n} = f^{-n}(\xi_0), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\xi_1 = f(\xi_0) + (0, d^{4-\varepsilon}) = \left(2\frac{1}{2}, \frac{d^{3-\varepsilon}}{M} + d^{4-\varepsilon}\right),$$

$$\xi_n = f^{n-1}(\xi_1), \quad n \in \mathbb{N},$$

где константа $M > 0$ такова, что $d^{4-\varepsilon} - 4Ld\left(\frac{d^{3-\varepsilon}}{M} + d^{4-\varepsilon}\right) > \frac{4Ld^{4-\varepsilon}}{M}$.

Ясно, что построенная нами последовательность $\xi = \{\xi_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ является $d^{4-\varepsilon}$-псевдотраекторией.

Предположим теперь, что нашлась точка $p \in \mathbb{R}^2$ Ld-отслеживающая ξ, т. е. удовлетворяющая неравенствам

$$\operatorname{dist}(f^i(p), \xi_i) \leq Ld. \tag{22}$$

Уменьшая, если нужно, $d > 0$, мы можем применить лемму 2 к системе f^{-1} и точке ξ_0 и к системе f и точке ξ_1 соответственно. Откуда получаем следующие соотношения (отметим, что в обоих случаях $\beta = 4$, $\delta = \frac{1}{12}$):

$$C_+(Ld, \xi_0, f^{-1}) = \left\{(x, y) \mid |x| \le Ld, y \in \left[\frac{d^{3-\varepsilon}}{M} - \frac{192d^{4-\varepsilon}}{M}, \frac{d^{3-\varepsilon}}{M} + \frac{192d^{4-\varepsilon}}{M}\right]\right\},$$

$$C_+(Ld, \xi_1, f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left[2\frac{1}{2} - Ld, 2\frac{1}{2} + Ld\right],\right.$$
$$\left. y \in \left[\frac{d^{3-\varepsilon}}{M} + d^{4-\varepsilon} - 192dy_1, \frac{d^{3-\varepsilon}}{M} + d^{4-\varepsilon} + 192dy_1\right]\right\},$$

где $y_1 = (\xi_1)_y = (\frac{d^{3-\varepsilon}}{M} + d^{4-\varepsilon})$.

Мы покажем, что выполнено соотношение

$$f(C_+(Ld, \xi_0, f^{-1})) \cap C_+(Ld, \xi_1, f) = \varnothing,$$

что противоречит включениям $p \in C_+(Ld, \xi_0, f^{-1})$, $f(p) \in C_+(Ld, \xi_1, f)$, которые также следуют из леммы 2 и соотношений (22).

Так, пусть $(x, y) \in C_+(Ld, \xi_0, f^{-1})$. Для краткости запишем

$$x = uLd,$$
$$y = \frac{d^{3-\varepsilon}}{M} + v\frac{192d^{4-\varepsilon}}{M}, \tag{23}$$

где $|u|, |v| \le 1$. Мы покажем, что

$$\phi(x, y) < \frac{d^{3-\varepsilon}}{M} + d^{4-\varepsilon} - 192dy_1 \tag{24}$$

для всех таких точек (x, y), откуда следует, что $f(x, y) \notin C_+(Ld, \xi_1, f)$, что и требуется. Для доказательства (24) мы вычтем из правой части неравенства левую и оценим:

$$\frac{d^{3-\varepsilon}}{M} + d^{4-\varepsilon} - 192dy_1 - \phi(x, y) >$$
$$> d^{4-\varepsilon} - 192dy_1 - |u|^3L^3d^3 + \frac{|u|Ld\frac{d^{3-\varepsilon}}{2M}}{((uLd)^2 + (\frac{2d^{3-\varepsilon}}{M})^2)^{\frac{1}{2}} \cdot |\log|x|| \cdot |\log|y||}. \tag{25}$$

Здесь мы приняли во внимание $|v| \le 1$ и неравенства

$$\frac{d^{3-\varepsilon}}{M} - \frac{192d^{4-\varepsilon}}{M} > \frac{d^{3-\varepsilon}}{2M} \ge \frac{192d^{4-\varepsilon}}{M},$$

которые выполнены при достаточно большом M и достаточно малом d.

Уменьшая d и увеличивая M, мы можем считать, что $1 - \frac{192}{M}d \ge 1/2$. Учитывая это неравенство, продолжим оценку (25):

$$\frac{d^{3-\varepsilon}}{M} + d^{4-\varepsilon} - 192dy_1 - \phi(x,y) \geq$$
$$\geq \frac{d^{4-\varepsilon}}{2} + |u|^3 d^3 \left(-L^3 + \frac{L}{((uLd)^2 + (\frac{2d^{2-\varepsilon}}{M})^2)^{\frac{1}{2}} d^\varepsilon u^2 \cdot |\log|x|| \cdot |\log|y||} \right).$$

Отметим, что при малом d выполнено неравенство

$$\left((uLd)^2 + \left(\frac{2d^{2-\varepsilon}}{M} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < 1,$$

откуда при достаточно малом d следует цепочка неравенств

$$|u|^3 d^3 \left(-L^3 + \frac{L}{((uLd)^2 + (\frac{2d^{2-\varepsilon}}{M})^2)^{\frac{1}{2}} d^\varepsilon u^2 \cdot |\log|x|| \cdot |\log|y||} \right) \geq$$
$$\geq |u|^3 d^3 \left(-L^3 + \frac{L}{d^\varepsilon u^2 \cdot |\log|x|| \cdot |\log|y||} \right) \geq 0.$$

Откуда и следует (25). □

Литература

1. *Tikhomirov S.* Hölder shadowing om finite intervals // Ergodic Theory and Dynamical Systems, FirstView Article. Cambridge University Press, 2014.

2. *Sakai K.* Shadowing Property and Transversality Condition // Dynamical Systems and Chaos. Vol. 1. Singapore: World Sci., 1995. P. 233–238.

3. *Pilyugin S. Yu.* Shadowing in dynamical systems // Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1706. Springer, 1999.

4. *Pilyugin S. Yu.* Spaces of Dynamical Systems // De Gruyter Studies in Mathematical Physics. 2012. Vol. 3.

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2014 г.

Сведения об авторе

Петров Алексей Алексеевич — al.petrov239@gmail.com

HÖLDER SHADOWING IN THE CASE OF CUBIC TANGENCY

Alexey A. Petrov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; al.petrov239@gmail.com

We consider a model example of a diffeomorphism f of a compact surface with Axiom A in the case of cubic tangency of one-dimensional stable and unstable manifolds. We prove that if f is of class C^2, then f has the Hölder shadowing property with exponent $\frac{1}{3}$. We construct an example of a diffeomorphism f that is of class C^1, has the Hölder shadowing property with exponent $\frac{1}{4}$ but fails to have the Hölder shadowing property with exponent $\gamma > \frac{1}{4}$. Refs 4.

Keywords: dynamical systems, shadowing, cubic tangency, Axiom A.

References

1. Tikhomirov S. “Hölder shadowing om finite intervals”, *Ergodic Theory and Dynamical Systems, FirstView Article* (Cambridge University Press, 2014).

2. Sakai K. “Shadowing Property and Transversality Condition”, *Dynamical Systems and Chaos* **1**, 233–238 (World Sci., Singapore, 1995).

3. Pilyugin S. Yu. “Shadowing in dynamical systems”, *Lecture Notes in Mathematics* **1706** (Springer, 1999).

4. Pilyugin S. Yu. “Spaces of Dynamical Systems”, *De Gruyter Studies in Mathematical Physics* **3**, (2012).