

## МЕХАНИКА

УДК 539.3:517.928.2

**ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ  
ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ\****И. А. Адамович, С. Б. Филиппов*Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Рассматривается устойчивость под действием внешнего давления цилиндрической оболочки, подкрепленной одинаковыми круговыми стержнями (шпангоутами) с прямоугольными поперечными сечениями, и гладкой оболочки, имеющей такие же размеры срединной поверхности и изготовленной из того же материала. Предполагается, что подкрепленная и гладкая оболочки теряют устойчивость при одинаковом критическом давлении. Для определения критического давления используются асимптотические формулы. В явном виде получены формулы для вычисления приближенных значений оптимальных параметров подкрепленной оболочки, которым соответствует минимальное значение отношения массы подкрепленной оболочки к массе гладкой оболочки. Показано, что при увеличении отношения ширины шпангоута к его толщине отношение масс уменьшается. Проведен расчет оптимальных параметров. Результаты работы могут быть использованы при проектировании тонкостенных конструкций. Библиогр. 6 назв. Ил. 2.

*Ключевые слова:* подкрепленная цилиндрическая оболочка, устойчивость, асимптотические методы, оптимальные параметры.

**1. Введение.** В монографии [1] с помощью приближенного представления решения краевой задачи в виде суммы полубезмоментного состояния и краевых эффектов получены простые асимптотические формулы для низших частот колебаний и критического давления. На основании этих формул разработаны алгоритмы для определения оптимальных параметров подкрепленной цилиндрической оболочки с фиксированной массой. Оптимальными считаются параметры, обеспечивающие максимальное значение первой частоты или критического давления. Приближенное определение оптимальных параметров сведено к решению кубического уравнения.

В статье [2] используется более естественная для приложений постановка задачи оптимизации параметров подкрепленной оболочки. Найдены параметры оболочки, имеющей наименьшую массу и заданную первую частоту колебаний. Получены явные приближенные формулы для оптимальных параметров и массы оболочки.

В данной работе в явном виде определены приближенные значения оптимальных параметров подкрепленной цилиндрической оболочки, имеющей наименьшую массу

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00523).

и заданное критическое внешнее давление. Полученные результаты могут найти применение при проектировании тонкостенных конструкций.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о потере устойчивости под действием равномерного внешнего давления  $p$  тонкой цилиндрической оболочки средней длины, подкрепленной  $n_r$  одинаковыми круговыми стержнями (шпангоутами) по параллелям  $s = s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_r$ , где  $s$  — координата, направленная вдоль образующей цилиндра (рис. 1).

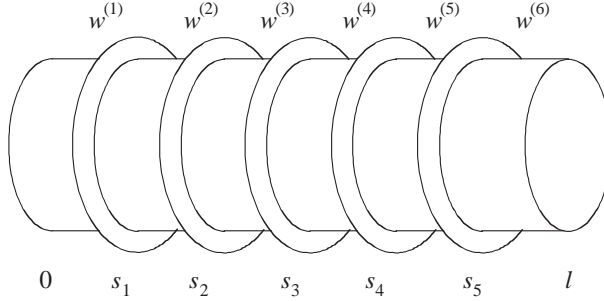


Рис. 1. Подкрепленная цилиндрическая оболочка.

За единицу длины выберем радиус  $R$  цилиндрической оболочки. Для описания потери устойчивости используем безразмерные уравнения технической теории оболочек [3]:

$$\varepsilon^8 \Delta \Delta w^{(i)} - \frac{d^2 \Phi^{(i)}}{ds^2} - \lambda m^2 w^{(i)} = 0, \quad \Delta \Delta \Phi^{(i)} + \frac{d^2 w^{(i)}}{ds^2} = 0, \quad (1)$$

где

$$\Delta = \frac{d^2}{ds^2} - m^2, \quad \varepsilon^8 = \frac{h^2}{12\sigma}, \quad \sigma = 1 - \nu^2, \quad \lambda = \frac{p}{Eh},$$

$w^{(i)}$  — проекция перемещения на направление нормали к срединной поверхности для  $s \in [s_{i-1}, s_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n = n_r + 1$ ,  $s_0 = 0$ ,  $s_n = l$ ,  $l$  — безразмерная длина оболочки,  $\Phi^{(i)}$  — функция усилий,  $m$  — число волн по параллели,  $\varepsilon$  — малый параметр,  $h$  — безразмерная толщина оболочки,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $E$  — модуль Юнга.

Представив решение системы уравнений (1) в виде суммы основного полубезмоментного состояния и простого краевого эффекта вблизи краев оболочки  $s = 0$ ,  $s = l$  и параллелей  $s = s_i$ , в первом приближении получим

$$\frac{d^4 w^{(i)}}{ds^4} - \alpha^4 w^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

где

$$\alpha^4 = m^6 \lambda - \varepsilon^8 m^8. \quad (3)$$

Решения уравнения (2) в случае шарнирного опирания краев оболочки удовлетворяют граничным условиям

$$w = \frac{d^2 w}{ds^2} = 0 \quad \text{для} \quad s = 0, \quad s = l. \quad (4)$$

Будем рассматривать шпангоут как круговой стержень. Если характерный размер поперечного сечения стержня  $a \sim \varepsilon^3$ , то, как показано в работе [1], условия

сопряжения на параллелях  $s = s_j$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} w^{(j)} &= w^{(j+1)}, \quad \frac{dw^{(j)}}{ds} = \frac{dw^{(j+1)}}{ds}, \\ \frac{d^2w^{(j)}}{ds^2} &= \frac{d^2w^{(j+1)}}{ds^2}, \quad \frac{d^3w^{(j)}}{ds^3} - \frac{d^3w^{(j+1)}}{ds^3} = -cw^{(j+1)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$c = m^8 \left( I + \frac{e^2 F}{1 + \delta} \right), \quad (6)$$

$F$  — площадь поперечного сечения шпангоута,  $I$  — момент инерции поперечного сечения относительно образующей цилиндра,  $e$  — расстояние от центра тяжести поперечного сечения до срединной поверхности оболочки, которое называют эксцентриситетом подкрепления. Положительная величина  $\delta$ , формула для которой приведена в работе [1], зависит от числа волн по параллели  $m$  и параметров оболочки и стержня.

Из формулы (3) получаем приближенное значение безразмерного критического давления

$$\lambda_1(c) = \min_m \lambda(c, m) = \min_m (\alpha_1^4(c)/m^6 + \varepsilon^8 m^2), \quad (7)$$

где  $\alpha_1(c)$  — наименьшее положительное собственное значение краевой задачи (2), (4), (5).

Использование полубезмоментной теории при исследовании потери устойчивости гладкой оболочки под действием внешнего давления допустимо в случае  $l \sim 1$ , т. е. для оболочек средней длины [3]. В данной задаче полубезмоментная теория применяется к частям оболочки, расположенным между шпангоутами или между шпангоутом и краем оболочки, поэтому вычисление критического давления по приближенной формуле (5) возможно лишь при выполнении условий

$$s_i - s_{i-1} \sim 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad n \sim 1. \quad (8)$$

**3. Приближенное вычисление критического давления.** Будем рассматривать в дальнейшем равномерное распределение шпангоутов вдоль образующей оболочки, для которого  $s_i = il/n$ . В работе [4] показано, что в случае шарнирного опирания равномерное распределение близко к оптимальному. Если  $n \gg 1$ , а  $c \sim 1/n$ , то для приближенного определения собственных значений краевой задачи (1), (3), (4) можно использовать метод осреднения, с помощью которого в работе [1] получена формула

$$\alpha_1^4 = \frac{\pi^4}{l^4} + \eta(\varepsilon m)^8, \quad \eta = \frac{cn}{\varepsilon^8 m^8 l}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7), получим следующую приближенную формулу:

$$\lambda(\eta, m) = \frac{\pi^4}{m^6 l^4} + (1 + \eta)\varepsilon^8 m^2. \quad (10)$$

Предположим, что эксцентриситет  $e = 0$ . Тогда  $\eta = nI/(\varepsilon^8 hl)$  не зависит от  $m$ . Для приближенного определения критического давления  $\lambda_1(\eta)$  приравняем нулю производную от  $\lambda(\eta, m)$  по  $m$ :

$$-\frac{6\pi^4}{l^4 m^7} + 2(1 + \eta)\varepsilon^8 m = 0. \quad (11)$$

Подставив корень уравнения (11)

$$m_* = \frac{3^{1/8} \sqrt{\pi}}{\varepsilon \sqrt{l} (1 + \eta)^{1/8}}$$

в формулу для  $\lambda(\eta, m)$ , получим

$$\lambda_1(\eta) = \min_m \lambda(\eta, m) \simeq \lambda(\eta, m_*) = \lambda_1(0)(1 + \eta)^{3/4}, \quad (12)$$

где

$$\lambda_1(0) = \frac{4\varepsilon^6 \pi}{3^{3/4} l} \quad (13)$$

есть значение безразмерного критического давления для неподкрепленной цилиндрической оболочки. Если  $m_*$  — целое число, то формула (12) дает точное значение минимума. Замена  $m_*$  на ближайшее к  $m_*$  натуральное число приводит к относительной ошибке порядка  $m^{-1} \sim \varepsilon$ , а относительная погрешность формулы (12) является величиной порядка  $\varepsilon^2$ .

Безразмерное критическое давление  $\lambda_1(\eta)$  можно найти по формуле (12) только в том случае, когда жесткость  $\eta$  не слишком велика. Дело в том, что краевая задача (2), (4), (5) имеет решение

$$w = \sin(\alpha x), \quad \alpha = \pi n/l,$$

независящее от относительной жесткости шпангоута  $\eta$ . Этому решению соответствует  $\lambda = n\lambda_1(0)$ . Если  $(1 + \eta)^{3/4} > n$ , то  $\lambda_1 = n\lambda_1(0)$ . Значение  $\eta_* = n^{4/3} - 1$ , при котором имеет место равенство  $(1 + \eta)^{3/4} = n$ , будем называть эффективной жесткостью шпангоута. Следовательно,

$$\lambda_1(\eta) \simeq \begin{cases} \lambda_1(0)(1 + \eta)^{3/4}, & 0 \leq \eta \leq \eta_*, \\ n\lambda_1(0), & \eta \geq \eta_*. \end{cases} \quad (14)$$

Увеличение жесткости шпангоута  $\eta$  после достижения ею значения  $\eta_*$  не приводит к увеличению критического давления.

В реальных конструкциях эксцентриситет подкрепления  $e$  отличен от нуля, так как шпангоуты располагаются либо внутри, либо вне оболочки. Из формулы (9) следует, что учет эксцентриситета приводит к увеличению жесткости шпангоута  $s$  по сравнению со случаем  $e = 0$ . С увеличением жесткости увеличивается и критическое давление, поэтому в случае  $e \neq 0$  формула (14) дает оценку снизу для критического давления.

Более точное значение  $\lambda_1$  при  $e \neq 0$  можно найти, если для вычисления  $s$  использовать формулу (9). Однако в этом случае величина  $\eta$  будет зависеть от  $m$ , и получить решение в явном виде не удастся [5].

**4. Оптимизация параметров подкрепленной оболочки.** Будем искать параметры подкрепленной цилиндрической оболочки с наименьшей массой, которая не потеряет устойчивость под действием заданного давления  $p_1$ . Приближенное значение  $p_1$  найдем с помощью формулы (14):

$$p_1 = \frac{4h^{5/2} \pi E}{6^{3/2} \sigma^{3/4} l} \cdot \begin{cases} (1 + \eta)^{3/4}, & 0 \leq \eta \leq \eta_*, \\ n, & \eta \geq \eta_*. \end{cases} \quad (15)$$

Пусть в качестве шпангоутов используются кольца прямоугольного поперечного сечения шириной  $a$  и высотой  $b = ka$ . Тогда масса подкрепленной оболочки будет

$$M_s = 2\pi R^3 \rho (lh + n_r a^2 k), \quad (16)$$

где  $\rho$  — плотность материала. Как и в работе [1], удобно сравнивать массу подкрепленной оболочки с массой гладкой оболочки толщиной  $h_0 \geq h$ , имеющей такие же размеры и изготовленной из такого же материала.

Масса гладкой оболочки  $M_0 = 2\pi R^3 \rho l h_0$ , а ее критическое давление  $p_0$  находится с использованием приближенной формулы (12):

$$p_0 = \frac{4h_0^{5/2} \pi E}{6^{3/2} \sigma^{3/4} l}. \quad (17)$$

Зафиксируем величины  $h_0, l, n_r, k, \nu$  и будем искать минимальное значение  $F_*$  функции

$$F(a, d) = \frac{M_s}{M_0} = \frac{2\pi R^3 \rho (lh + n_r a^2 k)}{2\pi R^3 \rho l h_0} = d + Aa^2, \quad (18)$$

где

$$d = \frac{h}{h_0} \leq 1, \quad A = \frac{n_r k}{l h_0}$$

при условии  $p_1 = p_0$ . Параметры  $a = a_*$  и  $d = d_*$ , для которых  $F_* = F(a_*, d_*)$ , назовем оптимальными, так как для них масса подкрепленной оболочки  $M_s = M_0 F$  имеет наименьшее значение. Величина  $F_*$  является отношением масс оптимальной подкрепленной оболочки и гладкой оболочки, имеющих одинаковое критическое давление.

Если  $\eta \geq \eta_*$ , то из условия  $p_1 = p_0$  следует, что  $d = d_* = n^{-2/5}$  является постоянной величиной и функция  $F$  зависит только от переменной  $a$ . Для шпангоута с прямоугольным сечением

$$\eta = \frac{Ba^4}{d^3}, \quad a = \left( \frac{\eta d^3}{B} \right)^{1/4}, \quad B = \frac{\sigma n k^3}{h_0^3 l}. \quad (19)$$

Пусть  $a_* = (\eta_* d^3 / B)^{1/4}$ . Из неравенства  $\eta \geq \eta_*$  следует, что  $a \geq a_*$ ,

$$F = d + Aa^2 \geq d_* + Aa_*^2,$$

поэтому  $F_* = d_* + Aa_*^2$ , и в рассматриваемом случае параметры  $d_* = n^{-2/5}$  и  $a_* = (\eta_* d^3 / B)^{1/4}$  будут оптимальными.

В случае  $\eta \leq \eta_*$  условие  $p_1 = p_0$  сводится к равенству  $d^{5/2}(1 + \eta)^{3/4} = 1$ , из которого следует, что  $\eta = d^{-10/3} - 1$ . Учитывая, что

$$\eta_* = n^{4/3} - 1 = d_*^{-10/3} - 1,$$

получаем неравенство  $d \geq d_*$ .

Подстановка  $\eta = d^{-10/3} - 1$  во вторую формулу (19) дает зависимость  $a$  от  $d$ :

$$a = \left( \frac{1 - d^{10/3}}{d^{1/3} B} \right)^{1/4}.$$

Следовательно,

$$F(a, d) = d + Aa^2 = f(d) = d + \gamma \sqrt{\frac{1 - d^{10/3}}{d^{1/3}}}, \quad d_* \leq d \leq 1, \quad (20)$$

где  $\gamma = A/\sqrt{B}$ .

График функции  $f(d)$  для  $h_0 = 0.01$ ,  $l = 4$ ,  $n_r = 8$ ,  $k = 1$ ,  $\nu = 0.3$  изображен на рис. 2.

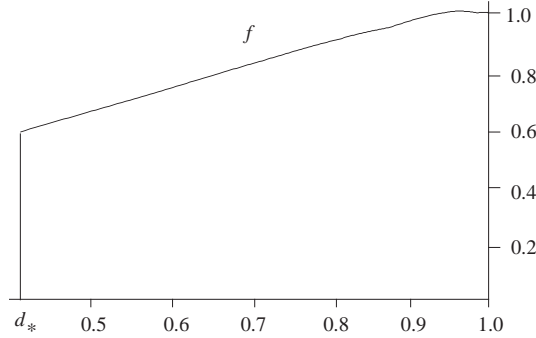


Рис. 2. График функции  $f(d)$  на интервале  $[d_*, 1]$ .

В рассматриваемом случае функция имеет минимум при  $d = d_*$ . В общем случае функция  $f(d)$  имеет минимум на левом конце интервала  $[d_*, 1]$ , если  $f(d_*) < f(1) = 1$ , и на промежутке  $[d_*, 1]$  у нее нет локальных минимумов.

Условие  $f(d_*) < 1$  эквивалентно неравенству

$$\gamma < \frac{1 - d_*}{\sqrt{d_*^{-1/3} - d_*^3}} = \frac{1 - n^{-2/5}}{\sqrt{n^{2/15} - n^{-6/5}}} = \gamma_1(n). \quad (21)$$

Производная функции  $f(d) = d + \gamma\sqrt{g}$ , где  $g = d^{-1/3} - d^3$ , определяется по формуле

$$f'(d) = 1 + \gamma \frac{g'}{2\sqrt{g}}, \quad g' = -\frac{1}{3}d^{-4/3} - 3d^2.$$

Если  $f'(d_*) < 0$ , то  $f(d_*)$  не будет минимальным значением  $f(d)$ . Неравенство  $f'(d_*) > 0$  выполняется при

$$\gamma < -\frac{2\sqrt{g}}{g'} = \frac{6\sqrt{d_*^{-1/3} - d_*^3}}{d_*^{-4/3} + 9d_*^2} = \frac{6\sqrt{n^{2/15} - n^{-6/5}}}{n^{8/15} + 9n^{-4/5}} = \gamma_2(n). \quad (22)$$

В этом случае функция  $f'(d)$  имеет корень на интервале  $[d_*, 1]$ , так как  $f'(d) \rightarrow -\infty$  при  $d \rightarrow 1$ . Докажем, что этот корень будет единственным. Для этого исследуем знак второй производной. Предположим, что

$$f''(d) = \frac{\gamma}{4\sqrt{g}} \left( 2g'' - \frac{(g')^2}{g} \right) < 0, \quad g'' = \frac{4}{9}d^{-7/3} - 6d.$$

Тогда  $2g''g < (g')^2$ . Или

$$2(1 - z)(4/9 - 6z) < (1/3 + 3z)^2,$$

где  $z = d^{10/3}$ . После элементарных преобразований последнее неравенство принимает вид

$$27z^2 - 134z + 7 = 27(z - z_1)(z - z_2) < 0,$$

где

$$z_1 = \frac{67 - \sqrt{67^2 - 189}}{27} \simeq 0.0528, \quad z_2 = \frac{67 + \sqrt{67^2 - 189}}{27} > 2.$$

Следовательно, при  $d < d_1 = z_1^{3/10} \simeq 0.414$  выполняется неравенство  $f''(d) > 0$ , а при  $d_1 < d \leq 1$  имеем  $f''(d) < 0$ . Таким образом, при  $d_1 > d_*$  функция  $f'(d)$  возрастает на интервале  $[d_*, d_1]$ , имеет максимум при  $d = d_1$ , а затем монотонно убывает при  $d \in [d_1, 1]$ . В случае  $d_1 < d_*$  функция  $f'(d)$  монотонно убывает на всем интервале  $[d_*, 1]$ . И в том и другом случае  $f'(d)$  имеет единственный корень, которому соответствует максимум функции  $f(d)$ , поэтому при условии (22) функция  $f(d)$  не имеет локальных минимумов на интервале  $[d_*, d_1]$ . Оба неравенства (21) и (22) будут выполнены, если

$$\gamma(n) < \gamma_m(n) = \min[\gamma_1(n), \gamma_2(n)]. \quad (23)$$

При условии (23) функция  $f(d)$  имеет минимум при  $d = d_*$ ,

$$F_* = d_* + \gamma \sqrt{d_*^{-1/3} - d_*^3}, \quad (24)$$

а оптимальные параметры  $d_*$  и  $a_*$  определяются по формулам

$$d_* = \frac{1}{n^{2/5}}, \quad a_* = \left( \frac{1}{d_*^{1/3} B} - \frac{d_*^3}{B} \right)^{1/4}. \quad (25)$$

Ввиду того, что  $\eta = \eta_*$  при  $a = a_*$ , эффективная жесткость шпангоута в рассматриваемом случае является оптимальной.

Равенство

$$\gamma(n) = \frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{(n-1)\sqrt{h_0}}{\sqrt{\sigma l k n}} \quad (26)$$

позволяет сделать вывод, что условие (23) будет выполнено при достаточно малой толщине оболочки  $h_0$ . Для всех рассматриваемых ниже значений параметров условие (23) выполняется.

Из формул (24) и (26) следует, что величина  $F_*$  уменьшается при уменьшении  $h_0$  и увеличении  $l$  и  $k$ .

Приведем описание алгоритма вычисления оптимальных параметров подкрепленной оболочки. Пусть заданы критическое давление  $p_1$ , параметры материала оболочки  $E$  и  $\nu$ , длина оболочки  $L$ , ее радиус  $R$ , число шпангоутов  $n_r$  и отношение размеров поперечного сечения шпангоута  $k = b/a$ . Учитывая, что  $l = L/R$ , с помощью формулы (17) находим безразмерную толщину  $h_0$  гладкой оболочки, для которой  $p_0 = p_1$  является критическим давлением. Если неравенство (23), где  $n = n_r + 1$ , выполняется, то оптимальная толщина подкрепленной оболочки вычисляется по формуле  $h_* = d_* h_0 = n^{-2/5} h_0$ . Оптимальная безразмерная ширина шпангоута определяется по второй формуле (25), а его оптимальная безразмерная высота — по формуле  $b_* = k a_*$ . Для перехода к размерным величинам надо умножить безразмерные параметры на радиус оболочки  $R$ . Массу оптимальной подкрепленной оболочки можно найти по формуле (16), подставив в нее  $h = h_*$  и  $a = a_*$ .

**5. Численные расчеты оптимальных параметров.** Рассмотрим неподкрепленную шарнирно опертую цилиндрическую оболочку толщиной  $h_0 = 0.01$  и шарнирно опертую цилиндрическую оболочку толщиной  $h$ , подкрепленную  $n_r$  одинаковыми шпангоутами с прямоугольными поперечными сечениями шириной  $a$  и высотой  $b = ka$ . Массы подкрепленной и неподкрепленной оболочек  $M_s$  и  $M_0$  соответственно. Обе оболочки имеют одинаковую длину  $l = 4$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$  и теряют устойчивость при одинаковом значении критического давления. Значения оптимальных параметров  $d_*$ ,  $a_*$  для шпангоутов с квадратными поперечными сечениями и отношения  $M_s/M_0$  для различных  $k$  в зависимости от числа шпангоутов  $n_r$  приведены в таблице 1.

Таблица 1. Оптимальные значения параметров

$n_r$	$d_*$	$a_*$	$M_s/M_0$		
			$k = 1$	$k = 3$	$k = 5$
1	0.758	0.0347	0.788	0.775	0.771
2	0.644	0.0338	0.702	0.677	0.669
4	0.525	0.0313	0.623	0.582	0.569
6	0.459	0.0295	0.589	0.534	0.517
8	0.415	0.0281	0.573	0.506	0.486
10	0.383	0.0270	0.565	0.488	0.464
12	0.358	0.0260	0.5620	0.476	0.450
14	0.339	0.0253	0.5624	0.468	0.439
16	0.322	0.0246	0.565	0.462	0.431
18	0.308	0.0241	0.569	0.459	0.425
20	0.296	0.0236	0.574	0.456	0.420

В случае  $k = 1$  оптимальное число шпангоутов равно 13, так как отношение  $F = M_s/M_0$  имеет минимум  $F = 0.5619$  при  $n_r = 13$ . В окрестности этого минимума функция  $F$  меняется очень медленно. Увеличение ее по сравнению с минимальным значением для  $n_r$  из интервала от 10 до 16 составляет не более 0.5%. При  $k = 3$  и  $k = 5$  функция  $F$  имеет минимум при  $n_r = 24$  и  $n_r = 32$  соответственно, однако эти результаты не вполне достоверны, так как с увеличением числа шпангоутов нарушаются условия применимости приближенного решения (12).

Отношение  $M_s/M_0$  уменьшается с увеличением  $k$ . Однако в рамках предложенной модели мы не можем рассматривать большие значения  $k$ , так как при существенном увеличении ширины шпангоута происходит качественное изменение способа потери устойчивости подкрепленной оболочки, описанное в работе [6]. Форма потери устойчивости, соответствующая критическому давлению (15), сменяется формой, локализованной на поверхности шпангоутов, для которой критическое давление уже не может быть найдено по формуле (15). Чтобы описать потерю устойчивости широкого шпангоута, его следует рассматривать как кольцевую пластину. Приближенное решение задачи о потере устойчивости цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевой пластиной, получено в работе [6].

## Литература

1. Филиппов С. Б. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1999. 196 с.
2. Filippov S. B., Naumova N. V. Optimal design of vibrating ring-stiffened cylindrical shell // COMPDYN 2013, 4 Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics, Kos Island, Greece 2013, CD-RS14, 1–10.



3. Товстик П. Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука, 1995. 320 с.

4. Лопатухин А. Л., Филиппов С. Б. Низкочастотные колебания и устойчивость тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной конечным числом шпангоутов // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2001. Вып. 2. С. 84–90.

5. Малышева О. М., Филиппов С. Б. Влияние эксцентриситета на устойчивость подкрепленных шпангоутами цилиндрических оболочек под действием внешнего давления // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 89–98.

6. Filippov S. B. Buckling of circular ring joint with cylindrical shell // Shell Structures Theory and Applications, Proc. of the 9th SSTA Conference. Jurata, Poland, 2009, 109–112.

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2014 г.

Сведения об авторах

Адамович Ирина Аркадьевна — студент; adamovich.ira@gmail.com

Филиппов Сергей Борисович — доктор физико-математических наук, профессор; s\_b\_filippov@mail.ru

## OPTIMAL DESIGN OF STIFFENED CYLINDRICAL SHELL

*Irina A. Adamovich, Sergey B. Filippov*

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; adamovich.ira@gmail.com, s\_b\_filippov@mail.ru

Buckling under action of external lateral pressure of the cylindrical shell stiffened by identical rings with rectangular cross-sections and a non-stiffened shell of a neutral surface having the same sizes and made of the same material is considered. It is supposed, that the stiffened and non-stiffened shell lose stability at identical critical pressure. To get approximate formulas for the critical pressure a combination of asymptotic method is used. First we seek solutions as a sum of slowly varying functions and edge effect integrals. Thus the initial singularly perturbed system of differential equations is reduced to an approximate system of the smaller order. Assuming that the rings may be considered as circular beams we obtain the solution of the approximate eigenvalue problem describing buckling of ring-stiffened shell by means of homogenization procedure. Using the simple asymptotic formulas for critical pressure the approximate relations for calculation of optimal stiffened shell parameters corresponding to the minimal value of its weight are received in closed form. It is shown that at increase in the ratio of ring width to ring thickness the ratio of weights of stiffened shell to weights of non-stiffened shell decreases. The examples of calculations of optimal parameters are presented. Results of the paper may be used at designing thin-walled structures. Refs 6. Figs 2.

*Keywords:* stiffened cylindrical shell, buckling, asymptotic methods, optimal design.

## References

1. Filippov S. B., *Theory of joint and stiffened shells*, (St.Petersburg Univ. Press, 1999) [in Russian].
2. Filippov S. B., Naumova N. V., “Optimal design of vibrating ring-stiffened cylindrical shell”, *COMPdyn 2013, 4 Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics*, 1–10 (Kos Island, Greece 2013, CD-RS14).
3. Tovstik P. E., *Buckling of thin shells. Asymptotic methods*, (Nauka, Moscow, 1995) [in Russian].
4. Lopatukhin A. L., Filippov S. B., “Low frequency vibration and buckling of the ring stiffened thin cylindrical shell”, *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta* Serie 1, Issue 2, 84–90 (2001).
5. Malysheva O. M., Filippov S. B., “Influence of eccentricity on buckling of thin ring-stiffened cylindrical shells under action of external pressure”, *Vestnik St.Petersburg Univ.* Serie 1, N 2, 89–98 (2009) [in Russian].
6. Filippov S. B., “Buckling of circular ring joint with cylindrical shell”, *Shell Structures Theory and Applications, Proc. of the 9th SSTA Conference*, 109–112 (Jurata, Poland, 2009).