

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ МЯГКОЙ АРМИРОВАННОЙ НИТЯМИ ТОРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

А. В. Кузьмин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Рассматривается нелинейная осесимметричная деформация тороидальной оболочки под действием внутреннего давления. Оболочка армирована двумя системами нитей, расположенных по параллелям и меридианам. Предполагается, что нити расположены достаточно часто, поэтому после осреднения получаем двумерную упругую среду, которая является мягкой оболочкой.

Основная особенность мягкой оболочки заключается в том, что она не выдерживает сжимающих напряжений. В равновесном положении все меридианы оболочки растянуты, а часть параллелей может быть сжатой, что приводит к образованию складок.

Для определения деформаций и перемещений оболочки с учетом геометрической и физической нелинейностей получена система обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Разработан метод численного решения краевой задачи для этой системы, а также метод асимптотического интегрирования в предположении, что радиус окружности меридиана тора существенно меньше радиуса его параллели. Проведено сравнение асимптотических и численных результатов. Получены асимптотическое и численное выражения для предельного давления, при котором на оболочке исчезают складки и она становится полностью растянутой. Библиогр. 3 назв. Ил. 2. Табл. 3.

Ключевые слова: анизотропная мягкая оболочка, геометрическая нелинейность, физическая нелинейность, внутреннее давление, асимптотическое решение, численное решение.

1. Введение. Рассматривается осесимметричная деформация тороидальной оболочки, образованной сворачиванием в тор прямоугольной сети из двух систем нитей. В нерастянутом положении длины нитей, расположенных по параллелям и меридианам, равны соответственно L и l . Внутри сети из нитей помещена податливая оболочка с газом, создающая внутреннее давление на тороидальную оболочку (рис. 1). Предполагается, что нити расположены достаточно часто, поэтому после осреднения получаем двумерную упругую среду, которая является мягкой оболочкой [1].

Основная особенность мягкой оболочки заключается в том, что она не выдерживает сжимающих напряжений. В связи с этим при ее деформации могут появляться зоны с одноосным напряженным состоянием. В частности, в рассматриваемых ниже задачах в равновесном положении все нити, идущие по меридианам, натянуты, а часть нитей, идущих по параллелям, может быть ненатянутой.

Данная работа является дополнением к работам [2, 3]. В [2] учитывалась только жесткость нитей, которые считались линейно-упругими, в [3] — и нити, и сама оболочка считались нелинейно-упругими.

В данной работе найдены члены следующего порядка малости для асимптотических разложений, полученных в [3], для случая нелинейных соотношений упругости.

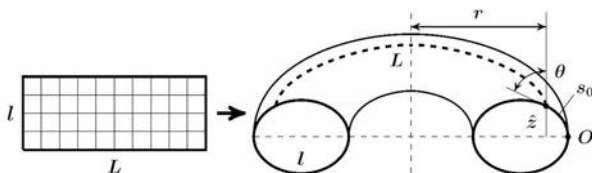


Рис. 1. Тороидальная оболочка.

2. Основные уравнения. Введём обозначения: s_0 — длина дуги меридиана до деформации, отсчитываемая от крайнего правого положения O , $0 \leq s_0 \leq l$; $s(s_0)$ — длина дуги после деформации; $r(s_0)$ — радиус параллели; $\hat{z}(s_0)$ — высота параллели над точкой O ; $\lambda_1(s_0)$, $\lambda_2(s_0)$ — кратности удлинений меридианов и параллелей. Имеют место геометрические соотношения

$$\lambda_1 = \frac{ds}{ds_0}, \quad \lambda_2 = \frac{r}{R}, \quad R = \frac{L}{2\pi},$$

$$\frac{dr}{ds} = -\sin \theta, \quad \frac{d\hat{z}}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\cos \theta}{r},$$
(1)

где R_1 , R_2 — радиусы кривизны поверхности, θ — угол между касательной к меридиану и вертикальным направлением.

Уравнения равновесия в проекции на касательную к меридиану и нормаль к оболочке имеют вид

$$\frac{d(rT_1)}{ds} + T_2 \sin \theta = 0, \quad \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = q,$$
(2)

где q — внутреннее давление, а усилия T_1 и T_2 отнесены к единице длины после деформации.

Оболочку и нити считаем изготовленными из нелинейно-упругих несжимаемых однородных изотропных материалов с упругими потенциалами:

$$G_i \Phi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad i = 1, 2, 3,$$
(3)

где G_i — константы материала.

Примем, что нити находятся в одноосном напряженном состоянии. Тогда для нитей, идущих по меридианам, с учётом несжимаемости материала ($\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$) имеем $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^{-1/2}$, и потенциал принимает вид

$$G_1 \Phi_1(\lambda_1, \lambda_1^{-1/2}, \lambda_1^{-1/2}) = G_1 \hat{\Phi}_1(\lambda_1),$$
(4)

а сила натяжения нитей равна

$$T_1^f = S_1 G_1 \frac{d\hat{\Phi}_1}{d\lambda_1},$$
(5)

где S_1 — площадь поперечного сечения нитей до деформирования.

Для нитей, идущих по параллелям,

$$G_2 \Phi_2(\lambda_2, \lambda_2^{-1/2}, \lambda_2^{-1/2}) = G_2 \hat{\Phi}_2(\lambda_2), \quad T_2^f = S_2 G_2 \frac{d\hat{\Phi}_2}{d\lambda_2}.$$
(6)

Для участков оболочки, находящихся в условиях плоского напряженного состояния, потенциал (3) принимает вид

$$G_3 \Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, (\lambda_1 \lambda_2)^{-1}) = G_3 \hat{\Phi}_3(\lambda_1, \lambda_2).$$
(7)

Истинные напряжения вычисляются по формулам

$$\sigma_i = \lambda_i G_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial \lambda_i}, \quad i = 1, 2.$$
(8)

Усилия, входящие в уравнения (2), равны

$$T_1 = \frac{G_3 h_0}{\lambda_2} \frac{\partial \hat{\Phi}_3}{\partial \lambda_1} + \frac{G_1 N_1 S_1}{\lambda_2} \frac{d \hat{\Phi}_1}{d \lambda_1}, \quad T_2 = \frac{G_3 h_0}{\lambda_1} \frac{\partial \hat{\Phi}_3}{\partial \lambda_2} + \frac{G_2 N_2 S_2}{\lambda_1} \frac{d \hat{\Phi}_2}{d \lambda_2}, \quad (9)$$

где N_1 и N_2 — число нитей (на единицу длины в поперечном направлении) в положении до деформации для меридианов и параллелей соответственно, h_0 — толщина оболочки до деформации.

Если на некотором участке формула (9) даст $T_2 < 0$, то на этом участке реализуется одноосное напряженное состояние, и в соответствии с гипотезами мягких оболочек в системе (2) следует считать $T_2 = 0$.

3. Безразмерные переменные. Введём безразмерные величины по формулам

$$z = \frac{\hat{z}}{R}, \quad s_0 = \rho \varphi, \quad \rho = \frac{l}{2\pi}, \quad \mu = \frac{\rho}{R}, \quad Q = \frac{qR}{G_0 h_0}, \quad P_0 = \frac{p_0 R}{G_0 h_0}, \quad (10)$$

$$t_1 = \frac{T_1 \lambda_2}{G_0 h_0}, \quad t_2 = \frac{T_2 \lambda_1}{G_0 h_0}, \quad g_i = \frac{G_i N_i S_i}{G_0 h_0}, \quad i = 1, 2, \quad g_3 = \frac{G_3}{G_0},$$

где G_0 — произвольно задаваемый модуль сдвига, $\mu < 0.5$, а параметры g_i характеризуют относительную жёсткость нитей по сравнению с оболочкой.

Считая основными неизвестными величины $\theta(\varphi)$, $t_1(\varphi)$, $\lambda_2(\varphi)$, $z(\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, запишем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\varphi} &= \frac{\mu}{t_1} (\lambda_1 \lambda_2 Q - \hat{t}_2 \cos \theta), & \frac{dt_1}{d\varphi} &= -\mu \hat{t}_2 \sin \theta, \\ \frac{d\lambda_2}{d\varphi} &= -\mu \lambda_1 \sin \theta, & \frac{dz}{d\varphi} &= \mu \lambda_1 \cos \theta, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$t_1 = f_1(\lambda_1, \lambda_2) = g_3 \frac{\partial \hat{\Phi}_3}{\partial \lambda_1} + g_1 \frac{d \hat{\Phi}_1}{d \lambda_1}, \quad t_2 = g_3 \frac{\partial \hat{\Phi}_3}{\partial \lambda_2} + g_2 \frac{d \hat{\Phi}_2}{d \lambda_2}, \quad \hat{t}_2 = \max\{t_2, 0\}. \quad (12)$$

В силу симметрии задачи относительно плоскости $z = 0$ при отыскании периодического решения системы (11) достаточно удовлетворить граничным условиям

$$\theta(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad \theta(\pi) = \pi, \quad z(\pi) = 0. \quad (13)$$

Рассмотрим частный вид упругих потенциалов в (3). Пусть функции Φ_i имеют вид

$$\Phi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (14)$$

Тогда безразмерные усилия t_1 , t_2 будут равны

$$\begin{aligned} t_1 &= g_3 \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^2} \right) + g_1 \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right), \\ t_2 &= g_3 \left(\lambda_2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^3} \right) + g_2 \left(\lambda_2 - \frac{1}{\lambda_2^2} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

4. Численное интегрирование. Численно решаем задачу Коши для системы уравнений (11) с начальными условиями

$$\theta(0) = 0, \quad t_1(0) = t_1^0, \quad \lambda_2(0) = \lambda_2^0, \quad z(0) = 0. \quad (16)$$

Величины λ_2^0, t_1^0 определяем из уравнений

$$\theta(\pi) = \pi, \quad z(\pi) = 0. \quad (17)$$

Пусть нити, идущие вдоль меридианов и параллелей, одинаковы, т. е. $g_1 = g_2$. Для удобства сравнения относительного влияния жёсткости нитей и самой оболочки будем считать, что $g_1 + g_3 = 1$. Возьмём $\mu = 0.3$ и рассмотрим три случая:

$$1) \quad g_1 = 1, \quad g_3 = 0; \quad 2) \quad g_1 = g_3 = 1/2; \quad 3) \quad g_1 = 0, \quad g_3 = 1. \quad (18)$$

В случае 1 учитывается только жёсткость нитей, в случае 2 влияние жёсткости нитей и оболочки одинаково, в случае 3 нити отсутствуют. Результаты в трёх случаях различаются незначительно, поэтому далее рассматривается случай 2, для которого результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1. Деформация тора в зависимости от давления Q при $\mu = 0.3, g_1 = g_3 = 1/2$

Q	Положения равновесия							
	Докритические				Закритические			
	$t_1(0)$	$\lambda_2(0)$	$\lambda_2(\pi)$	$t_2(\pi)$	$t_1(0)$	$\lambda_2(0)$	$\lambda_2(\pi)$	$t_2(\pi)$
0.8000	0.231	1.166	0.563	-2.749	7.280	6.083	2.606	2.531
1.0000	0.308	1.202	0.588	-2.394	5.778	4.852	2.086	1.967
1.2000	0.394	1.240	0.613	-2.073	4.754	4.024	1.740	1.565
1.4000	0.492	1.281	0.638	-1.774	3.998	3.424	1.493	1.248
1.6000	0.607	1.329	0.666	-1.484	3.398	2.963	1.307	0.974
1.8000	0.747	1.387	0.699	-1.190	2.887	2.587	1.160	0.715
2.0000	0.936	1.468	0.741	-0.862	2.406	2.257	1.038	0.441
2.2000	1.318	1.645	0.823	-0.361	1.780	1.883	0.912	0.042
2.2232	1.523	1.748	0.865	-0.157	1.538	1.756	0.868	-0.143

Существует предельное давление $Q = Q_p = 2.223$, при превышении которого равновесные положения отсутствуют. При $Q < Q_p$ имеются два равновесных положения — докритическое и закритическое (рис. 2). Результаты для них приведены в левой и в правой частях таблицы соответственно. Для докритических положений равновесия деформации растут с ростом давления, а для закритических положений наблюдается обратная зависимость. У докритических положений равновесия вблизи точки $\varphi = \pi$ напряженное состояние одноосно, о чём говорит знак у величины $t_2(\pi)$.

5. Приближенное решение для закритических положений равновесия.

Предположим, что $\mu \ll 1$, и построим асимптотические разложения решений системы (11), (12), описывающих закритические положения равновесия. После замены переменных

$$t_1 = \mu^{-1}\alpha, \quad \lambda_1 = \mu^{-1}\beta, \quad \lambda_2 = \mu^{-1}\gamma, \quad t_2 = \mu^{-1}\delta \quad (19)$$

система уравнений (11), (12) принимает вид

$$\alpha'(\varphi) = -\mu\delta \sin \theta, \quad \gamma'(\varphi) = -\mu\beta \sin \theta, \quad \theta'(\varphi) = \frac{1}{\alpha}(\beta\gamma Q - \mu\delta \cos \theta), \quad z'(\varphi) = \beta \cos \theta. \quad (20)$$

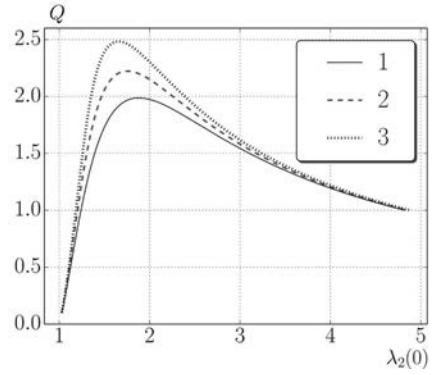


Рис. 2. Зависимость между кратностью удлинения $\lambda_2(0)$ и давлением для трёх случаев соотношений жёсткостей.

$$\begin{aligned}\alpha(\varphi) &= B_1\beta(\varphi) - \frac{g_1}{\beta^2(\varphi)} \cdot \mu^3 + O(\mu^6), & B_1 &= g_1 + g_3, \\ \delta(\varphi) &= B_2\gamma(\varphi) - \frac{g_2}{\gamma^2(\varphi)} \cdot \mu^3 + O(\mu^6), & B_2 &= g_3 + g_3.\end{aligned}\quad (21)$$

Будем искать приближенное решение системы (20), (21), удовлетворяющее граничным условиям (13). Подставляя

$$\beta(\varphi) = \frac{\alpha(\varphi)}{B_1} + \frac{g_1 B_1}{\alpha^2(\varphi)} \mu^3, \quad \delta(\varphi) = \gamma(\varphi) B_2 - \frac{g_2}{\gamma^2(\varphi)} \mu^3 \quad (22)$$

в уравнения (20), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\gamma Q}{B_1} - \frac{\gamma B_2 \cos \theta}{\alpha} \mu + \frac{g_1 B_1 + \gamma Q}{\alpha^3} \mu^3 + \frac{g_2 \cos \theta}{\alpha \gamma^2} \mu^4, \\ \frac{d\alpha}{d\varphi} = -\gamma B_2 \sin \theta \mu + \frac{g_2 \sin \theta}{\gamma^2} \mu^4, \\ \frac{d\gamma}{d\varphi} = -\frac{\alpha \sin \theta}{B_1} \mu - \frac{g_1 B_1 \sin \theta}{\alpha^2} \mu^4, \\ \frac{dz}{d\varphi} = \frac{\alpha \cos \theta}{B_1} + \frac{g_1 B_1 \cos \theta}{\alpha^2} \mu^3. \end{cases} \quad (23)$$

Для получения первых трёх приближений представим

$$\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 \mu + \kappa_2 \mu^2 + \kappa_3 \mu^3, \quad \text{где } \kappa = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, z.$$

Запишем систему уравнений нулевого приближения:

$$\alpha'_0(\varphi) = 0, \quad \gamma'_0(\varphi) = 0, \quad \theta'_0(\varphi) = \frac{\gamma_0(\varphi) Q}{B_1}, \quad z'_0(\varphi) = \frac{\alpha_0(\varphi) \cos \theta_0(\varphi)}{B_1}.$$

Получаем решение, удовлетворяющее крайевым условиям $\theta_0(0) = 0$, $\theta_0(\pi) = \pi$, $z_0(0) = 0$, $z_0(\pi) = 0$:

$$\alpha_0(\varphi) = a_0, \quad \gamma_0(\varphi) = \frac{B_1}{Q}, \quad \theta_0(\varphi) = \varphi, \quad z_0(\varphi) = \frac{a_0 \sin \varphi}{B_1},$$

где $a_0 \equiv \text{const}$ — определяется из первого приближения.

Запишем систему уравнений первого приближения:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varphi}\theta_1(\varphi) &= \frac{\gamma_1(\varphi)Q}{B_1} - \frac{B_1B_2 \cos \varphi}{a_0Q}, & \frac{d}{d\varphi}\alpha_1(\varphi) &= -\frac{B_1B_2 \sin \varphi}{Q}, \\ \frac{d}{d\varphi}\gamma_1(\varphi) &= -\frac{a_0 \sin \varphi}{B_1}, & \frac{d}{d\varphi}z_1(\varphi) &= -\frac{a_0\theta_1(\varphi) \sin \varphi}{B_1} + \frac{\alpha_1(\varphi) \cos \varphi}{B_1}.\end{aligned}$$

Ищем решение, удовлетворяющее краевым условиям $\theta_1(0) = \theta_1(\pi) = 0$, $z_1(0) = z_1(\pi) = 0$.

Интегрируя второе и третье уравнения, получаем

$$\alpha_1 = \frac{B_1B_2}{Q} \cos \varphi + a_1, \quad \gamma_1 = \frac{a_0}{B_1} \cos \varphi + b_1,$$

где a_1, b_1 — произвольные постоянные. Подставляя выражения для α_1, γ_1 в первое уравнение и учитывая краевые условия, находим

$$\theta_1 = \frac{Q^2a_0^2 - B_1^3B_2}{B_1^2a_0Q} \sin \varphi, \quad b_1 = 0.$$

Из четвёртого уравнения получаем

$$z_1 = \frac{Q^2a_0^2 \sin 2\varphi - 2Q^2a_0^2\varphi + 4B_1^2a_1Q \sin \varphi + 4B_1^3B_2\varphi}{4B_1^3Q},$$

а из условия $z_1(\pi) = 0$

$$a_0 = \frac{\sqrt{2B_1B_2B_1}}{Q}.$$

Запишем систему уравнений второго приближения:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varphi}\theta_2(\varphi) &= \frac{B_2}{2B_1} + \frac{Q}{B_1}\gamma_2(\varphi) + \frac{a_1Q}{2B_1^2} \cos \varphi - \frac{B_2}{B_1} \cos^2 \varphi, \\ \frac{d}{d\varphi}\alpha_2(\varphi) &= -\frac{3B_2\sqrt{2B_1B_2}}{2Q} \sin \varphi \cos \varphi, & \frac{d}{d\varphi}\gamma_2(\varphi) &= \left(-\frac{2B_2}{Q} \cos \varphi - \frac{a_1}{B_1}\right) \sin \varphi, \\ \frac{d}{d\varphi}z_2(\varphi) &= \left(-\frac{3B_2}{4Q} \sqrt{\frac{2B_2}{B_1}} \cos \varphi - \frac{a_1B_2}{B_1\sqrt{2B_1B_2}}\right) \sin^2 \varphi - \frac{\sqrt{2B_1B_2}}{Q} \theta_2(\varphi) \sin \varphi + \frac{\alpha_2(\varphi) \cos \varphi}{B_1}.\end{aligned}$$

Аналогичным образом интегрируем данную систему, краевые условия для которой $\theta_2(0) = \theta_2(\pi) = 0 = z_2(0) = z_2(\pi) = 0$.

Окончательно, асимптотическое решение системы (23) имеет вид

$$\begin{aligned}\alpha(\varphi) &= \frac{\sqrt{2B_1B_2B_1}}{Q} + \frac{B_1B_2 \cos \varphi}{Q} \mu + \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{B_1B_2^3(1 + 3 \cos 2\varphi) + 2Q^3g_1}{QB_2\sqrt{B_1B_2}} \mu^2 + O(\mu^3), \\ \gamma(\varphi) &= \frac{B_1}{Q} + \frac{\sqrt{2B_1B_2} \cos \varphi}{Q} \mu + \frac{B_2 \cos 2\varphi}{2Q} \mu^2 + O(\mu^3), \\ \theta(\varphi) &= \varphi + \frac{\sqrt{2}B_2 \sin \varphi}{2\sqrt{B_1B_2}} \mu + O(\mu^3), \\ z(\varphi) &= \frac{\sqrt{2B_1B_2} \sin \varphi}{Q} + \frac{B_2 \sin 2\varphi}{2Q} \mu + \frac{\sqrt{2}(2B_1B_2^3 \cos^2 \varphi + Q^3g_1) \sin \varphi}{4B_1B_2\sqrt{B_1B_2}} \mu^2 + O(\mu^3).\end{aligned}\tag{24}$$

6. Приближенное решение для докритических положений равновесия.

Существует предельное значение давления $Q = Q_*$: при $Q > Q_*$ оболочка полностью растянута, при $Q < Q_*$ на ней имеются складки.

Соотношение для Q_* получаем из уравнений для полностью растянутой оболочки. Предполагаем, что $t_2 \geq 0$ при $\varphi \in [0, \pi]$, и вводим переменные по формулам

$$t_1 = \mu\alpha, \quad \lambda_1 = 1 + \mu\beta, \quad \lambda_2 = 1 + \mu\gamma, \quad t_2 = \mu\delta, \quad z = \mu\zeta. \quad (25)$$

Система уравнений (11), (12) и граничные условия (13) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\varphi} &= -\mu\delta \sin \theta, & \frac{d\theta}{d\varphi} &= \frac{1}{\alpha} [(1 + \mu\beta)(1 + \mu\gamma)Q - \mu\delta \cos \theta], \\ \frac{d\zeta}{d\varphi} &= (1 + \mu\beta) \cos \theta, & \frac{d\gamma}{d\varphi} &= -(1 + \mu\beta) \sin \theta. \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \mu\alpha &= (g_1 + g_3)(1 + \mu\beta) - \frac{g_1}{(1 + \mu\beta)^2} - \frac{g_3}{(1 + \mu\beta)^3(1 + \mu\gamma)^2}, \\ \mu\delta &= (g_2 + g_3)(1 + \mu\gamma) - \frac{g_2}{(1 + \mu\gamma)^2} - \frac{g_3}{(1 + \mu\gamma)^3(1 + \mu\beta)^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

$$\theta(0) = \zeta(0) = \zeta(\pi) = 0, \quad \theta(\pi) = \pi. \quad (28)$$

Решая систему до второго приближения, получим выражение для t_2 :

$$t_2(\varphi) = t_{20}(\varphi) + t_{21}(\varphi)\mu + t_{22}(\varphi)\mu^2.$$

Для корректности решения необходимо выполнение условия $t_2(\varphi) \geq 0$, $\varphi \in [0, \pi]$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} Q_* &\approx Q_0 + \mu Q_1, \quad Q_0 = \frac{6}{3g_1 + 4g_3} (4g_3^2 + 4(g_1 + g_2)g_3 + 3g_1g_2), \\ Q_1 &= -\frac{3}{4(3g_1 + 4g_3)^3} \left(1024g_3^4 + (2752g_1 + 1792g_2)g_3^3 + (2412g_1^2 + 3888g_1g_2 + \right. \\ &\quad \left. + 768g_2^2)g_3^2 + (684g_1^3 + 2520g_1^2g_2 + 1152g_1g_2^2)g_3 + (351g_1 + 432g_2)g_1^2g_2 \right). \end{aligned}$$

В таблице 2 сравниваются результаты для кратностей удлинения $\lambda_2(\pi)$, $\lambda_2(0)$, полученные путём численного интегрирования и асимптотического разложения. Заметим, что во втором приближении результаты оказываются достаточно точны даже для больших μ .

Таблица 2. Значения $\lambda_2(\pi)$, $\lambda_2(0)$ для различных μ при $Q = 1.5$, $g_1 = g_2 = g_3 = \frac{1}{2}$

μ	Асимптотика				Численные результаты	
	Первое приближение		Второе приближение			
	$\lambda_2(\pi)$	$\lambda_2(0)$	$\lambda_2(\pi)$	$\lambda_2(0)$		
0.350	0.962	2.848	1.079	2.964	1.114	2.826
0.300	1.279	3.165	1.379	3.265	1.394	3.180
0.250	1.724	3.609	1.807	3.693	1.811	3.641
0.200	2.391	4.276	2.457	4.343	2.456	4.313
0.150	3.502	5.387	3.552	5.437	3.549	5.422
0.100	5.724	7.609	5.757	7.643	5.756	7.637
0.050	12.391	14.276	12.407	14.293	12.407	14.291

В таблице 3 заметно значительное уточнение значения Q_* за счёт следующего члена приближения.

Таблица 3. Значения Q_* для трёх случаев соотношений жёсткости

	Численное решение		Асимптотическое решение		
	$\mu = 0.1$	$\mu = 0.01$	Q_0	$Q_0 + \mu Q_1$	
				$\mu = 0.1$	$\mu = 0.01$
$g_1 = g_2 = 1, g_3 = 0$	4.12	5.71	6.00	3.83	5.78
$g_1 = g_2 = g_3 = 1/2$	4.59	6.15	6.43	4.49	6.23
$g_1 = g_2 = 0, g_3 = 1$	4.71	5.78	6.00	4.80	5.88

Полученные следующие приближения значительно уточняют асимптотические выражения для основных переменных и предельного давления Q_* и применимы для более широкого диапазона значений μ .

Литература

1. Полякова Е. В., Чайкин В. А. Прикладные задачи механики мягких оболочек и тканей. СПб.: ИПЦ СПГУТД, 2006.

2. Полякова Е. В., Товстик П. Е., Филиппов С. Б., Чайкин В. А. Осесимметричная деформация торообразной оболочки из нитей под действием внутреннего давления // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 4. С. 89–104.

3. Полякова Е. В., Товстик П. Е., Филиппов С. Б. Осесимметричная деформация мягкой армированной нитями тороидальной оболочки // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 3. С. 131–142.

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2014 г.

Сведения об авторе

Кузьмин Андрей Владимирович — студент; ndrewk@ya.ru

AXISYMMETRIC DEFORMATION OF THE REINFORCED BY THREADS TOROIDAL MEMBRANE

A. V. Kuzmin

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; ndrewk@ya.ru

Nonlinear axisymmetric deformation of a toroidal shell under action of internal pressure is considered. The shell is reinforced by two system of threads located on parallels and meridians. It is supposed, that threads are disposed frequently enough therefore after averaging we get the anisotropic elastic membrane. The basic feature of a membrane is that it can not hold the compression stresses. In state of equilibrium all meridians of the shell are stretched, but the part of parallels can be compressed. That leads to formation of folds.

For search of deformations and displacements of a shell the system of the ordinary differential equations of the fourth order is received. Geometrical and physical nonlinearity is taken into account. The method of numerical solution and also the method of asymptotical integration in the case when the meridian radius is much smaller than the parallel one are elaborated. Comparison of asymptotic and numerical results is performed.

It is shown, that there is an ultimate pressure at which excess states of equilibrium are absent. If pressure is less than the ultimate one there are two states of equilibrium — subcritical and supercritical. Asymptotic and numerical solutions for the minimal value of pressure at which folds on the shell are not formed are found. Refs 3. Figs 2. Tables 3.

Keywords: anisotropic membrane, geometrical and physical nonlinearity, internal pressure, asymptotic and numerical solutions.

References

1. Polyakova E. V., Chaikin V. A., *Applied problems of a mechanics of soft shells and fabrics* (SPSUTD, Saint-Petersburg, 2006).

2. Polyakova E. V., Tovstik P. E., Filippov S. B., Chaikin V. A., “Axisymmetric deformation of a toroidal membrane composed of threads under action of an internal pressure”, *Vestnik SPbGU Ser. 1* Issue 4, 89–104 (2009).

3. Polyakova E. V., Tovstik P. E., Filippov S. B., “Axisymmetric deformation of a toroidal membrane composed of threads”, *Vestnik SPbGU Ser. 1* Issue 3, 131–142 (2011).