УДК 539.3, 519.6 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 2

НЕОСЕМИММЕТРИЧНАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН*

Е. Б. Воронкова, К. А. Минина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

В работе рассматривается устойчивость осесимметричных форм равновесия неоднородных круглых и кольцевых пластин, загруженных нормальным давлением. Внешний край пластины закреплен от поворотов, но точки края свободно смещаются в радиальном и окружном направлении, а внутренний — свободно смещается в направлении оси пластины, но не поворачивается. Полагается, что модуль упругости пластины меняется при движении от центра к краю. Наименьшее значение нагрузки найдено численным методом в предположении, что несимметричная составляющая решения системы носит периодический характер. Исследовано влияние отверстия в центре пластины и степени неоднородности материала на величину критической нагрузки и форму потери устойчивости. Библиогр. 5 назв. Ил. 1. Табл. 2.

Ключевые слова: кольцевая пластина, потеря устойчивости, неоднородность.

1. Введение. При больших прогибах пологие пластины и оболочки, нагруженные симметричной нагрузкой, могут потерять свою осесимметричную форму, при этом по краю пластины образуются складки [1, 2]. Существование несимметричного решения для симметрично нагруженной пластины было доказано Н. Ф. Морозовым в [3], а единственность такого решения доказана В. Пихоки в [4]. В работе [5] были найдены значения критической нагрузки, при которой для неоднородной круглой пластины возможен переход в неосесимметричное состояние.

В настоящей работе рассматривается задача о потере устойчивости осесимметричной формы равновесия неоднородной кольцевой пластины, модуль упругости которой изменяется при движении от центра пластины к ее краю. Исследуется влияние отверстия в центре пластины и неоднородности материала пластины на величину критической нагрузки.

2. Постановка задачи. Рассмотрим кольцевую пластину внешним радиусом R, внутренним радиусом R_{in} и толщиной h, лицевая поверхность которой загружена нормальным давлением. Материал пластины полагается изотропным и неоднородным в радиальном направлении.

Уравнения равновесия пластины в безразмерных переменных имеет вид [5]

$$\begin{aligned} &g_1(r)\Delta\Delta w + g_1'(r)L_1^+(w) + g_1''(r)L_2^+(w) = p + L(w,F),\\ &g_2(r)\Delta\Delta F + g_2'(r)L_1^-(F) + g_2''(r)L_2^-(F) = -L(w,w)/2,\\ &(\,)' = \partial(\,)/\partial r, \quad \dot{(\,)} = \partial(\,)/\partial\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $w(r,\theta)$, $F(r,\theta)$ — неизвестные безразмерные нормальный прогиб и функция усилий; r, θ — полярные координаты, введенные на срединной поверхности пластины; $g_1(r) = E(r)/E_{av}(r)$ — достаточно гладкая функция, определяющая закон изменения модуля упругости в плоскости пластины, где $E(r)$ — модуль упругости, $E_{av} = \iint\limits_S E(r) r\, dr d\theta / S$ — среднее значение модуля упругости, S — площадь пластины;

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 15-01-06311, № 13-01-00523.

$g_2(r) = 1/g_1(r)$; Δ — оператор Лапласа, L, $L_i^{\pm}$ $(i = 1, 2)$ — дифференциальные операторы

$$L(x,y) = x''\left(y'/r + \ddot{y}/r^2\right) + y''\left(x'/r + \ddot{x}/r^2\right) - 2(\dot{x}/r)'(\dot{y}/r)',$$
$$L_1^{\pm}(y) = 2y''' + (2 \pm \nu)y''/r + 2\left(\ddot{y}\right)'/r^2 - y'/r^2 - 3\ddot{y}/r^3,$$
$$L_2^{\pm}(y) = y'' \pm \nu\left(y'/r + \ddot{y}/r^2\right).$$

Безразмерные величины связаны с размерными соотношениями

$$r = \frac{r^*}{R}, \ \ \delta = \frac{R_{in}}{R}, \ \ w = \beta\frac{w^*}{h}, \ \ p = \beta^3\frac{p^* R^4}{E_{av}h^4}, \ \ F = \beta^2\frac{F^*}{E_{av}h^3}, \ \ \beta^2 = 12(1-\nu^2),$$

где ν — коэффициент Пуассона пластины.

Положим, что внешний край пластины закреплен от поворотов, но точки края свободно перемещаются в радиальном и окружном направлении, а внутренний — свободно смещается в направлении оси симметрии пластины, но не поворачивается. Тогда на внешнем крае пластины ($r = 1$) предполагается равенство нулю растягивающих и сдвигающих усилий, на внутреннем ($r = \delta$) обращается в нуль поперечное реактивное усилие, складывающееся из поперечной силы и производной от крутящего момента.

В терминах нормального перемещения w и функции усилий F граничные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned}
r = 1: \quad & w = w' = F'/r + \ddot{F}/r^2 = -\left(\dot{F}/r\right)' = 0;\\
r = \delta: \quad & w' = -\left(\dot{F}/r\right)' = 0,\\
& w''' + w''/r - w'/r^2 + (2-\nu)\left(\ddot{w}\right)'/r^2 - (3-\nu)\ddot{w}/r^3 = 0,\\
& \Delta F' + \Delta F - \frac{1-\nu}{r}\left(F + \ddot{F}\right)' + g_2'\left(w'' + \nu\left(\frac{w'}{r} + \frac{\ddot{w}}{r^2}\right)\right) = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Для сплошной пластины, учитывая ограниченность искомых решений, в центре пластины при $r = 0$ полагаем $w' = F' = 0$.

Схема решения задачи подробно описана в [2, 5]. Полагая, что для малых значений нагрузки p система (1)–(2) имеет только симметричное решение, а несимметричное решение этой системы появляется при возрастании нагрузки, представим решение в виде

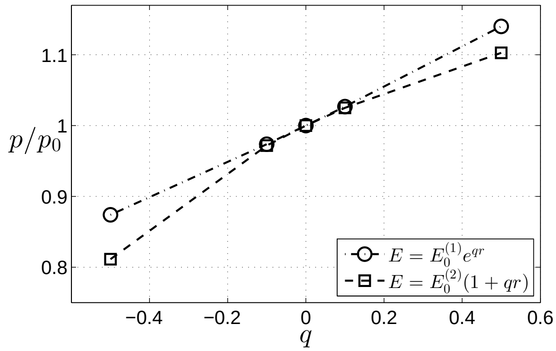
$$w(r,\theta) = w_s(r) + w_n(r)\cos n\theta, \qquad F(r,\theta) = F_s(r) + F_n(r)\cos n\theta, \tag{3}$$

где функции w_s, F_s описывают докритическое симметричное решение, а $w_{ns}(r,\theta) = w_n(r)\cos n\theta$, $F_{ns}(r,\theta) = F_n(r)\cos n\theta$ — закритическое состояние пластины (n — в окружном направлении число волн, образовавшихся после потери устойчивости).

После разделения переменных (3) исходная система (1)–(2) распадается на две: нелинейную, для нахождения симметричного решения $w_s(r)$, $F_s(r)$, и линейную систему уравнений относительно $w_n(r)$, $F_n(r)$, так как функции w_{ns}, F_{ns} являются малыми сразу после перехода пластины в неосесимметричное состояние. Для каждого числа волн в окружном направлении n будем искать такие значения нагрузки p_n, при которых существуют отличные от нуля функции $w_n(r)$, $F_n(r)$. Критической нагрузке соответствует $p_{cr} = \min\limits_n p_n$.

3. Результаты. Проведены серии расчетов для неоднородных сплошной и кольцевой пластин при изменении модуля упругости пластины по линейному, $E = E_0^{(1)}(1+$

$q_1 r$), и экспоненциальному, $E = E_0^{(2)} e^{q_2 r}$, законам. Параметры $E_0^{(i)}$ и q_i $(i = 1, 2)$ выбирались так, чтобы среднее значение модуля упругости пластины E_{av} оставалось постоянным. Полученное в [5] критическое значение нагрузки для однородной пластины равно $p_{cr}^0 = 62598$, а соответствующее этой нагрузке волновое число $n = 14$. Для неоднородных сплошных пластин результаты расчетов приведены на рисунке. Значение 0 параметра q соответствует пластине с постоянным модулем упругости.



Изменение критической нагрузки в зависимости от неоднородности пластины q, p_0 — критическая нагрузка для однородной пластины.

Расчеты показывают, что если модуль упругости пластины уменьшается к ее краю, то потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия происходит при более низкой нагрузке и с образованием большего числа складок в окружном направлении, чем для однородной пластины. Чем быстрее убывает модуль упругости, тем ниже становится величина критической нагрузки. При увеличении модуля упругости к центру пластины критическая нагрузка возрастала.

Безразмерные значения критической нагрузки p и число волн n, образующихся по краю пластины при переходе в неосесимметричное состояние, для однородной кольцевой пластины при различных радиусах центрального отверстия приведены в табл. 1, для неоднородной кольцевой пластины при изменении модуля упругости по закону $E = E_0 e^{qr}$ — в табл. 2. В обоих случаях p_{cr}^0 соответствует критической нагрузке для сплошной пластины $(\delta = 0)$

Таблица 1. **Критическая нагрузка для однородной кольцевой пластины**

	$\delta = 0$	$\delta = 0.05$	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.15$
p_{cr}/p_{cr}^0	1	1.03	1.08	1.15
n	14	13	12	12

Видно, что потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия при увеличении радиуса центрального отверстия происходит с образованием меньшего числа складок в окружном направлении.

Как и для сплошной пластины, при убывания модуля упругости от центра пластины к ее краю переход $(q < 0)$ в неосеммитричное состояние происходит при более низкой нагрузке, чем для однородной пластины, а при увеличении $(q > 0)$ — при существенно более высокой.

Таблица 2. **Критическая нагрузка для неоднородной кольцевой пластины при** $\delta = 0.05$, $E = E_0 e^{qr}$)

	$q = -0.5$	$q = -0.1$	$q = 0$	$q = 0.1$	$q = 0.5$	$q = 1$
p_{cr}/p^0_{cr}	0.75	1.002	1.03	1.06	1.17	1.34
n	13	13	13	13	13	13

Потеря устойчивости осемимметричных форм равновесия локализована вблизи внешнего края пластины и связана с появлением в окрестности внешнего края сжимающих окружных усилий [2, 5]. Этим объясняется влияние на критическую нагрузку свойств пластины в окрестности внешнего края.

5. Заключение. В работе численным методом исследована потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия неоднородных кольцевых пластин. Найдено критическое давление, при котором возможна бифуркация пластины в неосесимметричное состояние. Показано влияние степени неоднородности и размера центрального отверстия пластины на изменение критической нагрузки. Произведен численный анализ критической нагрузки для различных законов изменения модуля упругости пластины, размеров внутреннего края в случае кольцевой пластины.

Литература

1. *Панов Д. Ю., Феодосьев В. И.* О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах // ПММ. Т. XII. 1948. С. 389–406.

2. *Cheo L. S., Reiss E. L.* Unsymmetric wrinkling of circular plates // Quart. Appl. Math. N 31. 1971. P. 75–91.

3. *Морозов Н. Ф.* К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластины, загруженной симметричной нагрузкой // Изв. Высш. Уч. Заведений, Математика, 1961, № 2. С. 126–129.

4. *Piechocki W.* On the non-linear theory of thin elastic spherical shells // Arch. Mech. Stos. № 21, 1969. P. 81–101.

5. *Бауэр С. М., Воронкова Е. Б., Романова А. А.* О потере устойчивости симметричных форм равновесия круглых пластин под действием нормального давления // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. Астрономия. 2012. Вып. 1. С. 80–85.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

Сведения об авторах

Воронкова Ева Боруховна — кандидат физико-математических наук, доцент; e.voronkova@spbu.ru

Минина Ксения Андреевна — аспирант, ksushik@mail.ru

BUCKLING OF AXISYMMETRIC EQUILIBRIUM STATES OF ANNULAR PLATES

Eva B. Voronkova, Kseniya A. Minina

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; e.voronkova@spbu.ru

The stability of axisymmetric equilibrium states of an isotropic non-homogeneous plate under uniform pressure is considered. The unsymmetric part of the solution is sought in terms of multiples of the harmonics of the angular coordinates. A numerical method is employed to obtain the lowest load value, which leads to the appearance of waves in the circumferential direction. It is shown that if the elasticity modulus decreases away from the center of a plate, the critical pressure for unsymmetric buckling is sufficiently lower than for a plate with constant mechanical properties. Refs 5. Figs 1. Tables 2.

Keywords: circular plate, buckling, non-homogeneity.

References

1. Panov D. U., Feodos'ev V. I., "Equilibrum and loss of stability of shallow shells with large deflections", *PMM* **12**, 389–406 (1948) [in Russian].

2. Cheo L. S., Reiss E. L., "Unsymmetric wrinkling of circular plates", *Quart. Appl. Math.* N 31, 75–91 (1971).

3. Morozov N. F., "On the existence of a non-symmetric solution in the problem of large deflections of a circular plate with a symmetric load", *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* N 2, 126–129 (1961) [in Russian].

4. Piechocki W., "On the non-linear theory of thin elastic spherical shells", *Arch. Mech. Stos.* N 21, 81–101 (1969).

5. Bauer S. M., Voronkova E. B., Romanova A. A., "On the unsymmetric buckling of circular plates under normal pressure", *Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1* Issue 1, 80–85 (2012).