МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

МНОГОЛИСТНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

С. С. Валландер

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Мы даем абстрактную версию некоторых систем множеств, сходных с λ-системами, обсуждавшимися Дынкиным и другими в качестве полезного вспомогательного средства. Наша абстрактная версия имеет «булеву» природу. Это означает, в частности, что элементы соответствующей абстрактной алгебры не имеют внутренней теоретико-множественной природы. Формулируется естественная система аксиом. Эта система описывает свойства двух бинарных отношений (включение и дизъюнктность) и свойства двух частичных бинарных операций (сложение и вычитание), тесно связанных с этими бинарными отношениями. В частности, сложение и вычитание являются в некотором точно формулируемом смысле взаимно обратными.

Мы устанавливаем простые свойства этих абстрактных алгебр Дынкина и изучаем расширения таких алгебр посредством некоторых предельных переходов (мы называем эти расширения свободными). Свободное расширение абстрактной алгебры Дынкина замкнуто относительно пределов монотонных последовательностей её элементов.

Мы доказываем, что каждая (аддитивная) вероятность на абстрактной алгебре Дынкина имеет единственное непрерывное (= счетно-аддитивное) продолжение на соответствующее свободное расширение. Этот результат, не согласующийся с обычным различием между аддитивностью и счетной аддитивностью, может быть объяснен свойством свободности рассматриваемого расширения. Библиогр. 7 назв.

Ключевые слова: алгебра Дынкина, свободное расширение, непрерывное продолжение вероятности.

1. Введение. Излагаемые ниже идеи и результаты возникли из размышлений автора над задачей продолжения вероятности. Первым поводом к ним явилось то обстоятельство, что вероятности естественно рассматривать на системах множеств, имеющих более бедную структуру, чем структура алгебры множеств. Подобные мысли в теории меры появлялись ещё на заре её становления, например у А. Н. Колмогорова [1]. Более подробно об истории этого вопроса можно прочитать в обзорной статье [2]. Вероятностная интуиция позволяет более естественным образом, опираясь на частотную эвристику, выделить те свойства системы событий, без которых вряд ли можно обойтись (см. [3]).

Будем называть алгеброй Дынкина систему $\mathcal{A}$ подмножеств непустого множества Ω, содержащую само Ω и удовлетворяющую следующим двум свойствам:

(DA) (disjoint addition): если $A, B \in \mathcal{A}$ и $A \cap B = \varnothing$, то $A \cup B \in \mathcal{A}$;

(MS) (monotonic subtraction): если $A, B \in \mathcal{A}$ и $A \subseteq B$, то $B - A \in \mathcal{A}$.

Дынкин [4] на самом деле рассматривал системы множеств (он называл их λ-системами, а последующие авторы также и системами Дынкина), дополнительно удовлетворяющие свойству

(L) если $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность элементов $\mathcal{A}$, то $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Для него λ-системы играли чисто техническую роль. В неявном виде λ-системы появлялись и много раньше, например у Серпинского [5].

Вторым поводом явилось обдумывание стандартного примера аддитивной, но не счётно-аддитивной, функции множеств (см., например, [6], с. 269). В этом примере $\Omega = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ (как обычно, $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел) и множествам вида $\mathbb{Q} \cap \langle a.b \rangle$ приписывается мера $b - a$. Треугольные скобки мы используем здесь для обозначения промежутка любого типа — открытого, замкнутого или полуоткрытого. Естественно предположить, что одной из причин, препятствующих счётной аддитивности в этом примере, является вычурный выбор пространства Ω, в котором мера «живет», и что можно избежать этого препятствия, «продолжая» меру за пределы Ω. Имеющиеся слабые ассоциации с идеей продолжения аналитической функции породили прилагательное «многолистные» в названии статьи. Разумеется, никакого формального отношения к теории аналитических функций наша многолистность не имеет. На самом деле, как будет видно из дальнейшего, многолистность, благодаря переходу на абстрактный «булев» язык, явным образом не появляется. С другой стороны, и это оказывается очень существенным, абстрактный язык позволяет несколько иначе взглянуть на счётные операции.

Основным результатом нашей работы является формулируемая в последнем параграфе теорема, утверждающая, что в обсуждаемой абстрактной ситуации (для свободного расширения абстрактной алгебры Дынкина соответствующие определения приводятся в нижеследующем тексте) продолжение аддитивной вероятности автоматически оказывается счетно-аддитивным. Она может оказаться полезной при изучении вероятностных моделей, для которых представление о событиях как о множествах элементарных исходов является неестественным.

2. Абстрактные алгебры Дынкина. Пусть $\mathcal{A}$ — частично упорядоченное множество (поскольку в литературе имеются неравносильные определения частичной упорядоченности, уточним, что мы включаем в определение требование, чтобы одновременное выполнение соотношений $A \leq B$ и $B \leq A$ влекло за собой равенство $A = B$), имеющее наибольший элемент 1 и наименьший элемент 0. Соответствующее бинарное отношение мы обозначим $\leq$ и назовем включением. Таким образом, для любого $A \in A$ имеем $0 \leq A \leq 1$.

Предположим, что на $\mathcal{A}$ имеется также симметричное бинарное отношение $\perp$ (дизъюнктность), такое, что

(D1) для любого $A \in \mathcal{A}$ выполняется $0 \perp A$;

(D2) если $A \perp 1$, то $A = 0$;

(DI) если $A_1 \leq A_2$ и $A_2 \perp B$, то $A_1 \perp B$ (монотонность дизъюнктности).

Определим теперь на $\mathcal{A}$ две частичные бинарные операции: $A + B$ для $A \perp B$ (сложение) и $B - A$ для $A \leq B$ (вычитание). Потребуем выполнения следующих свойств этих операций:

(A1) коммутативность сложения — $A + B = B + A$;

(A2) ассоциативность сложения — если A_1, A_2, A_3 попарно дизъюнктны, то $A_1 + A_2 \perp A_3$ и $(A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3)$;

(A3) для любого $A \in \mathcal{A}$ выполняется $0 + A = A$;

(A4) ограниченность сложения — если $A_1 \leq B$, $A_2 \leq B$ и $A_1 \perp A_2$, то $A_1 + A_2 \leq B$;

(A5) монотонность сложения — если $A_1 \leq A_2$ и $A_2 \perp B$, то $A_1 + B \leq A_2 + B$;

(A6) сократимость по сложению — если $A_1 + B \leq A_2 + B$, то $A_1 \leq A_2$;

(AS) взаимная обратность вычитания и сложения — если $A \leq B$, то $B - A \leq B$, $B - A \perp A$ и $A + (B - A) = B$.

Множество $\mathcal{A}$, удовлетворяющее всем перечисленным свойствам, назовем абстрактной алгеброй Дынкина. Очевидно, что ранее определенные алгебры Дынкина удовлетворяют приведенным аксиомам. В отличие от абстрактных, мы будем называть их классическими алгебрами Дынкина.

Отметим несколько полезных свойств абстрактных алгебр Дынкина.

1. Элементы 0 и 1 единственны.

2. Сократимость по сложению в равенствах — если $A_1 + B = A_2 + B$, то $A_1 = A_2$.

3. Для любого $A \in \mathcal{A}$ выполняется $A - 0 = A$.

4. Если $A \perp B$, то $A \leq A + B$.

5. Монотонность вычитания (I) — если $A \leq B_1 \leq B_2$, то $B_1 - A \leq B_2 - A$.

6. Монотонность вычитания (II) — если $A_1 \leq A_2 \leq B$, то $B - A_2 \leq B - A_1$. В частности, если $A \leq B$, то $1 - B \leq 1 - A$.

7. Ассоциативность (I) — если $A \leq B \leq C$, то $C - (B - A) = (C - B) + A$,

8. Ассоциативность (II) — если $A \leq B$ и $B \perp C$, то $(B + C) - A = (B - A) + C$.

Свойства 1 и 2 непосредственно следуют из определения. Свойство 3 вытекает из (AS) при $A = 0$ и из (A3). Свойство 4 — частный случай монотонности сложения (A5) при $A_1 = 0$. Свойство 5 вытекает из (AS) и сократимости по сложению (A6).

Докажем свойство 6. Имеем

$$A_2 = (A_2 - A_1) + A_1$$

и

$$B = (B - A_2) + A_2 = (B - A_2) + (A_2 - A_1) + A_1.$$

По монотонности сложения (A5) получаем

$$(B - A_2) + A_1 \leq (B - A_2) + (A_2 - A_1) + A_1 = B = (B - A_1) + A_1.$$

Сокращая на A_1, получаем требуемое неравенство.

Для доказательства свойства 7 достаточно вычесть $B - A$ из обеих частей равенства

$$C = A + (B - A) + (C - B).$$

Аналогично, свойство 8 получается вычитанием A из обеих частей равенства

$$B + C = (B - A) + A + C.$$

3. Свободные расширения абстрактных алгебр Дынкина. Мы будем рассматривать бесконечные монотонные последовательности (A_n) элементов абстрактной алгебры Дынкина $\mathcal{A}$. Для последующих конструкций удобно считать, что нумерация элементов каждой такой последовательности начинается со своего n_0 (зависящего от последовательности).

Пусть (A_n) и (B_n) — две монотонно возрастающие последовательности. Определим отношение $\leq$ правилом $(A_n) \leq (B_n)$ в том и только в том случае, когда для любого m найдется такое n, что $A_m \leq B_n$. Будем писать $(A_n) \sim (B_n)$, если одновременно $(A_n) \leq (B_n)$ и $(B_n) \leq (A_n)$. Очевидно, что $\sim$ есть отношение эквивалентности и что на множестве соответствующих классов эквивалентности $\leq$ является частичным упорядочением, продолжающим отношение $\leq$ на $\mathcal{A}$. Отметим, что класс эквивалентности постоянной последовательности состоит только из неё самой и возрастающих последовательностей, совпадающих с ней с некоторого места.

Аналогично определяется отношение $\leq$ на классах эквивалентности монотонно убывающих последовательностей. Более того, если (A_n) — возрастающая, а (B_n) — убывающая последовательности, включения $(A_n) \leq (B_n)$ и $(B_n) \leq (A_n)$ также определяются (и переносятся на соответствующие классы эквивалентности) очевидным образом.

Обозначим через $\mathcal{A}_1$ множество классов эквивалентности монотонных последовательностей элементов $\mathcal{A}$. Для этих классов эквивалентности будем писать $A = \lim A_n$ и называть (A_n) представляющей последовательностью.

Заметим, что пределы монотонных последовательностей элементов $\mathcal{A}_1$ уже нельзя, вообще говоря, отождествить с элементами $\mathcal{A}_1$. Это обстоятельство аналогично хорошо известному факту из теории борелевских множеств в евклидовых пространствах — совокупности множеств типа F_σ, $F_{\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma}$, ... (и, аналогично, G_δ, $G_{\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta}$, ...) образуют строго возрастающую последовательность (см. [7], §30). Однако такое отождествление возможно, если направление монотонности сохраняется. Скажем, если $(A^{(n)})$ — возрастающая последовательность элементов $\mathcal{A}_1$, а каждый $A^{(n)}$, в свою очередь — предел возрастающей последовательности $(A^{(n)}_m)_m$ элементов $\mathcal{A}$, то найдется возрастающая последовательность вида $(A^{(n)}_{m_n})_n$. Предел этой последовательности, лежащий в $\mathcal{A}_1$, не зависит ни от выбора её, ни от выбора представляющих последовательностей $(A^{(n)}_m)_m$. Тем самым можно по определению положить $\lim A^{(n)} = \lim A^{(n)}_{m_n}$.

Распространим теперь на $\mathcal{A}_1$ отношение дизъюнктности $\perp$. Пусть $A = \lim A_n$ и $B = \lim B_n$ — классы эквивалентности возрастающих последовательностей. Будем считать $A \perp B$, если для любых m, n выполняется $A_m \perp B_n$.

Пусть теперь A и B — классы эквивалентности убывающих последовательностей. Будем считать $A \perp B$, если существуют m, n, такие, что $A_m \perp B_n$.

Наконец, если A — класс эквивалентности возрастающих последовательностей, а B — класс эквивалентности убывающих последовательностей, будем считать, что $A \perp B$, если для любого m существует такое n, что $A_m \perp B_n$.

Из монотонности дизъюнктности (DI) следует, что это определение корректно (не зависит от выбора представляющих последовательностей). Очевидно, что для продолженных отношений $\leq$ и $\perp$ справедливы аксиомы (D1), (D2) и (DI).

Перейдем теперь к бинарным операциям. Для возрастающих последовательностей можно просто положить по определению

$$\lim A_n + \lim B_n = \lim(A_n + B_n).$$

Аналогично можно поступить с убывающими последовательностями, с той оговоркой, что $A_n + B_n$ будет определено только для достаточно больших n.

И здесь легко проверяется, что значение суммы не зависит от выбора представляющих последовательностей.

Пусть, наконец, A — предел возрастающей последовательности элементов $\mathcal{A}$, а B — предел убывающей последовательности. Тогда при фиксированном m и достаточно больших n определены $A_m + B_n$, и эта последовательность убывает по n. Тем самым определено $A_m + B \in \mathcal{A}_1$. Однако предел этой возрастающей последовательности определить в $\mathcal{A}_1$ уже, вообще говоря, нельзя.

Аналогично, определить разность элементов $A, B \in \mathcal{A}_1$ можно только в том случае, когда направления монотонности представляющих последовательностей для A и B противоположны.

Легко проверяется, что все свойства продолженных операций сложения и вычитания сохраняются (в тех случаях, когда соответствующие результаты определены).

Теперь можно определить отношение $\leq$ для монотонных последовательностей элементов $\mathcal{A}_1$ и образовать множество $\mathcal{A}_2$ соответствующих классов эквивалентности. По той же схеме, что и раньше, определяются отношение дизъюнктности $\perp$ и бинарные операции сложения и вычитания, продолжающие соответствующие операции на $\mathcal{A}_1$. Заметим, что сумма и разность элементов $\mathcal{A}_1$ оказываются теперь корректно определенными во всех необходимых случаях ($A + B$ для $A \perp B$ и $B - A$ для $A \leq B$), однако лежат, вообще говоря, в $\mathcal{A}_2$.

Далее, трансфинитной рекурсией по той же схеме определяются множества $\mathcal{A}_\alpha$ для любого счётного ординала α (если α непредельный ординал, конструкция вполне аналогична построению $\mathcal{A}_1$ из $\mathcal{A}$ или $\mathcal{A}_2$ из $\mathcal{A}_1$; если же α — предельный ординал, полагаем $\mathcal{A}_\alpha = \cup_{\beta<\alpha}\mathcal{A}_\beta$).

Пусть $\bar{\mathcal{A}}$ — объединение возрастающего семейства множеств $\mathcal{A}_\alpha$ по всем счётным ординалам α. Из нашего построения следует, что $\bar{\mathcal{A}}$ — абстрактная алгебра Дынкина (результаты сложения и вычитания элементов $\mathcal{A}_\alpha$ лежат в $\mathcal{A}_{\alpha+1}$). Более того, $\bar{\mathcal{A}}$ содержит пределы монотонных последовательностей своих элементов, т. е. удовлетворяет аксиоме (L). Действительно, предположим, что (A_n) возрастающая последовательность, $A_n \in \mathcal{A}_{\alpha_n}$. Тогда $\alpha = \sup \alpha_n$ — снова счетный ординал и $\lim A_n \in \mathcal{A}_{\alpha+1}$.

Будем называть λ-систему $\bar{\mathcal{A}}$ свободным расширением абстрактной алгебры Дынкина $\mathcal{A}$. Отметим, что понятие свободного расширения в некотором смысле сходно с понятием универсального накрывающего пространства в топологии.

4. Продолжение вероятности на свободные расширения. Вероятностью на абстрактной алгебре Дынкина $\mathcal{A}$ мы называем неотрицательную функцию $\mathbb{P}$, определенную на $\mathcal{A}$ и удовлетворяющую свойствам

$$\mathbb{P}(1) = 1,$$

$$\mathbb{P}(A + B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \quad (A \perp B),$$
$$\mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \quad (A \leq B).$$

Теорема. *Любая вероятность $\mathbb{P}$ на абстрактной алгебре Дынкина $\mathcal{A}$ имеет единственное счетно-аддитивное продолжение $\bar{\mathbb{P}}$ на её свободное расширение $\bar{\mathcal{A}}$.*

Сформулированный результат контрастирует с обычным положением дел (обычно счетная аддитивность не вытекает из аддитивности, см. классический пример в § 1). Дело, однако, в том, что для каждого элемента свободного расширения $\bar{\mathcal{A}}$ имеется, по существу, единственный способ получения из элементов исходной алгебры Дынкина $\mathcal{A}$. Именно поэтому мы называем расширение $\bar{\mathcal{A}}$ свободным.

Доказательство теоремы. Функция $\bar{\mathbb{P}}$ строится рекурсивным образом по схеме предыдущего параграфа. Пусть $A = \lim A_n$ и значения $\bar{\mathbb{P}}(A_n)$ уже определены. Ясно, что числовая последовательность $(\bar{\mathbb{P}}(A_n))$ монотонна. Поэтому можно положить

$$\bar{\mathbb{P}}(A) = \lim \bar{\mathbb{P}}(A_n).$$

Из конструкции классов эквивалентности монотонных последовательностей с очевидностью вытекает, что значение $\bar{\mathbb{P}}(A)$ не зависит от выбора представляющей последовательности. Как было выше отмечено, произвол в конструировании элементов свободного расширения фактически отсутствует — он состоит только в выборе представляющих последовательностей в соответствующих классах эквивалентности, что не сказывается на значениях $\bar{\mathbb{P}}$. Тем самым, функция $\bar{\mathbb{P}}$ однозначна на $\bar{\mathcal{A}}$. Определения бинарных операций в $\bar{\mathcal{A}}$ таковы, что продолженная вероятность автоматически оказывается аддитивной на $\bar{\mathcal{A}}$. Её непрерывность очевидна по построению. Равносильность непрерывности и счётной аддитивности, как обычно, вытекает из формулы

$$\lim A_n = A_1 + (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \ldots,$$

справедливой для любой монотонно возрастающей последовательности.

Замечание. Для любой классической алгебры Дынкина определено её свободное расширение, являющееся абстрактной алгеброй Дынкина, т. е. элементы свободного расширения, вообще говоря, нельзя рассматривать как подмножества соответствующего пространства Ω. Точнее говоря, разным элементам свободного расширения может соответствовать одно и то же множество. Это множество получается, если в конструкции элемента свободного расширения пределы трактовать как пределы монотонных последовательностей подмножеств Ω. Таким образом, свободное расширение можно интерпретировать как «многолистное продолжение» классической алгебры Дынкина.

Литература

1. *Колмогоров А. Н.* Общая теория меры и исчисление вероятностей // Тр. Коммунистической академии. Разд. мат., 1929. Т. 1. С. 8–21. [Перепечатано в: Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986. С. 48–58]

2. *Shafer G., Vovk V.* The Sources of Kolmogorov's Grundbegriffe // Statistical Science, 2006. Vol. 21, N 1. P. 70–98.

3. *Валландер С. С.* Несколько замечаний об аксиоматике теории вероятностей // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2013. Вып. 3. С. 21–23.

4. *Дынкин Е. Б.* Основания теории марковских процессов. М.: Физматгиз, 1959. 228 с.

5. *Sierpiński W.* Sur une définition axiomatique des ensembles measurable (L) // Bull. Internat. Akad. Sci. Cracovie A (1918). P. 173–178. [Reprinted in: Sierpiński W. Oeuvres choisies. Vol. 2, 1975, PWN, Warsaw, 256–260]

6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 5. М.: Физматлит, 1981. 544 с.

7. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966. 594 с.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

С в е д е н и я   о б   а в т о р е

Валландер Сергей Сергеевич — кандидат физико-математических наук, доцент; crazymath@yandex.ru

MULTIVALENT PROBABILITY SPACES

Sergei S. Vallander

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; crazymath@yandex.ru

We give an abstract version of some systems of sets similar to λ-systems discussed by Dynkin and others as a useful auxiliary tool. Our abstract version has a "Boolean" nature. This means that its elements have no internal set-theoretic structure. A natural system of axioms is formulated. This system describes properties of two binary relations (inclusion and disjointness) and properties of two partial binary operations (addition and subtraction) closely connected with these binary relations. Particularly addition and subtraction are in some exactly formulated sense mutually inverse.

We state some properties of these abstract Dynkin algebras and investigate enlargements of such algebras via some limit transitions (we referred to them as to free enlargements). The free enlargement of an abstract Dynkin algebra is closed under limits of monotonic sequences of its elements.

We prove that every (additive) probability on an abstract Dynkin algebra has a unique continuous (= contably additive) extension to the corresponding free enlargement. This result contradicting to the usual difference between additivity and countable additivity can be explained by freeness of the enlargement under review. Refs 7.

Keywords: Dynkin algebra, free enlargement, continuous extension of probability.

References

1. Kolmogorov A. N., “General Measure Theory and calculus of probabilities”, *Proceedings of Kommunist Academy. Section Math.*, **1**, 8–21 (1929) [Reprinted in: Kolmogorov A. N. Probability Theory and Mathematical Statistics (Nauka, Moscow, 48–58 (1986))]

2. Shafer G., Vovk V., “The Sources of Kolmogorov’s Grundbegriffe”, *Statistical Science*, **21**(1), 70–98 (2006).

3. Vallander S. S., “Some Remarks Concerning Axiomatics of Probability Theory”, *Vestnik SPbGU*, N 3, 21–23 (2013).

4. Dynkin E. B., “Foundations of Markov Processes Theory” (Fizmatgiz, Moscow, 1959).

5. Sierpiński W., “Sur une définition axiomatique des ensembles measurable (L)” *Bull. Internat. Akad. Sci. Cracovie A*, 173–178 (1918). [Reprinted in: Sierpiński W. Oeuvres choisies, **2**, PWN, Warsaw, 256–260 (1975)]

6. Kolmogorov A. N., Fomin S. V., “Elements of Function Theory and Functional Analysis” (Ed.5, Fizmatlit, Moscow, 1981).

7. Kuratowski K. *Topology*, **1**. M., Mir, 1966.