

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СО СЛАБО ЗАКРЕПЛЕННЫМ КРИВОЛИНЕЙНЫМ КРАЕМ*

А. В. Зелинская, П. Е. Товстик

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Найдена критическая нагрузка и форма потери устойчивости круговой трансверсально изотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Предполагается, что криволинейный край оболочки слабо закреплен или свободен. При этом возможно появление формы потери устойчивости, локализованной вблизи этого края, с одновременным снижением критической нагрузки. Считается, что жесткость на поперечный сдвиг мала, и для решения используется модель Тимошенко—Рейсснера (ТР).

Деформация краевого элемента описывается 5 обобщенными координатами, поэтому рассмотрены $2^5 = 32$ возможных варианта граничных условий в зависимости от того, закреплены или свободны эти координаты. В 15 вариантах возможна локализованная вблизи края потеря устойчивости, и исследовано поведение функций $\lambda(q, g)$.

Исследована роль пятого граничного условия в модели ТР, которое отсутствует в модели Кирхгофа—Лява (КЛ). Установлено, что если выполнено граничное условие $H = 0$, то при $g \rightarrow 0$ результаты по модели ТР переходят в аналогичные результаты модели КЛ. Если задано закрепление $\varphi_2 = 0$, то модель ТР при $g \rightarrow 0$ дает новые по сравнению с моделью КЛ результаты. Библиогр. 19 назв.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, осевое сжатие, трансверсально изотропный.

Рассматривается устойчивость при осевом сжатии трансверсально изотропной цилиндрической оболочки. Если края оболочки достаточно хорошо закреплены, вмятины при потере устойчивости заполняют всю поверхность оболочки. Если же один из краев свободен или слабо закреплен, вмятины локализуются в окрестности этого края. Для изотропной оболочки указанная задача была решена ранее по модели Кирхгофа—Лява. Здесь, исходя из модели Тимошенко—Рейсснера, рассматривается трансверсально изотропная оболочка с малой жесткостью на поперечный сдвиг. Приведены случаи слабого закрепления края. Для каждого из них найдена зависимость критической нагрузки и формы прогиба от сдвигового параметра. Результаты сравниваются с аналогичными результатами для изотропной оболочки.

1. Введение. Исследование устойчивости круговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии является одним из важных этапов их расчета. Первые экспериментальные работы были выполнены Лилли [1] и Маллоком [2] в 1908 году. Классическая формула для критической нагрузки при потере устойчивости тонкой круговой цилиндрической оболочки средней длины при осевом сжатии была получена Лоренцем [3] и Тимошенко [4]. В дальнейшем устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии была детально исследована в различных постановках. Исследовалось влияние длины оболочки, способа ее закрепления, моментности начального напряженного состояния, начальных несовершенств формы, нелинейных эффектов, динамических и параметрических нагрузок и др. (см. обзоры [5, 6]).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 13.01.00523а, 12.01.92000.ННС-а).

Здесь исследуются локализованные вблизи края формы потери устойчивости, связанные со слабым закреплением края. Ишлинский [7] первым обратил внимание на возможность локализованной потери устойчивости сжатой пластины со свободным краем, сопровождающейся снижением критической нагрузки. При этом снижение нагрузки оказалось незначительным (менее 1%). Для оболочек со свободным краем снижение нагрузки может быть в 2 раза и более, что впервые установлено в работах Нахбара и Хоффа [8] и Кильчевского [9]. В дальнейшем было показано, что не только свободный, но и слабо закрепленный край порождает локализованную форму потери устойчивости [6, 10–12]. Обнаружено 7 вариантов граничных условий, при которых возможно появление локализованной формы.

Сказанное выше относится к изотропным оболочкам, и упомянутые выше результаты были получены, исходя из двухмерной модели Кирхгофа—Лява (КЛ). Оболочки, изготовленные из трансверсально изотропного материала с относительно малым модулем поперечного сдвига, проявляют ряд особенностей при потере устойчивости при осевом сжатии. При этом для получения корректного результата двухмерная модель КЛ оказывается недостаточной, лучшие результаты дает модель Тимошенко—Рейсснера (ТР), учитывающая поперечный сдвиг. Обсуждение погрешности этих моделей содержится в работах [13–15]. Наряду со снижением нагрузки при малой жесткости на поперечный сдвиг возможно появление форм потери устойчивости, локализованных вблизи боковых поверхностей цилиндра, а также потеря устойчивости самого материала [14–16].

В работе [17] построены локализованные формы потери устойчивости трансверсально изотропной цилиндрической панели со слабо закрепленным прямолинейным краем. Данная работа в значительной мере повторяет метод исследования работы [17]. В ней построены локализованные вблизи криволинейного края формы потери устойчивости трансверсально изотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Найдены варианты граничных условий, допускающих указанную локализацию.

2. Уравнения равновесия. Рассмотрим циклически симметричную деформацию тонкой круговой цилиндрической оболочки средней длины радиуса R , полагая

$$\begin{aligned} \{u, w, \varphi_1, T_1, T_2, Q_1, M_1, M_2\}(x, \varphi) &= \{u, w, \varphi_1, T_1, T_2, Q_1, M_1, M_2\}(x) \sin m\varphi, \\ \{v, \varphi_2, S, Q_2, H\}(x, \varphi) &= \{v, \varphi_2, S, Q_2, H\}(x) \cos m\varphi. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь x, φ — длина дуги образующей и угол в окружном направлении, u, v, w — проекции перемещения, φ_1 и φ_2 — углы поворота нормальных волокон, T_1, S, T_2 — тангенциальные усилия, Q_1, Q_2 — перерезывающие усилия, M_1, M_2, H — изгибающие и крутящий моменты.

Для замкнутой в окружном направлении оболочки m — число волн в окружном направлении ($m = 0, 1, 2, \dots$). Для цилиндрической панели с шарнирно опертыми прямолинейными краями $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0 < 2\pi$,

$$m = k\varphi_0/\pi, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Уравнения равновесия оболочки таковы:

$$\begin{aligned} T_1' - \frac{mS}{R} = 0, \quad S' + \frac{mT_2}{R} = 0, \quad Q_1' - \frac{mQ_2}{R} + \frac{T_2}{R} + q_n = 0, \\ M_1' - \frac{mH}{R} + Q_1 = 0, \quad H' + \frac{mM_2}{R} + Q_2 = 0, \quad (') \equiv \frac{d(\)}{dx}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь q_n — интенсивность внешней нормальной нагрузки. В задаче устойчивости при осевом сжатии усилием $P > 0$ следует считать

$$q_n = -Pw''.$$
 (2.4)

Уравнения (2.3) имеют один и тот же вид как для модели КЛ, так и для модели ТР. Различие этих моделей появляется в соотношениях упругости, связывающих усилия и моменты с деформациями. Для модели КЛ соотношения упругости имеют вид

$$\begin{aligned} T_1 = K(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad \{1, 2\}, \quad S = \frac{K(1-\nu)}{2}\omega, \quad K = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \\ M_1 = D(\kappa_1 + \nu\kappa_2), \quad \{1, 2\}, \quad H = D(1-\nu)\tau, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \end{aligned}$$
 (2.5)

где E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки, тангенциальные $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega)$ и изгибные $(\kappa_1, \kappa_2, \tau)$ деформации равны

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = u', \quad \varepsilon_2 = -\frac{mv + w}{R}, \quad \omega = v' + \frac{mu}{R}, \\ \kappa_1 = w'', \quad \kappa_2 = -\frac{m^2w}{R}, \quad \tau = -\frac{mw'}{R}. \end{aligned}$$
 (2.6)

Для модели ТР (кроме неизвестных перемещений u, v, w) вводятся неизвестные углы поворота нормальных волокон φ_1 и φ_2 , связанные с углами поперечного сдвига γ_1 и γ_2 по формулам

$$\gamma_1 = \varphi_1 + w', \quad \gamma_2 = \varphi_2 - \frac{mw}{R}.$$
 (2.7)

Для модели Кирхгофа—Лява $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. К соотношениям упругости (2.5) добавляются формулы для перерезывающих усилий:

$$Q_1 = G^*h\gamma_1, \quad Q_2 = G^*h\gamma_2, \quad G^* = kG_{13}, \quad k = \frac{5}{6},$$
 (2.8)

где G_{13} — модуль сдвига в поперечном направлении, $k = 5/6$ — поправочный коэффициент, учитывающий неравномерность распределения напряжений поперечного сдвига по толщине оболочки.

Для модели ТР формулы (2.5) сохраняют свой вид, однако при вычислении моментов M_1, M_2, H кривизны и кручение вместо (2.6) вычисляются по формулам [17]

$$\kappa_1 = -\varphi_1', \quad \kappa_2 = \frac{m\varphi_2}{R}, \quad 2\tau = -\varphi_2' + \frac{m}{R}\varphi_1.$$
 (2.9)

Исследуемая ниже потеря устойчивости порождает форму прогиба с большим показателем изменчивости [12], поэтому формулы (2.3)–(2.9) записаны в приближенном варианте [5, 18], принятом в теории пологих оболочек и имеющем погрешность порядка относительной толщины оболочки $h_* = h/R$.

3. Преобразование системы уравнений. Введем новые переменные (со значком $\hat{}$) по формулам

$$\begin{aligned} x &= \frac{R\hat{x}}{\mu}, \quad m = \frac{q}{\mu}, \quad w = R\hat{w}, \quad \{u, v\} = \mu R\{\hat{u}, \hat{v}\}, \quad \varphi_i = \frac{\hat{\varphi}_i}{\mu}, \quad i = 1, 2, \\ \{T_i, S\} &= Eh\{\hat{T}_i, \hat{S}\}, \quad Q_i = Eh\mu\hat{Q}_i, \quad \{M_i, H\} = Eh\mu^2 R\{\hat{M}_i, \hat{H}\}, \\ \mu^4 &= \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}, \quad g = \frac{E\mu^2}{G^*}, \quad P = 2Eh\mu^2\lambda, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где μ — малый параметр относительной толщины, g — сдвиговой параметр (в модели КЛ считаем $g = 0$), λ — искомый параметр нагружения. В дальнейшем значок $\hat{}$ будет опущен. Переменные (3.1) введены таким образом, чтобы при описании формы потери устойчивости все величины имели порядок единицы по отношению малому параметру μ . В частности, коэффициент 2 в выражении для P введен для того, чтобы классическое критическое значение при потере устойчивости [12] было $\lambda = 1$.

После введения функции усилий Φ по формулам

$$T_1 = -q^2\Phi, \quad S = -q\Phi', \quad T_2 = w''\Phi \quad (3.2)$$

первые два уравнения системы (2.3) будут выполнены.

Исключение перемещений u и v из соотношений (2.5), (2.6) приводит к уравнению неравности

$$\Delta\Delta\Phi + w'' = 0, \quad \Delta(\cdot) = (\cdot)'' - q^2(\cdot), \quad (3.3)$$

которое является одним и тем же для обеих моделей КЛ и ТР.

Для модели КЛ третье уравнение (2.3) принимает вид

$$-\Delta\Delta w - 2\lambda w'' + \Phi'' = 0 \quad (3.4)$$

и вместе с уравнением (3.3) образует систему относительно неизвестных функций w, Φ .

Для модели ТР вместо углов поворота нормального волокна φ_1 и φ_2 введем неизвестные функции Ψ и Θ по формулам

$$\varphi_1 = -\Psi' - q\Theta, \quad \varphi_2 = -q\Psi - \Theta'. \quad (3.5)$$

Тогда уравнение для функции Θ отделяется,

$$g_1\Delta\Theta - \Theta = 0, \quad g_1 = \frac{(1-\nu)g}{2}, \quad (3.6)$$

а остальные уравнения дают

$$g^{-1}(\Delta w - \Delta\Psi) + \Phi'' - 2\lambda w'' = 0, \quad w - \Psi + g\Delta\Psi = 0. \quad (3.7)$$

Уравнения (3.7) вместе с уравнением (3.3) образует систему относительно неизвестных функций w, Φ, Ψ . При $g \ll 1$ будет $w \simeq \Psi$, и уравнения (3.7) переходят в уравнение (3.4), а функция Θ является быстро меняющейся и описывает интеграл пограничного слоя.

4. Внутренняя потеря устойчивости. Здесь по моделям КЛ и ТР рассматривается устойчивость цилиндрической оболочки по формам прогиба, описываемым двойкой периодическими функциями

$$w(x, \varphi) = w_0 \sin px \cos m\varphi. \quad (4.1)$$

При этом граничные условия игнорируются. Тот же вид имеют формы прогиба при шарнирном опирании краев $x = 0$ и $x = n\pi/l$, где $l = L/\mu$ — безразмерная длина оболочки.

Для модели КЛ уравнения (3.3) и (3.4) дают

$$\lambda^{\text{КЛ}}(p, q) = \frac{1}{2} \left(\frac{(p^2 + q^2)^2}{p^2} + \frac{p^2}{(p^2 + q^2)^2} \right). \quad (4.2)$$

Минимизация функции $\lambda^{\text{КЛ}}(p, q)$ по волновым числам p и q приводит к классическому значению критической нагрузки [3, 4, 12]

$$\lambda_{cl} = 1 \quad (4.3)$$

и соотношению $p^2 + q^2 \pm p = 0$, описывающему множество форм потери устойчивости. Среди них есть и осесимметричная форма при $p = 1, q = 0$.

Для модели ТР уравнения (3.3) и (3.7) приводят к соотношению

$$\lambda^{\text{ТР}}(p, q) = \frac{1}{2} \left(\frac{(p^2 + q^2)^2}{p^2(1 + g(p^2 + q^2))} + \frac{p^2}{(p^2 + q^2)^2} \right). \quad (4.4)$$

Минимум функции $\lambda^{\text{ТР}}(p, q)$ достигается при $q = 0$, т. е. для осесимметричной формы потери устойчивости.

$$\min_{p, q} \lambda^{\text{ТР}}(p, q) = \min_p \lambda^{\text{ТР}}(p), \quad \lambda^{\text{ТР}}(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{1 + gp^2} + \frac{1}{p^2} \right). \quad (4.5)$$

При $g < 1$ минимум функции $\lambda^{\text{ТР}}(p)$ определяет критическую нагрузку $\lambda_{cr}^{\text{ТР}}$ по модели ТР и достигается при волновом числе p_{cr} , причем

$$\lambda_{cr}^{\text{ТР}} = 1 - \frac{g}{2}, \quad p_{cr} = \frac{1}{\sqrt{1 - g}}. \quad (4.6)$$

При $g \rightarrow 1$ будет $p_{cr} \rightarrow \infty$, т. е. длина волны ℓ при потере устойчивости, равная $\ell = 2\pi/p_{cr}$, стремится к нулю. Последнее обстоятельство говорит о том, что область применимости модели ТР исчерпана.

Известно [14, 15], что условием устойчивости трансверсально изотропного материала при сжатии является неравенство $-\sigma_{11} < G_{13}$, которое в рассматриваемой задаче принимает вид

$$\frac{P}{h} < G_{13} \quad \text{или} \quad 2\lambda < \frac{1}{kg}. \quad (4.7)$$

Анализ устойчивости трансверсально изотропной оболочки при осевом сжатии в случае $\ell \ll 1$ проведен в [15], исходя из нелинейных уравнений трехмерной теории упругости. Показано, что при приближении параметра g к единице и уменьшении длины волны ℓ процесс потери устойчивости проходит две стадии. В первой из них

форма потери устойчивости локализуется в окрестности одной из боковых поверхностей цилиндра. При этом неравенство (4.7) при $k = 1$, по-прежнему, выполнено. При дальнейшем росте нагрузки неравенство (4.7) нарушается и материал теряет устойчивость (по Адамару). Значение $k = 5/6$ в (2.8) введено для учета распределения по параболе напряжений поперечного сдвига. При поверхностной потере устойчивости такое распределение напряжений не имеет места, поэтому следует считать $k = 1$. Заметим, что при $k = 1$, $g = 1$ и $\lambda = \lambda_{cr}^{TP} = 1 - g/2$ неравенство (4.7) превращается в равенство, т. е. мы выходим на границу области применимости модели ТР.

5. Локализованные формы потери устойчивости в окрестности края по модели КЛ. Здесь для удобства сравнения с излагаемыми в п. 6 результатами, полученными по модели ТР, приводятся известные результаты [6, 12] для модели КЛ. Ищется решение системы (3.3), (3.4), локализованное в окрестности края $x = 0$ и экспоненциально затухающее при удалении от этого края. Решение ищем в виде

$$Z(x) = \sum_{k=1}^4 C_k z_k e^{r_k x}, \quad \text{Re}(r_k) < 0, \quad (5.1)$$

где Z заменяет любую из неизвестных функций ($u, v, w, \Phi, T_1, S, M_1, H, Q_1$), входящих в уравнения (3.3), (3.4) и в граничные условия, C_k — произвольные постоянные, z_k — известные постоянные, зависящие от выбора функции Z , r_k — корни характеристического уравнения системы (3.3), (3.4)

$$(r^2 - q^2)^4 + 2\lambda r^2 (r^2 - q^2)^2 + r^4 = 0. \quad (5.2)$$

При $\lambda < 1$, $q > 0$ уравнение (5.2) имеет ровно 4 корня с отрицательной вещественной частью.

В модели КЛ элемент края оболочки имеет 4 степени свободы. Ограничимся рассмотрением 16 вариантов граничных условий, при которых край закреплен или свободен в соответствующем направлении. Упругую заделку края не рассматриваем. Указанные варианты сведены в таблицу:

$$\begin{array}{llll} (1) & u = 0, & T_1 = 0, & (0), \\ (1) & v = 0, & S = 0, & (0), \\ (1) & w = 0, & Q_1^* = 0, & (0), \\ (1) & \varphi_1 = 0, & M_1 = 0, & (0), \end{array} \quad (5.3)$$

где $\varphi_1 = -w'$, $Q_1^* = Q_1 + qH + P\varphi_1$. Слева в (5.3) стоят обобщенные перемещения, а справа — соответствующие обобщенные усилия. Из каждой строки берется по одному граничному условию, (1) означает закрепление, (0) — его отсутствие (например, через (0000) обозначаем свободный край). Приведем выражения для коэффициентов z_k , входящих в общее решение (5.1). Возьмем $w_k = 1$, $k = 1, 2, 3, 4$. Тогда

$$u_k = \frac{r_k(q^2 + \nu r_k^2)}{(r_k^2 - q^2)^2}, \quad v_k = \frac{q((2 + \nu)r_k^2 - q^2)}{(r_k^2 - q^2)^2}, \quad T_{1k} = \frac{r_k^2 q^2}{(r_k^2 - q^2)^2}, \quad S_k = \frac{r_k^3 q}{(r_k^2 - q^2)^2}; \quad (5.4)$$

$$\varphi_{1k} = -r_k, \quad M_{1k} = r_k^2 - \nu q^2, \quad Q_{1k}^* = -r_k(r_k^2 - (2 - \nu)q^2) - 2\lambda r_k. \quad (5.5)$$

Теперь критическая нагрузка λ при локализованной вблизи края $x = 0$ потере устойчивости определяется в результате решения уравнения

$$\Delta_4(\lambda, q) = 0, \quad (5.6)$$

где Δ_4 — определитель линейной системы четырех уравнений относительно постоянных C_k , получающейся при подстановке решения (5.1) в граничные условия. Например, для свободного края $T_1 = S = Q_1^* = M_1 = 0$ уравнение (5.6) имеет вид

$$\Delta_4(\lambda, q) = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ Q_{11}^* & Q_{12}^* & Q_{13}^* & Q_{14}^* \\ M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \end{vmatrix} = 0. \quad (5.7)$$

Из 16 вариантов граничных условий 8 вариантов допускают существование локализованной формы потери устойчивости. Графики функций $\lambda(q)$ для коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$ показаны на рис. 1. В 7 вариантах (0000), (1000), (0100), (0010), (0001), (1100), (1010) при $q = 0$ имеет место двукратное снижение критической нагрузки по сравнению с классическим значением ($\lambda(0) = 1/2$), а для граничных условий (0101) снижение нагрузки незначительно и составляет 3%. Для трех вариантов функции зависимости $\lambda(q)$ совпадают (см. рис. 1).

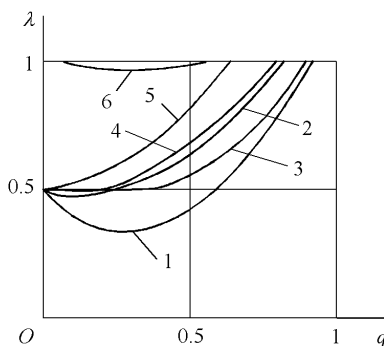


Рис. 1. Функции $\lambda(q)$ по модели КЛ для различных вариантов граничных условий (1 — 0000, 2 — 0100, 3 — 1000, 4 — 1100, 5 — 0010, 1010, 0001, 6 — 0101).

Для замкнутой в окружном направлении оболочки критическую нагрузку определяют минимальные по $q = q_m = t/\mu$ значения функций $\lambda(q)$. Для граничных условий (0000), (0100) и (0101) функции $\lambda(q)$ имеют минимум соответственно при $q = 0.31$, 0.20 и 0.36 , а для условий (1000), (0010), (0001), (1100) и (1010) минимум достигается при $q = 0$.

Для цилиндрической панели с углом раствора φ_0 и с шарнирно опертными прямолинейными краями критическая нагрузка на основании формулы (2.2) равна минимуму по $q = q_k = k\varphi_0/(\pi\mu)$ значений функций $\lambda(q)$. Поэтому представляют интерес значения этих функций не только для тех q , вблизи которых $\lambda(q)$ минимальна.

Для удобства последующего сравнения с результатами по модели ТР введем 4 группы вариантов граничных условий:

Группа 1 состоит из условий (0000) и (0100) и характеризуется тем, что функция $\lambda(q)$ имеет минимум при $q > 0$, а критическая нагрузка ($\lambda < 1/2$) существенно уменьшается по сравнению со значением $\lambda = 1$ для хорошо закрепленной оболочки.

Группа 2 состоит из условий (1000), (0010), (0001), (1100) и (1010), для которых функция $\lambda(q)$ имеет минимум $\lambda(0) = 1/2$.

Группа 3 состоит из варианта (0101), для которого снижение нагрузки при потере устойчивости незначительно.

Группа 4 включает остальные варианты граничных условий, для которых локализация формы потери устойчивости вблизи края не имеет места.

6. Локализованные формы по модели ТР. Как и для модели КЛ, локализованное решение системы (3.3), (3.6), (3.7) ищем в виде

$$Z(x) = \sum_{k=1}^5 C_k z_k e^{r_k x}, \quad \text{Re}(r_k) < 0, \quad (6.1)$$

где величины r_k , $k = 1, 2, 3, 4$ удовлетворяют уравнению

$$(r^2 - q^2)^4 + (2\lambda r^2 (r^2 - q^2)^2 + r^4)(1 - g(r^2 - q^2)) = 0, \quad (6.2)$$

а величину r_5 находим из уравнения (3.6),

$$r_5 = -\sqrt{q^2 + g_1^{-1}}. \quad (6.3)$$

В модели ТР элемент края имеет 5 степеней свободы, поэтому рассматриваем 32 варианта граничных условий, вытекающие из таблицы

$$\begin{aligned} (1) \quad u &= 0, & T_1 &= 0, & (0), \\ (1) \quad v &= 0, & S &= 0, & (0), \\ (1) \quad w &= 0, & \hat{Q}_1 &= 0, & (0), \\ (1) \quad \varphi_1 &= 0, & M_1 &= 0, & (0), \\ (1) \quad \varphi_2 &= 0, & H &= 0, & (0), \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $\hat{Q}_1 = Q_1 - Pw'$. По сравнению с таблицей (5.3) здесь изменилась третья строка и добавилась пятая.

При $k = 1, 2, 3, 4$ для функций u, v, w, T_1, S коэффициенты z_k , входящие в (6.1), вычисляются по тем же формулам (5.4), а остальные коэффициенты равны

$$\begin{aligned} \varphi_{1k} &= -\frac{r_k}{1 - g(r_k^2 - q^2)}, & \varphi_{2k} &= -\frac{q}{1 - g(r_k^2 - q^2)}, & H_k &= \frac{(1 - \nu)r_k q}{1 - g(r_k^2 - q^2)}, \\ M_{1k} &= \frac{r_k^2 - \nu q^2}{1 - g(r_k^2 - q^2)}, & \hat{Q}_{1k} &= -\frac{r_k(r_k^2 - q^2)}{1 - g(r_k^2 - q^2)} - 2\lambda r_k. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Для корня r_5 имеем

$$u_5 = v_5 = w_5 = T_{15} = S_5 = 0. \quad (6.6)$$

Положим $\Theta_k = 1$ и найдем коэффициенты z_5 в (6.1):

$$\begin{aligned} \varphi_{15} &= -q, & \varphi_{25} &= -r_5, & M_{15} &= r_5 q(1 - \nu), \\ H_5 &= \frac{1 - \nu}{2}(r_5^2 + q^2), & \hat{Q}_{15} &= \frac{1 - \nu}{2}q(q^2 - r_5^2). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Как и ранее, собственные значения $\lambda(q, g)$ удовлетворяют уравнению

$$\Delta_5(\lambda, q, g) = 0, \quad (6.8)$$

где Δ_5 — определитель пятого порядка, получающийся при удовлетворении 5 граничных условий.

Прежде, чем искать корни уравнения (6.8), найдем область параметров (λ, p, g) , подлежащую рассмотрению. Корни λ должны быть меньше значений, определяемых из выражения (4.4), при которых реализуются формы (4.1) внутренней потери устойчивости. Искомая область состоит из значений

$$\lambda(q, g) = \min_p \lambda^{\text{TP}}(p, q). \quad (6.9)$$

Для ряда значений параметра g эта область расположена ниже кривых, показанных на рис. 2.

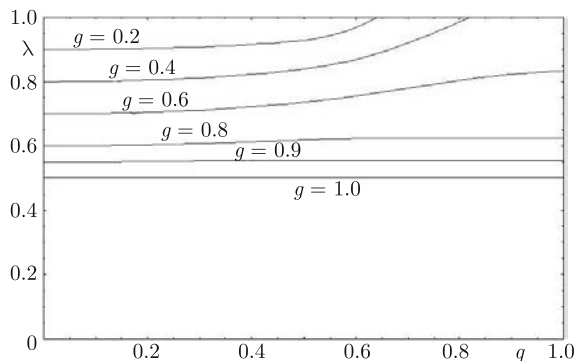


Рис. 2. Область поиска корней уравнения (6.7).

Варианты 32 граничных условий разобьем на те же 4 группы, что и в п. 5.

Группа 1 включает условия (00000), (01001) и (10000), характерные тем, что при фиксированном значении сдвигового параметра g минимум параметра нагрузки $\lambda(q, g)$ достигается при $q > 0$. Для условий (00000) и (10000) кривые показаны на рис. 3.

Группа 2 состоит из 9 вариантов (00001), (00010), (00100), (00101), (10001), (10100), (10101), (11000) и (11001). Для них функция $\lambda(q, g)$ имеет минимум при $q = 0$. Кривые $\lambda(q, g)$ для (00001) и (10001) приведены на рис. 4.

Группа 3 включает условия (00011), (01010) и (11100). Для них кривые $\lambda(q, g)$ расположены вблизи показанных на рис. 2 границ существования локализованных в окрестности края решений. Поэтому форма прогиба сравнительно медленно затухает при удалении от края из-за того, что характеристическое уравнение (6.2) имеет корни с малой по модулю вещественной частью (на границах, показанных на рис. 2, вещественная часть равна нулю). Кривые $\lambda(q, g)$ для (01010) приведены на рис. 5.

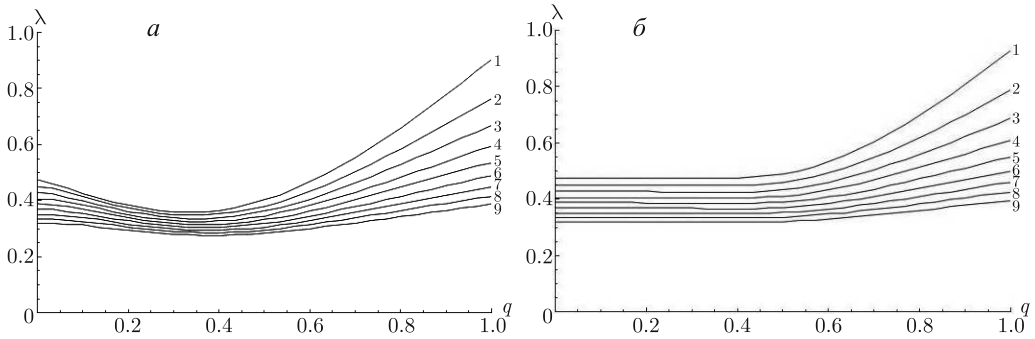


Рис. 3. Графики зависимости λ от q при разных g для варианта граничных условий $a - T_1 = S = \dot{Q}_1 = M_1 = H = 0, b - u = S = \dot{Q}_1 = M_1 = H = 0$:
 1 - $g = 0.1$; 2 - $g = 0.2$; 3 - $g = 0.3$; 4 - $g = 0.4$; 5 - $g = 0.5$; 6 - $g = 0.6$; 7 - $g = 0.7$; 8 - $g = 0.8$; 9 - $g = 0.9$.

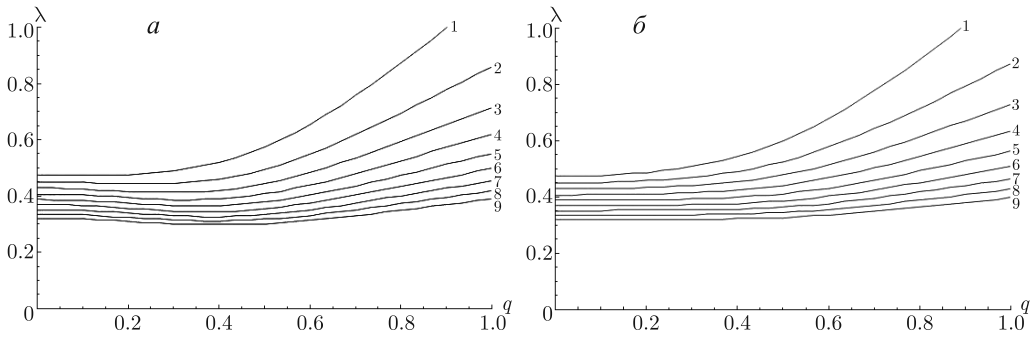


Рис. 4. Графики зависимости λ от q при разных g для варианта граничных условий $a - T_1 = S = \dot{Q}_1 = M_1 = \varphi_2 = 0, b - u = S = \dot{Q}_1 = M_1 = H = 0$:
 1 - $g = 0.1$; 2 - $g = 0.2$; 3 - $g = 0.3$; 4 - $g = 0.4$; 5 - $g = 0.5$; 6 - $g = 0.6$; 7 - $g = 0.7$; 8 - $g = 0.8$; 9 - $g = 0.9$.

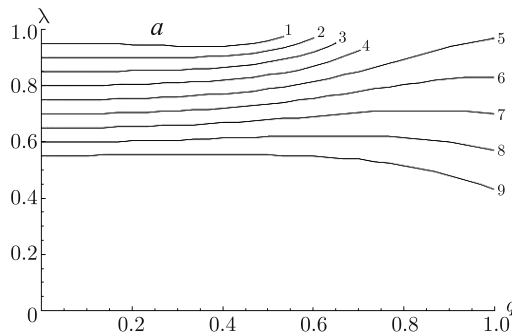


Рис. 5. График зависимости λ от q при разных g для граничных условий $T_1 = v = \dot{Q}_1 = \varphi_1 = H = 0$:
 1 - $g = 0.1$; 2 - $g = 0.2$; 3 - $g = 0.3$; 4 - $g = 0.4$; 5 - $g = 0.5$; 6 - $g = 0.6$; 7 - $g = 0.7$; 8 - $g = 0.8$; 9 - $g = 0.9$.

Группы 4 образуют варианты, для которых локализация формы потери устойчивости вблизи края не имеет места.

При обсуждении полученных результатов отметим сначала два очевидных факта. Во-первых, с ростом параметра g , т. е. с уменьшением жесткости на поперечный сдвиг, функция $\lambda(q, g)$ убывает. Во-вторых, более жесткому граничному условию (что сводится к замене (0) на (1) в шифре варианта) соответствует большее значение $\lambda(q, g)$ или переход в группу 4.

Выше рассмотрена локализация формы потери устойчивости вблизи края $x = 0$ оболочек. При этом нужно иметь в виду два обстоятельства. Во-первых, рассматриваемый край должен иметь более слабое закрепление, чем противоположный (т. е. ему соответствует меньшее значение функции $\lambda(q, g)$). В противном случае края меняются ролями. Если же значения $\lambda(q, g)$ совпадают, возможна локальная потеря устойчивости вблизи обоих краев одновременно. Во-вторых, необходимо следить за тем, успеет ли затухнуть форма потери устойчивости до прихода к противоположному краю. В противном случае влиянием второго края нельзя пренебрегать и нужно решать краевую задачу, удовлетворяя 10 граничным условиям на обоих краях. Для задачи о потере устойчивости цилиндрической панели со слабо закрепленным прямолинейным краем по модели КЛ влияние закрепления противоположного края обсуждается в [19].

Два предельных перехода $g \rightarrow 0$ и $q \rightarrow 0$ заслуживают отдельного обсуждения и рассматриваются в следующих параграфах.

7. Предельный переход от модели ТР к модели КЛ. Положить $g = 0$ в формулах п. 6 нельзя, ибо при этом $r_5 = -\infty$. Поэтому рассмотрим уравнение (6.8) при $g > 0$, $g \rightarrow 0$. Разложим определитель $\Delta_5(\lambda, q, g)$ по элементам пятого столбца и получим

$$\Delta_5(\lambda, q, g) = A_3 Z_3 + A_4 Z_4 + A_5 Z_5 = 0, \quad (7.1)$$

где A_k , $k = 3, 4, 5$ — алгебраические дополнения элементов пятого столбца Z_k . В силу (6.4), (6.6) будет $Z_1 = Z_2 = 0$, а в зависимости от граничных условий (6.4) с учетом формул (6.7), (6.3) и (3.6) получаем

$$\begin{aligned} Z_3 = w_5 = 0 & \quad \text{или} \quad \hat{Q}_{15} = \frac{1-\nu}{2} q(q^2 - r_5^2) \sim g^{-1}, \\ Z_4 = \varphi_{15} = -q \sim 1 & \quad \text{или} \quad M_{15} = r_5 q(1-\nu) \sim g^{-1/2}, \\ Z_5 = \varphi_{25} = -r_5 \sim g^{-1/2} & \quad \text{или} \quad H_5 = \frac{1-\nu}{2} (r_5^2 + q^2) \sim g^{-1}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Наибольшую особенность при $g \rightarrow 0$ имеют величины \hat{Q}_{15} и H_5 . Если в числе пяти граничных условий присутствуют условия $\hat{Q}_1 = H = 0$, то, заменяя третью строку определителя $\Delta_5(\lambda, q, g)$ на линейную комбинацию $Q_1^* = \hat{Q}_1 + qH$ третьей и пятой строк, получаем, что элемент H_5 имеет наибольший порядок, а равенство нулю множителя при нем совпадает с уравнением (5.6) модели КЛ. Граничные условия, содержащие условия $w = H = 0$ также приводят к уравнению (5.6) модели КЛ.

Граничное условие $\varphi_2 = 0$ в модели КЛ не ставится. Поэтому предельный переход при $g \rightarrow 0$ в вариантах, содержащих условие $\varphi_2 = 0$, приводит к новым результатам, не получающимся из модели КЛ.

8. Предельный переход при $q \rightarrow 0$. При $q = 0$ уравнение имеет две пары нулевых корней, откуда следует, что среди решений в формуле (6.1) присутствуют

незатухающие при удалении от края функции. Для граничных условий из группы 2 функция $\lambda(q, g)$ минимальна при $q = 0$. Поэтому потеря устойчивости происходит при минимально возможном значении $q = \mu t$, а именно, при $t = 2$, $q = 2\mu$ (случай $t = 1$ соответствует перемещению сечения как твердого тела). С другой стороны, при $t = 2$ точность используемой системы уравнений пологих оболочек недостаточна. Для уточнения второе уравнение (2.3) нужно заменить на $S' + mT_2/R + Q_2/R = 0$ и взять в (2.6) уточненное выражение для кривизны $\kappa_2 = -(m^2 - 1)w/R$. Указанные уточнения имеют относительный порядок $1/m^2$ (равный 0.25 при $t = 2$) и здесь не рассматриваются. Однако сам факт появления локализованных вблизи края форм потери устойчивости, сопровождающихся снижением критической нагрузки, сомнений не вызывает.

9. Заключение. Найдена критическая нагрузка и форма потери устойчивости круговой трансверсально изотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Предполагается, что криволинейный край оболочки слабо закреплен или свободен. При этом возможно появление формы потери устойчивости, локализованной вблизи этого края, с одновременным снижением критической нагрузки. Ранее эта задача была решена, исходя из двухмерной модели КЛ. Здесь предполагается, что жесткость на поперечный сдвиг мала, и для решения используется модель ТР.

Безразмерная критическая нагрузка $\lambda(q, g)$ зависит от двух основных безразмерных параметров — параметра волнообразования в окружном направлении q и параметра поперечного сдвига g . При волнообразовании внутри оболочки имеет место осесимметричная потеря устойчивости ($q = 0$). При $g = 0$ имеем классическое значение нагрузки $\lambda = 1$, полученное, исходя из модели КЛ. С ростом g (или с уменьшением жесткости на поперечный сдвиг) нагрузка убывает по линейному закону ($\lambda = 1 - 0.5g$) вплоть до значения $g \approx 1$. При $g \geq 1$ материал теряет устойчивость.

Если край оболочки свободен или слабо закреплен, возможна потеря устойчивости по форме, локализованной вблизи этого края. По модели ТР деформация краевого элемента описывается 5 обобщенными координатами, поэтому рассмотрены $2^5 = 32$ возможных варианта граничных условий в зависимости от того, закреплены или свободны эти координаты. В 15 вариантах возможна локализованная вблизи края потеря устойчивости, и исследовано поведение функций $\lambda(q, g)$.

Исследована роль пятого граничного условия в модели ТР, которое отсутствует в модели КЛ. Установлено, что если выполнено граничное условие $H = 0$, то при $g \rightarrow 0$ результаты по модели ТР переходят в аналогичные результаты модели КЛ. Если задано закрепление $\varphi_2 = 0$, то модель ТР при $g \rightarrow 0$ дает новые по сравнению с моделью КЛ результаты.

Литература

1. *Lilly W. E.* The design of structures // Engineering. 1908. Vol. 65. P. 37–40.
2. *Mallock A.* Note on the instability of tubes subjected to end pressure and on the folds in a flexible material // Proc. Roy. Soc. 1908. Vol. 81, N A549. P. 388–393.
3. *Lorenz R.* Die nicht achsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder // Phys. Z. 1911. Vol. 12, N 7. S. 241–260.
4. *Тимошенко С. П.* К вопросу о деформации и устойчивости цилиндрической оболочки // Изв. Петрогр. электротехн. ин-та. 1914. Т. 11. С. 267–287.
5. *Григolloк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 360 с.
6. *Bushnell D.* Buckling of shells — pitfall for designers // AIAA Journal. 1981. Vol. 19, N 9. P. 1183–1226.
7. *Ишлинский А. Ю.* Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95, № 3. С. 477–479.

8. Nachbar W., Hoff N. J. The buckling of free edge of axially compressed circular cylindrical shell // Quart. Appl. Math. 1962. Vol. 2, N 3. P. 160–172.
9. Кильчевский Н. А. Об осесимметричной форме потери устойчивости круговой цилиндрической оболочки // Прикл. мех. 1965. Т. 1, № 11. С. 1–6.
10. Almorh B. O. Influence of the edge conditions on stability of axially compressed cylindrical shells // AIAA Journal. 1966. Vol. 4, N 1. P. 134–140.
11. Tovstik P. E. On forms of local buckling of thin elastic shells // Trans CSME. 1991. Vol. 15, N 3. P. 199–211.
12. Товстик П. Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука; Физматлит, 1995.
13. Товстик П. Е. Об асимптотическом характере приближенных моделей балок, пластин и оболочек // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2007. № 3. С. 49–54.
14. Tovstik P. E., Tovstik T. P. On the 2D models of plates and shells including the transversal shear // ZAMM. 2007. Vol. 87, N 2.
15. Товстик П. Е. Устойчивость трансверсально изотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. 2009. Т. 44, № 4. С. 552–564.
16. Ciarlet P. G. Mathematical Elasticity. Amsterdam etc.: North-Holland, 1988.
17. Ершова З. Г., Товстик П. Е. Цилиндрическая панель со слабо закрепленным прямолинейным краем, изготовленная из трансверсально изотропного материала // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. № 1. С. 45–56.
18. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.
19. Ершова З. Г. Устойчивость цилиндрических панелей со слабо закрепленным прямолинейным краем // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1993. № 3. С. 78–81.

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2014 г.

Сведения об авторах

Зелинская Анна В — студент; anna_zelinskaya@inbox.ru

Товстик Петр Евгеньевич — профессор; peter.tovstik@mail.ru

BUCKLING UNDER AXIAL COMPRESSION OF A TRANSVERSELY ISOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH THE WEAKLY SUPPORTED CURVILINEAR EDGE

Anna V. Zelinskaya, Petr E. Tovstik

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; anna_zelinskaya@inbox.ru, peter.tovstik@mail.ru

The critical load and the buckling modes of a transversely isotropic circular cylindrical shell under axial compression are found. It is assumed that the shell curvilinear edge is free or weakly supported. In these cases the buckling mode is localized near this edge and the critical load is lower than in the case of the clamped edges. Consider that the transversely shear modulus is small, hence, the solution is based on the Timoshenko–Reissner (TR) model.

The deformations of the edge element are described using 5 general coordinates. Therefore, $2^5 = 32$ possible combinations of the boundary conditions are considered, based on the restraint conditions of these coordinates. In 15 cases there is a chance of buckling near the shell edge and the corresponding behavior of function $\lambda(q, g)$ is investigated.

The role of the fifth boundary condition in the TR model, which does not exist in the Kirchhoff–Love (KL) model, is also researched. It is established, that if the boundary condition $H = 0$ is met and $g \rightarrow 0$, then the results using the TR model and the KL model coincides. If the restraint $\varphi_2 = 0$ is imposed and $g \rightarrow 0$, then the TR model gives the new results comparing with the KL model. Refs 19.

Keywords: cylindrical shell, axial compression, transversely isotropic.

References

1. Lilly W. E., “The design of structures”, *Engineering* **65**, 37–40 (1908).
2. Mallock A., “Note on the instability of tubes subjected to end pressure and on the folds in a flexible material”, *Proc. Roy. Soc.* **81**(A549), 388–393 (1908).

3. Lorenz R., "Die nicht achsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder", *Phys. Z.* **12**(7), 241–260 (1911).
4. Timoshenko S. P., "To the Strain Problem and Stability of Cylindrical Shell", *Vestnik Obshch. Tekhnol.* **11**, 267–287 (1914).
5. Grigolyuk E. I., Kabanov V. V., *Stability of Shells*, P. 360 (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
6. Bushnell D., "Buckling of shells — pitfall for designers", *AIAA Journal.* **19**(9), 1183–1226 (1981).
7. Ishlinskii A. Yu., "On a Limit Transition in the Theory of Stability of Elastic Rectilinear Plates", *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **95**(3), 477–479 [Soviet Math. Dokl.] (1954).
8. Nachbar W., Hoff N. J., "The buckling of free edge of axially compressed circular cylindrical shell", *Quart. Appl. Math.* **2**(3), 160–172 (1962).
9. Kil'chevskii N. A., Nikulinskaya S. N., "An Axisymmetric Bulking Mode of a Circular Cylindrical Shell", *Prikl. Mekh.* **1**(11), 1–6 (1965).
10. Almorh B. O., "Influence of the edge conditions on stability of axially compressed cylindrical shells", *AIAA Journal.* **4**(1), 134–140 (1966).
11. Tovstik P. E., "On forms of local buckling of thin elastic shells", *Trans CSME.* **15**(3), 199–211 (1991).
12. Tovstik P. E., *Stability of Thin Shells. Asymptotic Methods* (Nauka, Fizmatgiz, Moscow, 1995) [in Russian].
13. Tovstik P. E., "On the Asymptotic Nature of Approximate Models of Beams, Plates, and Shells", *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Univ. Ser. 1. Mat. Mekh. Astr. N 3.* P. 49–54 (2007) [Vestnik St. Petersburg Univ. Math. (Engl. Transl.) **40** (3), 188–192 (2007)].
14. Tovstik P. E., Tovstik T. P., "On the 2D models of plates and shells including the transversal shear", *ZAMM.* **87**(2), (2007).
15. Tovstik P. E., "Stability of a Transversally Isotropic Cylindrical Shell under Axial Compression", *Mech. Solids.* **44**(4), 552–564 (2009).
16. Ciarlet P. G., *Mathematical Elasticity* (North-Holland, Amsterdam etc., 1988).
17. Ershova Z. G., Tovstik P. E., "The cylindrical panel with a weakly supported rectilinear edge made of a transversely isotropic material", *Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1. Issue 1.* P. 45–56 (2011).
18. Agalovian L. A., *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*, P. 414 (Nauka, Moscow, 1997) [in Russian].
19. Ershova Z. G., "The cylindrical panel with a weakly supported rectilinear edge", *Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1. Issue 3.* P. 78–81 (1993) [in Russian].