УДК [51-72+51-74]:531.36:521.1 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 2

СИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЗАДАЧЕ О ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА НА СЛАБОЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ В ГРАВИТАЦИОННОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ*

А. А. Тихонов[1,3], *В. Н. Тхай*[2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
[2] Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,
Российская Федерация, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65
[3] Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики,
Российская Федерация, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

Рассматривается гиростат, движущийся в центральном ньютоновском гравитационном и дипольном магнитном полях по слабоэллиптической кеплеровой орбите в плоскости магнитного экватора. Предполагается, что гиростат обладает электростатическим зарядом и собственным магнитным моментом. Изучается вращательное движение гиростата относительно его центра масс под действием лоренцева момента и момента магнитного взаимодействия. Установлена обратимость системы дифференциальных уравнений вращательного движения гиростата с тремя неподвижными множествами. Проанализированы свойства симметричных периодических движений колебательного типа. Обнаружена бифуркация семейства симметричных колебаний гиростата и рождение двух изолированных симметричных колебаний при переходе от круговой орбиты к слабоэллиптической. Библиогр. 9 назв.

Ключевые слова: гиростат, слабоэллиптическая орбита, вращательное движение, магнитное поле, обратимая система, неподвижное множество, колебания, бифуркация.

1. Объект исследования. Объектом исследования является гиростат, движущийся в гравитационном и магнитном полях по кеплеровой орбите. Предполагается, что гиростат обладает электростатическим зарядом и собственным магнитным моментом. Изучается вращательное движение гиростата относительно его центра масс под действием лоренцева и магнитного моментов — $\vec{M}_L$ и $\vec{M}_M$ соответственно, обусловленных взаимодействием магнитного поля с зарядом гиростата и с его собственным магнитным моментом.

Гравитационное поле аппроксимируется ньютоновским центральным полем, а магнитное поле — полем прямого центрального магнитного диполя [6] с магнитной индукцией $\vec{B}$ и магнитным моментом $\vec{m} = m\vec{m}_0$, где $\vec{m}_0$ — орт дипольного магнитного момента. Предполагается, что магнитное поле однородно в части пространства, занимаемой гиростатом. Учитывается собственное вращение магнитного поля с угловой скоростью $\vec{\omega}_E = -\omega_E\vec{m}_0$. Орбита гиростата лежит в плоскости магнитного экватора.

Предполагается, что эллипсоид инерции гиростата является сферой, главные центральные моменты инерции гиростата равны A, а распределение заряда $Q = \int_V \sigma\, dV$ по объему V гиростата, характеризуемое плотностью σ, обладает осевой симметрией. При этом центр масс C гиростата совпадает с центром заряда O, определяемым в общем случае [7] следующим радиус-вектором относительно центра масс: $\overrightarrow{CO} = Q^{-1}\int_V \sigma\vec{\rho}\, dV$, где $\vec{\rho}$ — радиус-вектор элемента dV относительно точки C. Глав-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 13-01-00347-а и 13-01-00376-а).

ные центральные оси заряда [8] гиростата $Cxyz$ (с ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) вводятся так, что ось электростатической симметрии гиростата совпадает с осью Cz. При этом для соответствующих элементов тензора заряда $\Sigma = \mathrm{diag}\,(a_1, a_2, a_3)$ (в осях $Cxyz$) выполняется равенство $a_1 = a_2$, где

$$a_1 = \int_V \sigma x^2\, dV, \qquad a_2 = \int_V \sigma y^2\, dV, \qquad a_3 = \int_V \sigma z^2\, dV.$$

Собственный магнитный момент гиростата представим в виде суммы двух составляющих: постоянной (в системе $Cxyz$) составляющей $\vec{I}_0$, направленной вдоль оси Cz, и составляющей наведенного магнитного момента $\vec{I}_H$, обусловленного намагничиванием гиростата в магнитное поле. В предположении, что гиростат намагничивается в основном вдоль своей оси симметрии Cz, выражение для $\vec{I}_H$ запишем в виде [6] $\vec{I}_H = E(\vec{B}\vec{k})\vec{k}$, где E=const.

Предполагается также, что гиростат содержит маховик, вращающийся вокруг оси Cz и обладающий осевым моментом инерции J. Центр масс маховика совпадает с точкой C.

2. Построение математической модели. Вращательное движение гиростата исследуется в орбитальной системе координат $C\xi\eta\zeta$, ось $C\xi(\vec{\xi_0})$ которой направлена по положительной трансверсали к орбите, ось $C\eta(\vec{\eta_0})$ — по нормали к плоскости орбиты, ось $C\zeta(\vec{\zeta_0})$ — вдоль радиус-вектора $\vec{R}$ центра масс гиростата относительно притягивающего центра. Исследование проводится с учетом вращения орбитальной системы координат с угловой скоростью $\vec{\omega}_* = \omega_* \vec{\eta}_0$, где

$$\omega_* = \dot{\nu} = \sqrt{\frac{\mu_E}{p^3}}(1 + e\cos\nu)^2,$$

ν — истинная аномалия, μ_E — гравитационная постоянная притягивающего центра, p — фокальный параметр орбиты, e — эксцентриситет орбиты. Точка означает дифференцирование по независимой переменной t, имеющей смысл физического времени.

Абсолютная угловая скорость гиростата $\vec{\omega}$ может быть представлена в виде $\vec{\omega} = \vec{\omega}_* + \vec{\omega}'$, где $\vec{\omega}' = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ — угловая скорость гиростата относительно орбитальной системы координат.

Взаимная ориентация осей xyz и $\xi\eta\zeta$ определяется с помощью матрицы направляющих косинусов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$, удовлетворяющих равенствам

$$\vec{\xi}^0 = \alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k}, \quad \vec{\eta}^0 = \beta_1\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \beta_3\vec{k}, \quad \vec{\zeta}^0 = \gamma_1\vec{i} + \gamma_2\vec{j} + \gamma_3\vec{k}.$$

Кинематические уравнения Пуассона имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{\alpha}_1 + \omega_y\alpha_3 - \omega_z\alpha_2 = -\omega_*\gamma_1, \\ &\dot{\beta}_1 + \omega_y\beta_3 - \omega_z\beta_2 = 0, \qquad \qquad \binom{x\to y\to z}{1\to 2\to 3} \\ &\dot{\gamma}_1 + \omega_y\gamma_3 - \omega_z\gamma_2 = \omega_*\alpha_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Математическая модель вращательного движения гиростата относительно его центра масс строится по схеме Эйлера—Пуассона. Наряду с моментами $\vec{M}_L$ и $\vec{M}_M$ учитывается также гироскопический момент $\vec{M}_G$, обусловленный наличием маховика и имеющий вид

$$\vec{M}_G = -J\Omega\omega_y\vec{i} + J\Omega\omega_x\vec{j}, \tag{2}$$

где Ω — проекция на ось симметрии Cz абсолютной угловой скорости маховика.

Главный момент лоренцевых сил относительно центра масс гиростата определяется выражением

$$\vec{M}_L = \int_V \sigma \vec{\rho} \times (\vec{v} \times \vec{B})\, dV,$$

где $\vec{v}$ — скорость элементарного объема dV относительно вращающегося магнитного поля, а вектор $\vec{B}$ для принятой модели магнитного поля имеет вид $\vec{B} = mR^{-3}\vec{\eta}_0$.

Отсюда, пренебрегая градиентностью магнитного поля в объеме гиростата, согласно [8] получаем следующие проекции момента $\vec{M}_L$ на оси x, y, z:

$$\begin{aligned} &M_{Lx} = mp^{-3}(1 + e\cos\nu)^3[a_3\omega_y\beta_3 - a_1\omega_z\beta_2 - \omega_E(a_3 - a_1)\beta_2\beta_3], \\ &M_{Ly} = mp^{-3}(1 + e\cos\nu)^3[a_1\omega_z\beta_1 - a_3\omega_x\beta_3 + \omega_E(a_3 - a_1)\beta_1\beta_3], \\ &M_{Lz} = mp^{-3}(1 + e\cos\nu)^3 a_1(\omega_x\beta_2 - \omega_y\beta_1). \end{aligned} \tag{3}$$

Для момента $\vec{M}_M$, также вычисляемого без учета градиентности магнитного поля в объеме гиростата, имеем выражение [6]

$$\vec{M}_M = (\vec{I}_0 + \vec{I}_H) \times \vec{B}.$$

Поскольку $\vec{I}_0 = I_0\vec{k}$, $\vec{I}_H = E(\vec{B}\vec{k})\vec{k}$, получаем

$$\vec{M}_M = (I_0 + EB_z)(-B_y\vec{i} + B_x\vec{j}),$$

где проекции B_x, B_y и B_z вычисляются по формулам

$$B_x = \alpha_1 B_\xi + \beta_1 B_\eta + \gamma_1 B_\zeta,\ B_y = \alpha_2 B_\xi + \beta_2 B_\eta + \gamma_2 B_\zeta,\ B_z = \alpha_3 B_\xi + \beta_3 B_\eta + \gamma_3 B_\zeta.$$

Отсюда получаем следующие проекции момента $\vec{M}_M$ на оси x, y, z:

$$\begin{aligned} &M_{Mx} = -mp^{-3}(1 + e\cos\nu)^3[I_0 + Emp^{-3}(1 + e\cos\nu)^3\beta_3]\beta_2, \\ &M_{My} = mp^{-3}(1 + e\cos\nu)^3[I_0 + Emp^{-3}(1 + e\cos\nu)^3\beta_3]\beta_1, \\ &M_{Mz} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Динамические уравнения Эйлера, описывающие вращательное движение гиростата в рассматриваемом частном случае, на основании (2), (3), (4) будут следующими:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x &= mp^{-3}(1 + e\cos\nu)^3[a_3\omega_y\beta_3 - a_1\omega_z\beta_2 - \omega_E(a_3 - a_1)\beta_2\beta_3 - \\ &\qquad - I_0\beta_2 - Emp^{-3}(1 + e\cos\nu)^3\beta_2\beta_3] - J\Omega\omega_y, \\ A\dot{\omega}_y &= mp^{-3}(1 + e\cos\nu)^3[a_1\omega_z\beta_1 - a_3\omega_x\beta_3 + \omega_E(a_3 - a_1)\beta_1\beta_3 + \\ &\qquad + I_0\beta_1 + Emp^{-3}(1 + e\cos\nu)^3\beta_1\beta_3] + J\Omega\omega_x, \\ A\dot{\omega}_z &= mp^{-3}(1 + e\cos\nu)^3 a_1(\omega_x\beta_2 - \omega_y\beta_1). \end{aligned} \tag{5}$$

Совместно с уравнениями для направляющих косинусов (вторая группа уравнений из (1)),

$$\begin{aligned} &\dot{\beta}_1 + \omega_y\beta_3 - \omega_z\beta_2 = 0, \\ &\dot{\beta}_2 + \omega_z\beta_1 - \omega_x\beta_3 = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\dot\beta_3 + \omega_x\beta_2 - \omega_y\beta_1 = 0,$$

они образуют замкнутую систему (5), (6) из шести дифференциальных уравнений.

3. Неподвижные множества гиростата — обратимой механической системы. Заметим, что система (5), (6) инвариантна относительно двух преобразований:

$$\{\omega_x, \omega_y, \omega_z, \beta_1, \beta_2, \beta_3, t\} \to \{-\omega_x, \omega_y, \omega_z, -\beta_1, \beta_2, \beta_3, -t\},$$

$$\{\omega_x, \omega_y, \omega_z, \beta_1, \beta_2, \beta_3, t\} \to \{\omega_x, -\omega_y, \omega_z, \beta_1, -\beta_2, \beta_3, -t\}.$$

Поэтому она принадлежит к классу обратимых механических систем [2] с двумя неподвижными множествами:

$$M_1 = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z, \beta_1, \beta_2, \beta_3 : \omega_x = 0, \beta_1 = 0\},$$

$$M_2 = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z, \beta_1, \beta_2, \beta_3 : \omega_y = 0, \beta_2 = 0\}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в наличии в системе (5), (6) также третьего, не очевидного неподвижного множества:

$$M_3 = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z, \beta_1, \beta_2, \beta_3 : \omega_y = \omega_x, \beta_2 = \beta_1\}.$$

В самом деле, поменяем в системе (5), (6) группу переменных $(\omega_x, \omega_y, \beta_1, \beta_2, t)$ на $(\omega_y, \omega_x, \beta_2, \beta_1, -t)$. Получим

$$\begin{aligned}
-A\dot\omega_y &= mp^{-3}(1+e\cos\nu)^3[a_3\omega_x\beta_3 - a_1\omega_z\beta_1 - \omega_E(a_3-a_1)\beta_1\beta_3 - \\
&\qquad - I_0\beta_1 - Emp^{-3}(1+e\cos\nu)^3\beta_1\beta_3] - J\Omega\omega_x,\\
-A\dot\omega_x &= mp^{-3}(1+e\cos\nu)^3[a_1\omega_z\beta_2 - a_3\omega_y\beta_3 + \omega_E(a_3-a_1)\beta_2\beta_3 + \\
&\qquad + I_0\beta_2 + Emp^{-3}(1+e\cos\nu)^3\beta_2\beta_3] + J\Omega\omega_y,\\
-A\dot\omega_z &= mp^{-3}(1+e\cos\nu)^3 a_1(\omega_y\beta_1 - \omega_x\beta_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\dot\beta_2 + \omega_x\beta_3 - \omega_z\beta_1 &= 0,\\
-\dot\beta_1 + \omega_z\beta_2 - \omega_y\beta_3 &= 0,\\
-\dot\beta_3 + \omega_y\beta_1 - \omega_x\beta_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что система (5), (6) сохраняет вид; меняется только порядок уравнений.

На круговой орбите ($i = 0$) система (5), (6) допускает [1] три первых интеграла

$$\begin{aligned}
&\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 - [d\omega_E(a_3-a_1) + E_0]\beta_3^2 - 2dI_0\beta_3 = h_1,\\
&\omega_x\beta_1 + \omega_y\beta_2 + \omega_z\beta_3 + \frac{d}{2}(a_1-a_3)\beta_3^2 + g\beta_3 = h_2,\\
&\omega_z + da_1\beta_3 = h_3,
\end{aligned}$$

система (5) записывается в виде [1]

$$\begin{aligned}
\dot\omega_x &= d[a_3\omega_y\beta_3 - a_1\omega_z\beta_2 - \omega_E(a_3-a_1)\beta_2\beta_3] - dI_z\beta_2 - e\beta_2\beta_3 - g\omega_y,\\
\dot\omega_y &= d[a_1\omega_z\beta_1 - a_3\omega_x\beta_3 + \omega_E(a_3-a_1)\beta_1\beta_3] + dI_z\beta_1 + e\beta_1\beta_3 + g\omega_x,\\
\dot\omega_z &= da_1(\omega_x\beta_2 - \omega_y\beta_1),
\end{aligned}\tag{7}$$

а система (6) не меняется.

На основе теоремы о последнем множителе Якоби наличие этих интегралов и геометрического условия
$$\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1$$
позволяет свести решение задачи (6), (7) к квадратурам [1].

Интегрирование системы (6), (7) проводится с использованием углов углов Эйлера φ,ψ,θ. Имеем

$$\begin{array}{l}
\omega_x=p+\omega_0\beta_1,\quad \omega_y=q+\omega_0\beta_2,\quad \omega_z=r+\omega_0\beta_3,\\
\beta_1=\sin\varphi\sin\theta,\quad \beta_2=\cos\varphi\sin\theta,\quad \beta_3=\cos\theta,\\
p=\dot\theta\cos\varphi+\dot\psi\sin\theta\sin\varphi,\quad q=-\dot\theta\sin\varphi+\dot\psi\sin\theta\cos\varphi,\quad r=\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta.
\end{array}$$

Из приведенных формул видно, что при замене (φ,ψ,θ) на $(-\varphi,-\psi,\pm\theta)$ (множества $M_{1,2}$) получим
$$(-\beta_1,\beta_2,\beta_3)\to(\mp\beta_1,\pm\beta_2,\beta_3).$$
На множестве M_3 имеем $(\varphi,\psi,\theta)\to(\pi/2-\varphi,-\psi,\theta)$. Поэтому система остается обратимой с сохранением всех неподвижных множеств.

Полный качественный анализ характера движения оси Cz — оси симметрии гиростата, выполнен в [1]. Среди движений имеются колебания и вращения (переменная ψ содержит колебательную и линейную по t составляющие). При этом переменные $\omega_x,\omega_y,\omega_z,\beta_1,\beta_2,\beta_2$ будут периодическими функциями времени, поэтому в системе (6), (7) наблюдаются симметричные периодические движения в виде колебаний.

4. Двоякосимметричные движения гиростата. Рассмотрим обратимую механическую систему

$$\begin{aligned}
\dot x_\alpha&=X_\alpha(x_\alpha,x_\beta,x_\gamma,t),\\
\dot x_\beta&=X_\beta(x_\alpha,x_\beta,x_\gamma,t),\\
\dot x_\gamma&=X_\gamma(x_\alpha,x_\beta,x_\gamma,t),
\end{aligned}\tag{8}$$
$$\begin{aligned}
X_\alpha(x_\alpha,x_\beta,-x_\gamma,-t)&=-X_\alpha(x_\alpha,x_\beta,x_\gamma,t),\\
X_\beta(x_\alpha,x_\beta,-x_\gamma,-t)&=-X_\beta(x_\alpha,x_\beta,x_\gamma,t),\\
X_\gamma(x_\alpha,x_\beta,-x_\gamma,-t)&=X_\gamma(x_\alpha,x_\beta,x_\gamma,t)
\end{aligned}\tag{9}$$

с неподвижным множеством $M_\gamma=\{x:x_\gamma=0\}$; $x=(x_\alpha,x_\beta,x_\gamma)$. Правые части в системе (8) наряду с условиями (9) могут подчинятся также условиям

$$\begin{aligned}
X_\alpha(x_\alpha,-x_\beta,x_\gamma,-t)&=-X_\alpha(x_\alpha,x_\beta,x_\gamma,t),\\
X_\beta(x_\alpha,-x_\beta,x_\gamma,-t)&=X_\beta(x_\alpha,x_\beta,x_\gamma,t),\\
X_\gamma(x_\alpha,-x_\beta,x_\gamma,-t)&=-X_\gamma(x_\alpha,x_\beta,x_\gamma,t),
\end{aligned}\tag{10}$$

что означает существование в системе (8) второго неподвижного множества $M_\beta=\{x:x_\beta=0\}$. В этом случае получаем обратимую систему с двумя неподвижными множествами.

В системе (5), (6) имеем

$$x_\alpha=\{\omega_z,\beta_3\},\quad x_\beta=\{\omega_x,\beta_1\},\quad x_\gamma=\{\omega_y,\beta_2\}.$$

Из наложенных на систему условий (9), (10) следует, что функции

$$X_\beta(x_\alpha,0,0,t),\quad X_\gamma(x_\alpha,0,0,t)$$

являются четными и нечетными по t одновременно. Следовательно, система (8), (9) допускает решения, на которых $x_\beta = 0$, $x_\gamma = 0$, а переменная x_α описывается уравнением

$$\dot{x}_\alpha = X_\alpha(x_\alpha, 0, 0, t)$$

с нечетной по t функцией в правой части уравнения.

Выполнение условий (9) означает существование решений, симметричных относительно множества M_γ. В то же самое время условия (10) гарантируют существование решений, симметричных относительного множества M_β. Понятно, что решение может быть симметрично относительно множеств M_β, M_γ одновременно. В этом случае приходим к понятию двоякосимметричного решения. Примером таких решений являются колебания математического маятника.

Пусть решение началось в момент $t = 0$ на M_γ и оно симметрично относительно множеств M_β и M_γ одновременно. Это решение задается четными функциями $x_\alpha(t), x_\beta(t)$ и нечетной функцией $x_\gamma(t)$. Положим $t = \tau + \Delta$, где Δ — время достижения M_β. Тогда в силу симметрии решения относительно множества M_β функция $x_\gamma(t)$ при замене t на $\tau + \Delta$ должна стать четной функцией по переменной τ, а функция $x_\beta(t)$ — нечетной по τ. Отсюда следует, что на двоякосимметричном решении число не равных тождественно нулю компонент вектора x_β совпадает с числом таких же компонент вектора x_γ.

Что касается векторов $x_\alpha(t)$ и $x_\alpha(\tau + \Delta)$, то они оба должны состоять из четных функций t и τ соответственно. Поэтому на решении имеем $x_\alpha(t) \equiv$const.

Вследствие симметрии относительно множества M_γ решение пересекает множество M_β в моменты $t = \Delta$ и $t = -\Delta$. С другой стороны, на симметричном относительно множества M_β решении в момент $\tau = 0$ получим $x_\beta(\Delta) = 0$, и оно пересекает множество M_γ при $\tau = \Delta$ и $\tau = -\Delta$.

Из изложенного следует, что двоякосимметричное решение пересекает неподвижные множества через промежутки, кратные Δ, представляет собой 4Δ-периодическое решение, и при представлении рядами из синусов и косинусов содержит только нечетные гармоники. Таким образом, приходим к выводу, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *В случае автономной системы или 4Δ-периодической системы любое двоякосимметричное решение представляет собой периодическое движение с периодом 4Δ. При представлении движения рядами из синусов и косинусов эти ряды содержат только нечетные гармоники.*

Замечание. 1. Утверждение о периодичности решения, которое L-нормально неподвижным множествам, содержится в [9]. В теореме 1 дополнительно устанавливается, что время Δ движения между двумя последовательными пересечениями точкой неподвижных множеств всегда равно четверти периода, и указано, каким образом решение представляется рядами.

2. На двоякосимметричном решении необходимо имеем: а) $x_\alpha(t) \equiv \mathrm{const}$, б) число не равных тождественно нулю компонент вектора x_β совпадает с числом таких же компонент вектора x_γ. Это число ниже обозначается через n.

Обратимся к системе (5), (6). На каждом из перечисленных трех неподвижных множеств переменная $x_\alpha = (\omega_z, \beta_3)$. Поэтому на двояко симметричных колебаниях имеем $\omega_z(t) \equiv 0, \beta_3 \equiv 0$ $(\cos\theta \equiv 0)$. Таких движений нет в круговой задаче. Порождающими движениями в эллиптической задаче являются движения круговой задачи, поэтому в системе (5), (6) двояко симметричные движения также не наблюдаются.

Результат 1. В задаче о вращении гиростата отсутствуют двояко симметричные движения.

5. Колебания гиростата на слабоэллиптической орбите. Обратимую механическую систему (5), (6) можно записать тремя способами в виде

$$\begin{gathered}\dot{u} = U(e, u, v), \quad \dot{v} = V(e, u, v), \\ U(e, u, -v) = -U(e, u, v), \quad V(e, u, -v) = V(e, u, v), \\ u \in R^l, \quad v \in R^n (l \geq n)\end{gathered} \tag{11}$$

с векторами

1) $u = \{\omega_y, \omega_z, \beta_2, \beta_3\}, v = \{\omega_x, \beta_1\}$,

2) $u = \{\omega_x, \omega_z, \beta_1, \beta_3\}, v = \{\omega_y, \beta_2\}$,

3) $u = \{\omega_x + \omega_y, \beta_1 + \beta_2, \omega_z, \beta_3\}, v = \{\omega_x - \omega_y, \beta_1 - \beta_2\}$.

В любом из этих способов описания $\dim u = 4, \dim v = 2$. Для системы (11) вводится неподвижное множество $M = \{u, v : v = 0\}$.

Обозначим через $(u(e, u^0, v^0, t), v(e, u^0, v^0, t))$ решение системы (11) с начальной точкой (u^0, v^0) (при $t = 0$). Тогда достаточные условия существования симметричных периодических движений на слабоэллиптической орбите записываются [3] в виде

$$v(0, u^0, 0, T) = 0, \qquad \frac{\partial v(0, u^0, 0, T)}{\partial u^0} \neq 0 \tag{12}$$

(T — полупериод). Первое из условий отражает двукратное пересечение множества M траекторией. Поэтому условия (12), будучи выполненными в одной из точек пересечения, выполняются и во второй точке. Точка u^0 зависит от T, т. е. в круговой задаче колебания образуют семейство. Следовательно, при переходе с круговой на слабоэллиптическую орбиту происходит бифуркация этого семейства и рождаются два изолированных колебания слабоэллиптической задачи.

Анализ симметричных периодических движений в круговой задаче выполнен в [1].

Известно, что симметричные периодические движения системы (11) всегда имеют $l - n$ простых нулевых характеристических показателей (ХП), остальные ХП разбиваются на пары [3], причем среди них имеется пара нулевых ХП, образующих жорданову клетку [5].

Таким образом, симметричные периодические движения гиростата на круговой орбите обязательно содержит два простых нулевых ХП и одну пару нулевых ХП с жордановой клеткой, а полное число ХП равно шести. При этом, вследствие наличия в системе (6), (7) трех первых интегралов и геометрического соотношения, все ХП равны нулю. Простому ХП и ХП в жордановой клетке отвечает линейный периодический по t интеграл системы уравнений в вариациях. Число таких интегралов может быть 4 или 5. В случае четырех интегралов два нулевых ХП образуют вторую жорданову клетку, и неравенство в (12) выполняется [4].

Непосредственное вычисление ХП колебаний гиростата представляет собой непростую задачу. Ниже мы воспользуемся специфичным видом системы уравнений (6), (7).

Система (6), (7) допускает три первых интеграла и геометрическое соотношение. Эти интегралы представляют полный набор для интегрирования системы; других независимых от указанных интегралов нет. Линеаризуем первые интегралы и геометрическое соотношение в окрестности симметричного колебания. Получим четыре линейные периодические по t интеграла. Два из них отвечают простым нулевым ХП.

Рассмотрим симметричное периодическое движение: $u = u^*(t), v = v^*(t)$. Подставим соответствующие функции $\omega_z^*(t)$, $\beta_3^*(t)$ в систему (6), (7). Далее поставим задачу вычисления ХП полученной системы четвертого порядка (назовем ее система (7*)). Эта система имеет два первых периодических по t интеграла.

Оказывается, полученная система (7*) — линейная по переменным $\omega_x, \omega_y,\ \beta_1, \beta_2$. Значит, уравнения в вариациях по сути дела такие же, как сама система (6), (7*). Поэтому они имеют только указанные выше два линейных периодических по t интеграла. Отсюда следует, что ХП в системе (6), (7*) образуют две жордановы клетки, так как в противном случае уравнения в вариациях имели бы дополнительный линейный периодический по t интеграл. Тем самым устанавливается, что для симметричных периодических движений гиростата в круговой задаче выполняется неравенство в (12).

Результат 2. При переходе на слабоэллиптическую орбиту происходит бифуркация семейства симметричных колебаний круговой задачи и рождаются два изолированных симметричных колебания.

6. Заключение. В заключении сделаем несколько замечаний. В работе [1] выполнено качественное исследование гиростата на круговой орбите нулевого наклонения (порождающая система), в частности, найдены все колебания. Проведенный в настоящей работе анализ колебаний порождающей системы позволил вкупе с развитой здесь теорией колебаний обратимых механических систем получить два важных результата в рассмотренной модельной системе. Эти результаты имеют самостоятельное значение. С другой стороны, они необходимы при рассмотрении более сложных постановок задач о динамике вращательного движения спутника-гиростата в гравитационном и магнитном полях Земли.

Наконец, заметим, что вывод о характеристических показателях колебаний порождающей системы позволяет исследовать другие задачи, например, задачу о колебаниях гиростата на круговой орбите ненулевого наклонения.

Литература

1. *Тихонов А. А.* Интегрируемый случай вращательного движения гиростата в гравитационном и магнитном полях Земли // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 89–96.

2. *Тхай В. Н.* Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.

3. *Тхай В. Н.* Вращательные движения механических систем // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 179–195.

4. *Тхай В. Н.* Об устойчивости регулярных прецессий Гриоли // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 848–857.

5. *Тхай В. Н.* О характеристических показателях симметричного периодического движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Механика твердого тела (Донецк). 2004. Т. 34. С. 3–8.

6. *Белецкий В. В., Хентов А. А.* Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 1985. 288 с.

7. *Тихонов А. А.* О влиянии асимметрии заряда на вращательное движение экранированного тела в геомагнитном поле // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1987. Вып. 4 (№ 22). С. 64–69.

8. *Тихонов А. А.* Вычисление главного момента лоренцевых сил, действующих на заряженное тело в дипольном магнитном поле // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1994. Вып. 1 (№ 1). С. 81–86.

9. *Heinbockel J. H., Struble R. A.* Periodic solutions for differential systems with symmetries // J. Soc. Industr. Appl. Math. 1965. Vol. 13, N 2. P. 425–440.

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2014 г.

Сведения об авторах

Тихонов Алексей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор; a.tikhonov@spbu.ru

Тхай Валентин Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор; tkhai@ipu.rssi.ru

SYMMETRICAL OSCILLATIONS IN ATTITUDE MOTION OF GYROSTAT IN WEAK ELLIPTICAL ORBIT IN GRAVITATIONAL AND MAGNETIC FIELDS

Aleksey A. Tikhonov[1,3], *Valentin N. Tkhai*[2]

[1] St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; a.tikhonov@spbu.ru

[2] V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, ul. Profsoyuznaya, 65, Moscow, 117997, Russian Federation; tkhai@ipu.rssi.ru

[3] ITMO University, Kronverksky pr., 49, St.Petersburg, 197101, Russian Federation; a.tikhonov@spbu.ru

A gyrostat in central Newtonian gravitational field and dipolar magnetic field is considered. The gyrostat is moving along weak elliptical Keplerian orbit lying in magnetic equatorial plane. The gyrostat is supplied with flywheel and possesses electrostatic charge and intrinsic magnetic moment. The gyrostat attitude motion under the action of Lorentz and magnetic torques is under consideration. It was revealed that in the case of the circular orbit the system of differential equations of gyrostat attitude motion is reversible with three stationary sets. Moreover, this system may be reduced to quadratures by constructing four first integrals which exist under certain assumptions about the presence of a dynamic and electromagnetic symmetry of gyrostat. In more general case of weak elliptical orbit the mentioned reduction is impossible, but the differential system preserves its reversibility. The symmetrical periodic motions of oscillatory type are analyzed. The absence of doubly symmetric solutions is proved. A bifurcation in the set of gyrostat symmetrical oscillations and generation of two isolated symmetrical oscillations is discovered in transition from circular orbit to elliptical one. Refs 9.

Keywords: gyrostat, weak elliptical orbit, attitude motion, magnetic field, reversible system, stationary set, oscillations, bifurcation.

References

1. Tikhonov A. A., “The integrable case in the gyrostat attitude motion in the gravitational and magnetic Earth’s fields”, *Vestnik Udmurtgskogo Universiteta* Ser. Mekhanika, (2), 89–96 (2009).

2. Tkhai V. N., “The Reversibility of Mechanical Systems”, *J. Appl. Maths. Mechs (PMM)* **56**(4), 461–468 (1991).

3. Tkhai V. N., “The rotational motions of mechanical systems”, *J. Appl. Maths. Mechs (PMM)* **63**(2), 173–188 (1999).

4. Tkhai V. N., “The stability of regular Grioli precessions”, *J. Appl. Maths. Mechs (PMM)* **64**(5), 811–819 (2000).

5. Tkhai V. N., “The Lyapunov exponents of the symmetrical periodic motions of rigid heavy body around fixed point”, *Mechanics of Solids (Donetsk)* **34**, 3–8 (2004).

6. Beletsky V. V., Khentov A. A., *Rotating Motion of a Magnetized Satellite* (Nauka Publ., Moscow, 1985) [in Russian].

7. Tikhonov A. A., “Effect of charge asymmetry on the rotary motion of a shielded body in the geomagnetic field”, *Leningrad University mechanics bulletin* (4), 37–43 (1987).

8. Tikhonov A. A., “The determination of the principal moment of Lorentz forces acting on a charged body in a dipole magnetic field”, *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta* Ser. 1. Matematika Mekhanika Astronomiya, (1), 81–86 (1994).

9. Heinbockel J. H., Struble R. A., “Periodic solutions for differential systems with symmetries”, *J. Soc. Industr. Appl. Math.* **13**(2), 425–440 (1965).