

КОЛЕБАНИЯ ПЛАВАЮЩЕЙ БАЛКИ НА МОРСКОМ ВОЛНЕНИИ*

П. Е. Товстик, Т. М. Товстик

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Рассматриваются малые вертикальные колебания горизонтально расположенной плавающей буксируемой балки на морском волнении. Учитываются изгибная жесткость балки, присоединенная масса и силы сопротивления воды. При описании волнового воздействия принята теория малых гравитационных волн и предполагается, что движение воды является плоским гармоническим или случайным стационарным, а направления распространения и буксировки балки совпадают. Библиогр. 11 назв. Ил. 6.

Ключевые слова: плавающая балка, буксировка, волнение, гармонические и случайные колебания.

1. Введение. Рассматриваются вертикальные колебания горизонтально расположенной плавающей буксируемой балки на морском волнении. Учитываются изгибная жесткость балки, присоединенная масса и силы сопротивления воды. При описании волнового воздействия принята теория малых гравитационных волн [1] и предполагается, что движение воды является плоским гармоническим или случайным стационарным, а направления распространения волн и буксировки балки совпадают (или противоположны).

Рассматриваемая задача возникла при разработке проекта морской стационарной платформы [2] в связи с необходимостью доставки длинных трубобетонных балок на место установки платформы. Ранее были рассмотрены задачи о волновом воздействии на платформу [3–5] и о колебаниях на волнении плавающей балки, расположенной вертикально [6] (такое положение занимает балка в один из моментов установки платформы).

Укажем на моменты, представляющие интерес при решении рассматриваемой ниже задачи о колебаниях горизонтальной балки. Это учет распределенных по длине балки сил волнового воздействия, исследование влияния буксировки и сравнение результатов воздействия гармонического и случайного волнений. В [7] аналогичная задача была рассмотрена для гармонического волнения в линейной и в нелинейной постановке. Было установлено, что при линейной постановке в окрестности резонансов амплитуда колебаний весьма значительна, однако учет нелинейных эффектов приводит к ее существенному уменьшению. Ниже мы ограничиваемся линейной постановкой задачи, однако учитываем случайный характер волнения. Оказывается, что по сравнению с гармоническим волнением случайное волнение при прочих равных условиях также приводит к уменьшению амплитуды колебаний.

2. Математическая модель. Для описания вертикальных колебаний балки используем одномерную модель Бернулли—Эйлера. В положении равновесия сечение балки частично погружено. Предполагаем, что морские гравитационные волны малы, движение воды является плоским и скорость распространения волн направлена вдоль балки.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13.01.00523а).

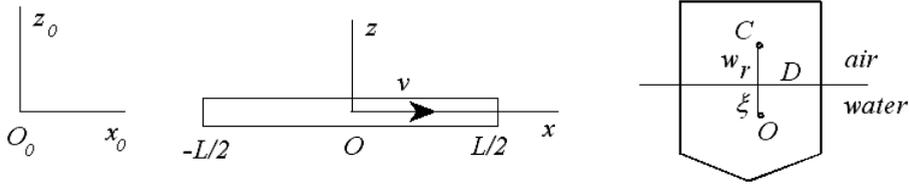


Рис. 1. Буксируемая балка (слева). Перемещение поперечного сечения (справа).

Введем неподвижную систему координат $O_0 x_0 z_0$, у которой ось $O_0 x_0$ совпадает с поверхностью воды при отсутствии волнения, и подвижную систему координат $O x z$, движущуюся в горизонтальном направлении вместе с балкой с постоянной скоростью v ($x_0 = vt + x$) (см. рис. 1 (слева)).

Вертикальные колебания буксируемой балки длины L в подвижной системе координат описываются уравнением

$$J \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f_a + f_c, \quad (2.1)$$

где $w(x, t)$ — вертикальное перемещение сечения x балки ($-L_0/2 \leq x \leq L_0/2$) в момент t по отношению к положению равновесия ($w = OC$ на рис. 1 (справа)), J — изгибная жесткость, $\rho = \rho_b + \rho_w$ — масса единицы длины балки вместе с присоединенной массой воды (слагаемые ρ_b и ρ_w учитывают массу «сухой» балки и присоединенную массу воды соответственно).

Слагаемые f_a и f_c учитывают выталкивающую Архимедову силу и силу сопротивления при движении в воде и зависят от относительной глубины погружения $w_r = w - \xi$ и относительной вертикальной скорости $\dot{w}_r = \dot{w} - \dot{\xi}$ (точкой обозначена производная по времени):

$$f_a = -K w_r, \quad K = D g \gamma_w, \quad f_c = -\nu \dot{w}_r, \quad (2.2)$$

где $\xi(x, t)$ — уровень воды в точке x балки в момент t , D — ширина сечения балки на уровне поверхности воды (см. рис. 1 (справа)), g — ускорение свободного падения, γ_w — плотность воды, ν — коэффициент сопротивления. Форма сечения балки и амплитуда ее колебаний предполагаются такими, что величина D может считаться постоянной. В [7] рассмотрен более общий случай, когда D зависит от w_r , однако при этом приходим к нелинейной задаче, для которой возможно только численное решение.

Пусть $\xi_0(x_0, t)$ — поверхность воды в неподвижной системе координат. Тогда поверхность воды в движущейся системе координат будет

$$\xi(x, t) = \xi_0(x + vt, t), \quad (2.3)$$

и уравнение (2.1) запишется в виде

$$J \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + K w = \nu \frac{\partial \xi}{\partial t} + K \xi(x, t). \quad (2.4)$$

Будем рассматривать два вида волнения — гармоническое и случайное стационарное. Для гармонической волны с длиной L_w , амплитудой a_0 и частотой ω будет [1, 2]

$$\xi_0(x_0, t) = \text{Re} [a_0 \exp(i(kx_0 - \omega t))] = \text{Re} [a_0 \exp(ik(x_0 - v_w t))], \quad i = \sqrt{-1}, \quad (2.5)$$

где v_w — скорость распространения волны, причем

$$k = 2\pi/L_w, \quad v_w^2 = g/k, \quad \omega^2 = gk, \quad L_w = 2\pi g/\omega^2. \quad (2.6)$$

В подвижной системе координат вместо соотношения (2.5) получаем

$$\xi(x, t) = \text{Re} [a_0 \exp(i(kx - \omega_v t))], \quad \omega_v = \omega - \omega^2 v/g = \omega(1 - v/v_w), \quad (2.7)$$

откуда, в частности, следует, что возмущающая частота ω_v зависит от скорости буксировки v .

Обратимся к случайному волнению. Предположим, что при фиксированном значении x_0 функция $\xi_0(x_0, t)$ является стационарным случайным процессом со спектральной плотностью $s_\xi(\omega)$. Запишем ее интегральное каноническое разложение [8] с подынтегральной функцией вида (2.5):

$$\xi_0(x_0, t) = \text{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) \exp(i(\omega^2 x_0/g - \omega t + \varphi)) d\omega \right], \quad (2.8)$$

где $a(\omega)$ — дельта-коррелированная случайная функция частоты ω ,

$$\mathbf{E}\{a(\omega)a(\omega_1)\} = 2\pi s_\xi(\omega)\delta(\omega - \omega_1) \quad (2.9)$$

Здесь $\mathbf{E}\{\cdot\}$ — математическое ожидание, $\delta(z)$ — обобщенная дельта-функция Дирака, φ — начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $[0, 2\pi)$. Переходя к подвижной системе координат, получаем

$$\xi(x, t) = \text{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) \exp(i(\omega^2 x/g - \omega_v t + \varphi)) d\omega \right], \quad \omega_v = \omega - \frac{\omega^2}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{g}{v}. \quad (2.10)$$

3. Разложение решения по системе балочных функций. Концы балки свободны, поэтому представим решение уравнения (2.4) в виде суммы

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N X_n(\hat{x})T_n(t), \quad \hat{x} = \frac{x}{L_0}, \quad (3.1)$$

где $X_n(\hat{x})$ — ортонормированная система собственных (балочных) функций краевой задачи

$$X_n'''' - \alpha_n^4 X = 0, \quad X_n'' = X_n''' = 0 \quad \text{при} \quad \hat{x} = \pm 1/2, \quad ()' = d()/d\hat{x}, \quad (3.2)$$

причем первые собственные значения равны $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 4.73$, $\alpha_4 = 7.85$, $\alpha_5 = 11.00, \dots$ Собственные функции удовлетворяют условию

$$\int_{-1/2}^{1/2} X_k(\hat{x})X_n(\hat{x})d\hat{x} = \delta_{kn}, \quad (3.3)$$

где δ_{kn} — символ Кронекера. Первые две собственные функции $X_1(\hat{x}) = 1$ и $X_2(\hat{x}) = \hat{x}\sqrt{12}$ описывают движение балки как твердого тела, а функции $X_n(\hat{x})$ при $n \geq 3$ —

изгибные деформации. При $n = 1, 3, 5, \dots$ функции $X_n(\hat{x})$ четные, а при остальных n — нечетные.

Подставляя функцию (3.1) в уравнение (2.4), умножая на $X_n(\hat{x})$ и интегрируя по \hat{x} в пределах $(-1/2, 1/2)$, с учетом соотношения (3.3) для определения функции $T_n(t)$ получим уравнение

$$\ddot{T}_n + \nu_0 \dot{T}_n + \omega_n^2 T_n = f_n(t) = \int_{-1/2}^{1/2} X_n(\hat{x})(K_0 \xi(L_0 \hat{x}, t) + \nu_0 \dot{\xi}(L_0 \hat{x}, t)) d\hat{x}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.4)$$

где ω_n — частоты свободных колебаний плавающей в воде балки,

$$\omega_n^2 = K_0 + \frac{J\alpha_n^4}{L_0^4 \rho}, \quad K_0 = \frac{K}{\rho}, \quad \nu_0 = \frac{\nu}{\rho}. \quad (3.5)$$

Зависимость от x функций $\xi(x, t)$ как для гармонического, так и для случайного волнения имеет вид $\exp(ikx) = \exp(i\omega^2 x/g)$ (см. формулы (2.7) и (2.10)). Поэтому интегрирование по \hat{x} в (3.4) может быть выполнено заранее. Введем функции безразмерного параметра η :

$$\Psi_n(\eta) = \int_{-1/2}^{1/2} X_n(\hat{x}) \exp(i\eta \hat{x}) d\hat{x}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \eta = \frac{2\pi L_0}{L_w} = \frac{\omega^2}{\omega_*^2}, \quad \omega_* = \sqrt{\frac{g}{L_0}}. \quad (3.6)$$

С одной стороны, параметр η пропорционален отношению длины балки к длине волны, а, с другой, — квадрату отношения частоты возмущения к характерной частоте ω_* , зависящей только от длины балки. Заметим, что для четных функций $X_n(\hat{x})$ функции $\Psi_n(\eta)$ вещественные, а для нечетных — чисто мнимые. Ниже показано, что амплитуда колебаний зависит от модулей $|\Psi_n(\eta)|$. Графики функций $|\Psi_n(\eta)|$ приведены на рис. 2.

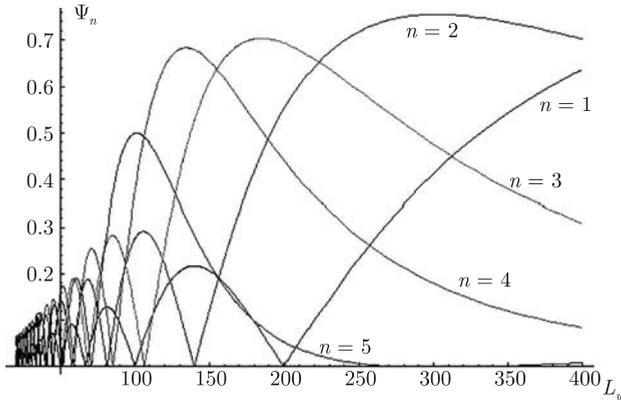


Рис. 2. Функции $|\Psi_n(\eta)|$ при $L_0 = 200$, $n = 1, \dots, 5$.

4. Колебания при гармоническом волнении. При гармоническом волнении с амплитудой волны a_0 и частотой ω в силу соотношений (2.7) и (3.6) функция $f_n(t)$ в уравнении (3.4) равна

$$f_n(t) = \text{Re} \{ a_0 \Psi_n(\eta) (K_0 - i\omega \nu_0) \exp(i\omega t) \}. \quad (4.1)$$

Периодическое решение уравнения (3.4) имеет вид

$$T_n(t) = A_n(\omega) \sin(\omega_v t + \varepsilon_n), \quad A_n(\omega) = a_0 |\Psi_n(\eta)| \frac{\sqrt{K_0^2 + \nu_0^2 \omega_v^2}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_v^2)^2 + \nu_0^2 \omega_v^2}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

Амплитуда колебаний $A_n(\omega)$ пропорциональна амплитуде волнения a_0 , зависит от длины балки L_0 и от скорости буксировки v , от которой в силу формулы (2.10) зависит возмущающая частота ω_v . При $\omega_v \approx \omega_n$, $\nu_0 \ll \omega_n$ имеет место резонанс, сопровождающийся существенным ростом амплитуды (разумеется, если при этом функция $|\Psi_n(\eta)|$ не близка к нулю, см. рис. 2).

5. Колебания при случайном стационарном волнении. В силу соотношений (2.10) и (3.6) правая часть уравнения (3.4) принимает вид

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) \Psi_n(\omega) (K_0 - i\nu_0 \omega_v) \exp(-i(\omega_v t - \varphi)) d\omega. \quad (5.1)$$

Найдем корреляционную функцию функции $f_n(t)$:

$$K_{f_n}(t, t') = \mathbf{E}\{f_n(t) \overline{f_n(t')}\} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}\{a(\omega) a(\omega')\} \times \\ \times \Psi_n(\eta) \overline{\Psi_n(\eta')} (K_0 - i\nu_0 \omega_v) (K_0 + i\nu_0 \omega'_v) \exp(i(\omega'_v t' - \omega_v t)) d\omega d\omega', \quad (5.2)$$

где в силу (2.10)

$$\omega_v = \omega - \frac{\omega^2}{\omega_0}, \quad \omega'_v = \omega' - \frac{\omega'^2}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{g}{v}; \quad \eta = \frac{\omega^2}{\omega_*^2}, \quad \eta' = \frac{\omega'^2}{\omega_*^2}. \quad (5.3)$$

С учетом соотношения (2.9) формула (5.2) переписывается в виде

$$K_{f_n}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\xi}(\omega) |\Psi_n(\eta)|^2 (K_0^2 + \nu_0^2 \omega_v^2) \exp(i\omega_v \tau) d\omega, \quad \tau = t' - t, \quad (5.4)$$

или

$$K_{f_n}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(\omega) \exp(i(\omega - \omega^2/\omega_0)\tau) d\omega, \quad \Phi_n(\omega) = s_{\xi}(\omega) |\Psi_n(\eta)|^2 (K_0^2 + \nu_0^2 \omega_v^2). \quad (5.5)$$

Найдем спектральную плотность процесса $f_n(t)$:

$$s_{f_n}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{f_n}(\tau) e^{-i\Omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(\omega) \exp(i(\omega_v - \Omega)\tau) d\omega d\tau. \quad (5.6)$$

Считая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(\omega_v - \Omega)\tau) d\tau = \delta(\omega_v - \Omega), \quad (5.7)$$

перепишем формулу (5.6) в виде

$$s_{f_n}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(\omega) \delta(\omega_v(\omega) - \Omega) d\omega, \quad \omega_v(\omega) = \omega - \frac{\omega^2}{\omega_0}. \quad (5.8)$$

При фиксированной частоте Ω рассмотрим квадратное уравнение относительно ω :

$$\omega_v(\omega) = \Omega \quad \text{или} \quad \omega^2/\omega_0 - \omega + \Omega = 0. \quad (5.9)$$

В зависимости от направления буксировки (от знака v) частота ω_0 может иметь любой знак.

Если уравнение (5.9) не имеет вещественных корней, тогда спектральная плотность $s_{f_n}(\Omega) = 0$.

Пусть $\omega^{(1)}(\Omega)$ и $\omega^{(2)}(\Omega)$ вещественные корни уравнения (5.9). Тогда спектральная плотность

$$s_{f_n}(\Omega) = \sum_{k=1}^2 c_k \Phi_n(\omega^{(k)}(\Omega)), \quad c_k = \left| \frac{d\omega_v}{d\omega} \right|_{\omega=\omega^{(k)}(\Omega)} = |1 - 2\omega^{(k)}(\Omega)|. \quad (5.10)$$

Такой вид формулы (5.10) связан с буксировкой ($v \neq 0$). При $v = 0$ было бы $\Omega = \omega$ и $s_{f_n}(\Omega) = \Phi_n(\omega)$.

Теперь из уравнения (3.4) находим спектральную плотность амплитуды $T_n(t)$:

$$s_{T_n}(\Omega) = \frac{s_{f_n}(\Omega)}{(\Omega^2 - \omega_n^2)^2 + \nu_0^2 \Omega^2}, \quad (5.11)$$

и дисперсию

$$\sigma_{T_n}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s_{T_n}(\Omega) d\Omega. \quad (5.12)$$

Ниже среднеквадратичное отклонение σ_{T_n} будем сравнивать с величиной $A_n(\omega)\sqrt{2}$, соответствующей амплитуде $A_n(\omega)$ при гармоническом волнении (см. (4.2)).

Спектральная плотность амплитуды $s_{T_n}(\Omega)$ зависит от спектральной плотности волнения $s_{\xi}(\omega)$ и через вспомогательные частоты ω_0 и ω_* зависит от длины балки L_0 и от скорости буксировки v .

Различными авторами предложен ряд аналитических выражений для спектральной плотности морского волнения на глубокой воде [9–11]. Эти выражения могут быть записаны в виде

$$s_{\xi}(\omega) = \sigma_{\xi}^2 F_{mn}(z), \quad F_{mn}(z) = \alpha_{mn} z^{-n} \exp(-\beta_{mn} z^{-m}), \quad z = \frac{\omega}{\bar{\omega}}, \quad (5.13)$$

где $F_{mn}(z)$ — нормированная спектральная плотность, такая, что

$$2 \int_0^{\infty} F_{mn}(z) dz = 1, \quad (5.14)$$

а $\bar{\omega}$ — средняя частота волн, определяемая по формуле

$$\bar{\omega} = \frac{\sigma_{\xi}}{\sigma_{\xi}^2}, \quad \sigma_{\xi}^2 = 2\sigma_{\xi}^2 \int_0^{\infty} z^2 F_{mn}(z) dz. \quad (5.15)$$

Параметры m и n в определенных пределах задаются произвольно, а параметры α_{mn} и β_{mn} находятся из условий (5.14) и (5.15). Ниже принято [9] $m = 4$, $n = 5$, $\alpha_{45} = 0.88$, $\beta_{45} = 0.44$ и график функции $F(z)$ представлен на рис. 3.

6. Численные данные и результаты при гармоническом волнении. Для удобства сравнения результатов для гармонического и случайного волнения возьмем

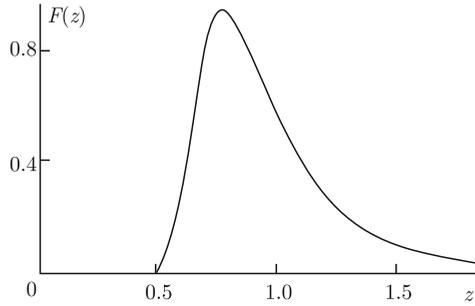


Рис. 3. График нормированной спектральной плотности $F(z)$ при $m = 4, n = 5$.

те же данные, что и в [8], и приведем полученные в [8] результаты для гармонического волнения в линейном приближении. Пусть длина балки $L_0 = 200$, ширина сечения на уровне поверхности воды $D = 12$, линейная плотность массы балки вместе с присоединенной массой воды $\rho = 1.132 \cdot 10^6$, изгибная жесткость $J = 1.704 \cdot 10^{13}$ (все величины приводятся в международной системе единиц СИ). В формуле (3.4) $K_0 = 1.04$ и по формуле (3.5) находим первые частоты собственных колебаний балки в воде

$$\omega_1 = \omega_2 = 1.02, \quad \omega_3 = 7.00, \quad \omega_4 = 19.1, \quad \omega_5 = 37.4. \quad (6.1)$$

Как и в [7], коэффициент сопротивления в линейном приближении ν_0 примем равным

$$\nu_0 = 0.01325 a_0 \omega, \quad (6.2)$$

где a_0 и ω — амплитуда и частота гармонического волнения.

Пусть $a_0 = 1$. Возьмем $v = -5$, т. е. буксировка проводится навстречу движению волн. Тогда характерные частоты задачи суть $\omega_* = 4.515$, $\omega_0 = -1.962$. Теперь по формуле (4.2) находим амплитуды колебаний A_n , соответствующие различным формам $X_n(\hat{x})$. Представим зависимости $A_n(\omega)$ как $A_n(L_w)$, ибо длина волны L_w связана с частотой ω формулой (2.6).

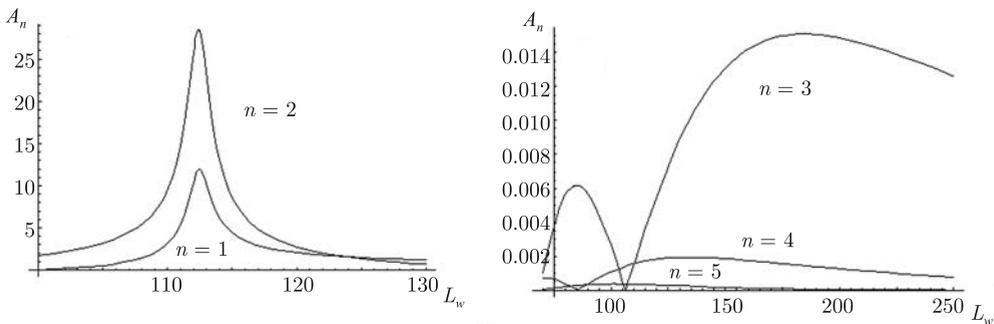


Рис. 4. Зависимость амплитуд $A_n(L_w)$ для $a = 1, v = -5$.

Для принятых данных резонанс возможен только для двух первых форм колебаний X_1 и X_2 . Уравнение $\omega_1 = \omega_v$ приводит к выражению для резонансной длины волны

$$L_w^{res} = \pi g / (2\omega_1) (1 + \sqrt{1 - 4v\omega_1/g})^2 = 14.8 (1 + \sqrt{1 - v/2.4})^2. \quad (6.3)$$

Если $v \geq 2.4$, резонанс невозможен.

На рис. 4 представлены амплитуды колебаний $A_n(L_w)$ для $a = 1$, $v = -5$. Две первые формы ($n = 1, 2$) имеют резонанс при $L_w^{res} = 112$. Вблизи резонанса построенное линейное приближение неприемлемо в связи с большими амплитудами колебаний.

Амплитуды изгибных колебаний A_n , $n = 3, 4, 5$, малы и быстро убывают с ростом номера формы колебаний n .

7. Численные результаты при случайном волнении. Возьмем те же параметры, характеризующие балку, и ту же скорость буксировки, что и в п. 6. Рассмотрим колебания при случайном стационарном волнении со спектральной плотностью $s_\xi(\omega)$, определенной по формуле (5.13), причем нормированная спектральная плотность $F(z)$ показана на рис. 3. Возьмем $\sigma_\xi = 1/\sqrt{2}$, что соответствует амплитуде гармонического волнения $a_0 = 1$. В качестве характерной частоты волнения используем частоту $\bar{\omega}$, определенную по формуле (5.15), а в качестве характерной длины волны возьмем среднюю длину $\bar{L}_w = 2\pi g/\bar{\omega}^2$. Коэффициент сопротивления возьмем в виде, аналогичном (6.2), $\nu_0 = 0.01325 \sqrt{2} \sigma_\xi \bar{\omega}$.

Для скорости буксировки $v = -5$ будет $\omega_0 = g/v = -1.962$ и уравнение (5.9) имеет вещественные корни:

$$\omega^{(1),(2)}(\Omega) = -0.98 \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{\Omega}{0.49}} \right) \quad (7.1)$$

при $\Omega > -0.49$. При $\Omega < -0.49$ будет $\sigma_{f_n}(\Omega) = 0$, а при $\Omega > -0.49$ спектральная плотность возмущения n -й формы колебаний вычисляется по формуле (5.10). Для $n = 1$, $\bar{L}_w = 80$ график функции $s_{f_n}(\Omega)$ представлен на рис. 5. На том же рисунке приведен график спектральной плотности $s_{T_1}(\Omega)$ случайной функции $T_1(t)$, построенный по формуле (5.11).

Интервалы Ω с близкими к нулю значениями спектральной плотности $s_{f_1}(\Omega)$ связаны с особенностями поведения функций $s_\xi(\omega)$ и $\Psi_1(\omega)$, входящих в функцию $\Phi_1(\omega)$.

График спектральной плотности $s_{f_1}(\Omega)$ имеет острый максимум в окрестности резонансной частоты $\Omega = \omega_1 = 1.02$. Это связано с тем, что силы сопротивления при $\nu_0 = 0.001325 \sqrt{2} \sigma_\xi \bar{\omega} = 0.00116$ относительно малы.

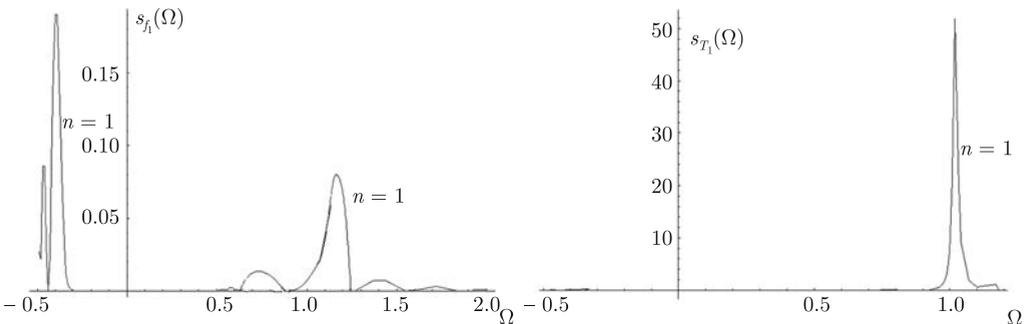


Рис. 5. Спектральные плотности возмущения $s_{f_1}(\Omega)$ и решения $s_{T_1}(\Omega)$ для формы $n = 1$.

Интегрирование в (5.12) дает дисперсию $\sigma_{T_n}^2$ случайных функций $T_n(t)$. На рис. 6 для $n = 1, 2, 3$ представлены графики среднеквадратичных отклонений $\sigma_{T_n}(\bar{L}_w)$ в зависимости от средней длины волны \bar{L}_w . Графики $\sigma_{T_n}(\bar{L}_w)$ на рис. 6 являются анало-

гом графиков $A_n(L_w)$ для гармонического волнения. Амплитуда случайных колебаний, мерой которой служит величина σ_{T_n} , существенно меньше, чем гармонических. У случайных колебаний также возможен резонанс, заключающийся в близости частоты свободных колебаний и частоты, при которой спектральная плотность волнения (5.13) максимальна. Однако в отличие от гармонических колебаний резонанс случайных колебаний выражен менее четко. Как и у гармонических колебаний, амплитуда при $n = 2$ больше, чем при $n = 1$. Для принятых данных амплитуды изгибных колебаний (при $n \geq 3$) на два и более порядка меньше, чем амплитуда колебаний по первой и второй формам.

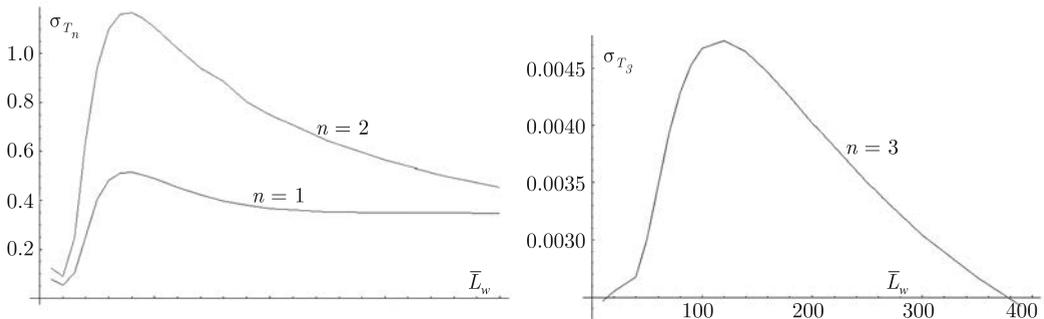


Рис. 6. Зависимость среднеквадратичных отклонений σ_{T_n} при $n = 1, 2, 3$ от средней длины волны \bar{L}_w .

8. Заключение. Представлен метод расчета малых изгибных колебаний плавающей в воде буксируемой балки под действием случайного стационарного волнения и проведено сравнение со случаем гармонического волнения. Установлено, что гармоническое волнение при резонансе приводит к существенно большим амплитудам колебаний, чем случайное. При проведении сравнения считаем, что амплитуда гармонического волнения a_0 и среднеквадратичное отклонение случайного волнения σ_ξ связаны соотношением $a_0 = \sigma_\xi \sqrt{2}$.

Литература

1. Алешков Ю. З. Теория взаимодействия волн с преградами. Изд-во Ленингр. ун-та. Л., 1990.
2. Шеховцов В. А. Случайные нелинейные колебания опор морских стационарных платформ. СПб., 2004. 246 с.
3. Tovstik P. E., Tovstik T. M., Shekhovtsov V. A. On the marine fixed offshore platform dynamics under random wave forces // Tagungsband. 7 Magdeburger Maschinenbau-Tage. 2005. 118–126.
4. Товстик П. Е., Товстик Т. М., Шеховцов В. А. Моделирование колебаний морских стационарных платформ под действием случайного волнения // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2005. № 4. С. 61–69.
5. Товстик П. Е., Товстик Т. М., Шеховцов В. А. О влиянии формы спектральной плотности случайного волнения на колебания опорного блока морской стационарной платформы // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 2.
6. Товстик П. Е., Товстик Т. М., Шеховцов А. С., Шеховцов В. А. Движение плавающего цилиндра на волнении // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2012. № 3. С. 137–143.
7. Sabaneev V. S., Tovstik P. E., Tovstik T. M., Shekhovtsov A. S. Vibrations of a floating beam on marine waves // Proc. ICNAAM 2014. Rodos. Greece. 2014.
8. Пугачев В. С. Теория случайных функций. М.: Физматгиз, 1960. 884 с.
9. Proc. 2nd Intern. Ship Structures Congress, Delft, Netherlands, 1964.

10. Глуховский Б. Х. Исследование ветровых морских волн. Л.: Гидрометеиздат, 1966.

11. Крылов Ю. М. Спектральные методы описания и расчета ветровых волн. Л.: Гидрометеиздат, 1966.

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2014 г.

Сведения об авторах

Товстик Петр Евгеньевич — доктор физико-математических наук, профессор; peter.tovstik@mail.ru

Товстик Татьяна Михайловна — кандидат физико-математических наук, доцент; peter.tovstik@mail.ru

VIBRATIONS OF A FLOATING BEAM ON MARINE WAVES

Petr M. Tovstik, Tatiana M. Tovstik

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; peter.tovstik@mail.ru

Small vertical vibrations of a horizontal floating towed beam under action of marine waves is studied. The beam bending stiffness, the attached mass of water and the restriction forces are taken in consideration. To describe the waves action the theory of small gravity waves is accepted and it is supposed that the water motion is plane harmonic or random stationary, and the directions of waves propagation and of the towing coincide.

To the motion description the one-dimensional Bernoulli—Euler beam model is used, and the problem is solved in the linear approximation. The solution is presented as a partial sum of series in system of orthogonal beam functions with unknown time-depending coefficients. In the case of harmonic waves the amplitude-frequency dependences for these coefficients are found in an explicit form. The dependence of resonance frequency on the towing velocity is established. For the random stationary waves the spectral densities and dispersions for the mentioned time-depending coefficients are found. Comparison of results for harmonic and random waves is performed. It is established that compared with the harmonic waves the random waves under identical conditions lead to the essential diminishing of amplitudes especially at resonance zones of the first two vibration modes describing the beam motion as a rigid body. Refs 11. Figs 6.

Keywords: floating beam, towing, waves excitation, harmonic and random vibrations.

References

1. Aleshkov Ju. Z., *Theory of Interaction of Waves and Obstacles* (Leningrad Univ. Press, 1990) [in Russian].
2. Shekhovtsov V. A., *Random Nonlinear Vibrations of Fixed Sea-based Offshore Platform Supports* (St. Petersburg, 2004) [in Russian].
3. Tovstik P. E., Tovstik T. M., Shekhovtsov V. A., “On the marine fixed offshore platform dynamics under random wave forces *Tagungsband. 7 Magdeburger Maschinenbau-Tage*, 118–126 (2005).
4. Tovstik P. E., Tovstik T. M., Shekhovtsov V. A., “Modeling of marine stationary platform vibrations under action of random waves”, *Vestnik St.Petersburg Univ. Serie 1. (4)*, 61–69 (2005) [in Russian].
5. Tovstik P. E., Tovstik T. M., Shekhovtsov V. A., “The Impact of the Shape of the Spectral Density of Random Wave Disturbance on the Vibrations of a Fixed Sea-Based Offshore Platform”, *Vestnik St.Petersburg Univ. Mathematics* **45(2)**, 98–105 (2012).
6. Tovstik P. E., Tovstik T. M., Shekhovtsov A. S., Shekhovtsov V. A., “Motion of a flowing cylinder under waves”, *Vestnik St.Petersburg Univ. Serie 1. (3)*, 137–143 (2012) [in Russian].
7. Sabaneev V. S., Tovstik P. E., Tovstik T. M., Shekhovtsov A. S., “Vibrations of a floating beam on marine waves”, *Proc. ICNAAM* (Rodoss, Greece, 2014).
8. Pugachev V. S., *Theory of random functions*, (Fizmatgiz, Moscow, 1960) [in Russian].
9. *Proc. 2nd Intern. Ship Structures Congress* (Delft, Netherlands, 1964).
10. Glukhovskii B. Kh., *Investigation of Wind-Driven Sea Waves* (Gidrometeoizdat, Leningrad, 1966) [in Russian].
11. Krylov Yu. M., *Spectral Methods for Study and Calculation of Wind-Driven Waves* (Gidrometeoizdat, Leningrad, 1966) [in Russian].