УДК 517.938 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 3

МОДАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ*

И. Е. Зубер, А. Х. Гелиг

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = A(t,x)x + b(t,x)u, \tag{1}$$

где $A(t,x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b(t,x) = \beta(t,x)e_1$, $\beta(t,x) \in \mathbb{R}^1$, $e_1^* = (1,0,\dots,0)$. Коэффициенты $a_{ij}(t,x)$ матрицы $A(t,x)$ и $\beta(t,x)$ являются ограниченными вещественными непрерывными функциями. Предполагается, что система равномерно управляема:

$$\inf_{t\geq t_0,\, x\in\mathbb{R}^n} |\det(A^{n-1}(t,x)b(t,x),\dots,A(t,x)b(t,x),b(t,x)| > 0.$$

Стабилизирующее управление определяется формулами

$$u(t,x) = s^*(t,x)x, \tag{2}$$

$$s^*(t,x)(A(t,x)-\lambda_j(t,x)I)^{-1}b(t,x) = -1,$$

где $\lambda_j(t,x)$ — специально выбранный в левой полуплоскости спектр замкнутой системы. Найдены условия, налагаемые на $A(t,x)$ и $\beta(t,x)$, при выполнении которых система (1), (2) глобально экспоненциально устойчива.

В случае, когда $a_{ij}(t,x)$ и $\beta(t,x)$ ограничены лишь при $|x| < R$, построенное управление стабилизирует систему в большом, то есть при $|x(t_0)| < R$.

Построено модальное стабилизирующее управление для систем с переменной структурой, у которых

$$A(t,x) = A_k(t,x), \quad \beta(t,x) = \beta_k(t,x) \quad \text{при } t \in (t_k, t_{k+1}),$$

где $t_{k+1} > t_k$, $t_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Библиогр. 7 назв.

Ключевые слова: нелинейные системы, нестационарные системы, модальная стабилизация, глобальная экспоненциальная устойчивость.

1. Введение. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, \tag{1}$$

$$u = s^*x, \tag{2}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $s \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $*$ — знак транспонирования (все величины вещественные). Если A и b являются достаточно гладкими функциями от x, то для определения $s(x)$, при котором система (1), (2) глобально устойчива, можно использовать метод «feedback-linearization» [1]. Однако этот метод применим лишь при условии, что последняя строка матрицы, обратной к матрице управляемости (составленной с помощью скобок Ли), образует потенциальное поле [2]. Относительная степень таких систем $n-1$. Стабилизация достаточно гладких нелинейных стационарных систем с относительной степенью, меньшей $n-1$, рассматривалась в [3]. В [4] эти результаты были перенесены на достаточно гладкие нестационарные нелинейные системы.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00107) и СПбГУ (тема № 6.38.230.2015).

Если в системе (1), (2) A и b постоянные и выполнено условие управляемости

$$\det(A^{n-1}b, \ldots, Ab, b) \neq 0, \tag{3}$$

то известен метод модальной стабилизации [5], который заключается в определении s из системы алгебраических уравнений

$$s^* d_i = -1, \quad i \in \overline{1, n},$$

где $d_i = (A - \lambda_i I)^{-1} b$, I — единичная $n \times n$-матрица, λ_i — числа, расположенные в левой полуплоскости и не принадлежащие спектру матрицы A. При этом числа λ_i оказываются спектром матрицы $A + bs^*$.

В данной статье метод модальной стабилизации распространен на некоторый класс негладких нестационарных нелинейных систем при условии, что система является равномерно управляемой [6], то есть условие (3) выполнено при всех $t \geq t_0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Модальная стабилизация. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t,x)x + b(t,x)u, \tag{4}$$

$$u = s^*(t,x)x, \tag{5}$$

где $t \geq t_0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b(t,x) = \beta(t,x)e_1$, $e_1^* = (1, 0, \ldots, 0)$. Предполагается, что элементы $a_{ij}(t,x)$ матрицы $A(t,x)$ и скалярная функция $\beta(t,x)$ непрерывны и удовлетворяют следующим условиям:

$$0 < \beta_1 \leq \beta(t,x) \leq \beta_2 < \infty \quad \text{при } t \geq t_0,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

$$\sup_{t \geq t_0,\, x \in \mathbb{R}^n} |a_{1i}(t,x)| = \varkappa_1 < \infty \quad \text{при } i \in \overline{1, n}, \tag{7}$$

$$a_{ij}(t,x) = \begin{cases} \varepsilon \alpha_{ij}(t,x) & \text{при} \quad i \in \overline{2, n},\ j \in \overline{1, n},\ j \neq i, \\ -\alpha(t,x) + \varepsilon \alpha_{ii}(t,x) & \text{при} \quad j = i \in \overline{2, n}, \end{cases} \tag{8}$$

где $\varepsilon > 0$,

$$\inf_{t \geq t_0,\, x \in \mathbb{R}^n} \alpha(t,x) = \alpha_0 > n\varkappa_1, \tag{9}$$

$$\sup_{t \geq t_0,\, x \in \mathbb{R}^n} |\alpha_{ij}(t,x)| \leq \varkappa_2 \quad \text{при } i \in \overline{2, n},\ j \in \overline{1, n}. \tag{10}$$

Здесь и далее $\varkappa_i$ — положительные константы.

Рассмотрим определитель управляемости

$$\Delta_u(t,x) = \det(A^{n-1}(t,x)b(t,x), \ldots, A(t,x)b(t,x), b(t,x)).$$

Очевидно представление

$$\Delta_u(t,x) = \beta^n(t,x)\Delta(t,x), \tag{11}$$

где $\Delta(t,x) = \det(A^{n-1}(t,x)e_1, \ldots, A(t,x)e_1, e_1)$. В силу свойства (8) $\Delta(t,x)$ зависит от ε.

Справедлива формула

$$\Delta(t,x) = \varepsilon^{0,5n(n-1)} \Delta_0(t,x), \tag{12}$$

где $\Delta_0(t,x)$ от ε не зависит. Чтобы убедиться в этом, надо разложить $\Delta(t,x)$ по элементам последнего столбца. В полученном определителе $(n-1)$-го порядка последний столбец имеет вид $\varepsilon(\alpha_{21}(t,x),\ldots,\alpha_{n1}(t,x))^*$. Элементы k-го столбца, отсчитываемого справа, являются полиномами относительно ε степени k, причем они обращаются в ноль при $\varepsilon=0$. Умножив последний столбец на $\alpha(t,x)-a_{11}(t,x)$ и прибавив его к предпоследнему столбцу, мы ликвидируем в предпоследнем столбце члены с ε в первой степени. Продолжая этот процесс, мы ликвидируем в k-м столбце члены с множителями ε^i $(i<k)$ и приходим к соотношению (12). Из формул (11), (12) и свойства (6) вытекает оценка

$$|\Delta_u(t,x)| \geq \beta_1^n e^{0,5n(n-1)}|\Delta_0(t,x)|.$$

Таким образом, условие равномерной управляемости сводится к требованию

$$\inf_{t\geq t_0,\, x\in\mathbb{R}^n} |\Delta_0(t,x)| = \delta_0 > 0, \tag{13}$$

и для $\Delta_u(t,x)$ получается оценка

$$|\Delta_u(t,x)| \geq \varkappa_3 e^{0,5n(n-1)}, \quad \text{где } \varkappa_3=\beta_1^n\delta_0. \tag{14}$$

Зададим спектр замкнутой системы в виде

$$\lambda_j(t,x) = -\alpha(t,x) - \psi_j\varepsilon, \quad j\in\overline{1,n}, \tag{15}$$

где ψ_j — различные положительные числа, и определим $s(t,x)$ в формуле (5) из алгебраических уравнений

$$s^*(t,x)d_j(t,x) = -1, \quad j\in\overline{1,n}, \tag{16}$$

где $d_j(t,x)=(A(t,x)-\lambda_j(t,x)I)^{-1}b(t,x)$. Выберем теперь числа ψ_j в формуле (15) таким образом, чтобы числа (15) были отделимы от спектра матрицы $A(t,x)$. Обозначим через $\mu_i(t,x)$ собственные числа матрицы $A(t,x)$. Согласно кругам Гершгорина [7] и свойству (10) при $i>1$ справедлива оценка

$$|\mu_i(t,x) - (-\alpha(t,x)+\varepsilon\alpha_{ii}(t,x))| \leq \sum_{i\neq j\in\overline{1,n}} |\alpha_{ij}(t,x)|\varepsilon \leq \varkappa_2\varepsilon.$$

Отсюда следуют неравенства

$$|\mu_i(t,x)-(-\alpha(t,x))| \leq |\mu_i(t,x)-(-\alpha(t,x))-\varepsilon\alpha_{ii}(t,x)| + \varepsilon|\alpha_{ii}(t,x)| \leq \sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}(t,x)|\varepsilon.$$

Поэтому в силу (10) имеет место оценка

$$|\mu_i(t,x)-(-\alpha(t,x))| \leq \varepsilon\varkappa_2.$$

Пусть $\psi_i > \varepsilon\varkappa_2$ $(i\in\overline{1,n})$. Тогда все числа $\lambda_i(t,x)$ отделимы от $\mu_2(t,x)$, …, $\mu_n(t,x)$. Согласно кругам Гершгорина

$$\mu_1(t,x) = a_{11}(t,x) + \nu(t,x),$$

где
$$|\nu(t,x)| \le \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}(t,x)|.$$
Поэтому справедлива оценка
$$|\mu_1(t,x)| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{1j}(t,x)|,$$
откуда в силу (7) вытекает неравенство
$$|\mu_1(t,x)| \le n\varkappa_1.$$
Из этого неравенства и свойства (9) следует, что все $\lambda_i(t,x)$ отделимы и от $\mu_1(t,x)$.

Поскольку $\lambda_i(t,x)$ являются собственными числами матрицы $P(t,x) = A(t,x) + b(t,x)s^*(t,x)$, можно рассмотреть спектральное разложение этой матрицы
$$P(t,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t,x) M_i(t,x), \tag{17}$$
где
$$M_i(t,x) = d_i(t,x) g_i^*(t,x), \tag{18}$$
$d_i(t,x)$ и $g_i(t,x)$ — собственные векторы матриц $P(t,x)$ и $P^*(t,x)$ соответственно, обладающие свойством
$$g_i^*(t,x) d_j(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i=j, \\ 0 & \text{при} \quad i \ne j. \end{cases} \tag{19}$$
Построим матрицы $C(t,x) = (d_1(t,x), \ldots, d_n(t,x))$ и $G(t,x) = (g_1(t,x), \ldots, g_n(t,x))$. Из свойства (19) вытекает равенство $G^*(t,x)C(t,x) = I$. Поэтому
$$G(t,x) = (C^*(t,x))^{-1}. \tag{120}$$
Для замкнутой системы
$$\frac{dx}{dt} = P(t,x)x \tag{20}$$
рассмотрим функцию Ляпунова $V(x) = x^* I x$. Производная dV/dt, взятая в силу системы (20), с учетом формулы (17) имеет вид
$$\frac{dV}{dt} = x^* D(t,x) x,$$
где $D(t,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t,x)(M_i(t,x) + M_i^*(t,x))$. В силу (15) справедливо представление
$$D(t,x) = -\alpha(t,x) \sum_{i=1}^{n} (M_i(t,x) + M_i^*(t,x)) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \psi_i (M_i(t,x) + M_i^*(t,x)).$$
Имеет место равенство
$$\sum_{i=1}^{n} M_i(t,x) = I,$$

в чем легко убедиться, умножив его слева на $C(t,x)$ и воспользовавшись свойством (19). Поэтому в силу условия (9) справедлива оценка

$$D(t,x) < -2\alpha_0 I + \varepsilon R(t,x), \tag{21}$$

где

$$|R(t,x)| < 2\psi_0 \sum_{i=1}^{n} |M_i(t,x)|, \tag{22}$$

$\psi_0 = \max\limits_{i\in\overline{1,n}} \psi_i$, $|\cdot|$ — евклидова норма матрицы. Нашей дальнейшей целью является оценка $|M_i(t,x)$. Из (18) вытекает неравенство

$$|M_i(t,x)| \le |d_i(t,x)| \cdot |g_i(t,x)|. \tag{23}$$

Очевидно, что $d_i(t,x)$ имеет вид

$$d_i(t,x) = \frac{1}{\Delta_i(t,x)} \begin{vmatrix} \psi_{1i}(t,x) \\ \psi_{2i}(t,x) \\ \vdots \\ \psi_{ni}(t,x) \end{vmatrix}, \tag{24}$$

где $\Delta_i(t,x) = \det(A(t,x) - \lambda_i(t,x)I)$, $\psi_{ki}(t,x)$ — миноры первой строки матрицы $(A(t,x) - \lambda_i I)$. Очевидна оценка

$$|\psi_{ki}(t,x)| \le \varkappa_4 \varepsilon^{n-1} \quad (k \in \overline{1,n}). \tag{25}$$

Здесь и в дальнейшем $\varkappa_i$ — абсолютные константы, не зависящие от ε. Из (24) вытекает оценка

$$|d_i(t,x)| \le \frac{\varkappa_5 \varepsilon^{n-1}}{|\Delta_i(t,x)|}\,. \tag{26}$$

Ввиду (24) матрица $C^*(t,x)$ имеет вид

$$C^*(t,x) = \begin{pmatrix} \frac{\psi_{11}(t,x)}{\Delta_1(t,x)} & \dots & \frac{\psi_{1n}(t,x)}{\Delta_1(t,x)} \\ \frac{\psi_{21}(t,x)}{\Delta_2(t,x)} & \dots & \frac{\psi_{2n}(t,x)}{\Delta_2(t,x)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\psi_{n1}(t,x)}{\Delta_n(t,x)} & \dots & \frac{\psi_{nn}(t,x)}{\Delta_n(t,x)} \end{pmatrix}.$$

Пусть $g_i^*(t,x) = (\gamma_{i1}(t,x), \dots, \gamma_{in}(t,x))$. Очевидно, что $\gamma_{i1}(t,x), \dots, \gamma_{in}(t,x)$ являются алгебраическими дополнениями i-й строки матрицы $C^*(t,x)$, деленными на $\det C(t,x)$. Поэтому

$$\gamma_{ik}(t,x) = \frac{\omega_{ik}(t,x)}{\prod_{i\ne j\in\overline{1,n}} \Delta_j(t,x) \det C(t,x)}\,,$$

где в силу (26) справедливо неравенство

$$|\omega_{ik}(t,x)| \le \varkappa_6 \varepsilon^{(n-1)^2}.$$

Отсюда вытекает оценка

$$|g_i(t,x)| \le \frac{\varkappa_7 \varepsilon^{(n-1)^2}}{\prod_{i\neq j\in\overline{1,n}} |\Delta_j(t,x)| \cdot |\det C(t,x)|}\,. \tag{27}$$

Для $\det C(t,x)$ имеет место следующая элегантная формула:

$$\det C(t,x) = \prod_{i=1}^{n} \Delta_i^{-1}(t,x) \prod_{1\le i<j\le n} (\lambda_i - \lambda_j)\Delta_u(t,x). \tag{28}$$

Для ее доказательства надо матрицу $C(t,x)$ умножить слева на $\prod_{i=1}^{n}(A(t,x)-\lambda_i(t,x)I)$ и воспользоваться перестановочностью матриц $(A(t,x)-\lambda_i(t,x)I)$ и $(A(t,x)-\lambda_j(t,x)I)$. Поскольку $\lambda_i - \lambda_j = \varepsilon(\psi_j - \psi_i)$, из (28) и (14) вытекает оценка

$$|\det C(t,x)| \ge \varkappa_8 \prod_{i=1}^{n} |\Delta_i(t,x)|^{-1} \varepsilon^{n(n-1)}.$$

Отсюда в силу (27) получаем соотношение

$$|g_i(t,x)| \le \varkappa_9 |\Delta_i(t,x)| \varepsilon^{(1-n)},$$

из которого ввиду (26), (23) следует оценка

$$|M_i(t,x)| < \varkappa_{10}.$$

Поэтому согласно (22) имеет место свойство

$$|R(t,x)| < \varkappa_{11}$$

и, следовательно, спектральная норма

$$\|R(t,x)\| = \sqrt{\lambda_{\max}(R(t,x))R^*(t,x)}$$

имеет такую же оценку:

$$\|R(t,x)\| < \varkappa_{11}.$$

Отсюда ввиду симметричности матрицы $R(t,x)$ вытекает соотношение

$$|\lambda_{\max}\{R(t,x)\}| < \varkappa_{11}.$$

Поэтому согласно неравенству Рэлея

$$R(t,x) < \varkappa_{11} I$$

и, следовательно, в силу (21) имеет место неравенство

$$D(t,x) < -(2\alpha_0 - \varepsilon\varkappa_{11})I.$$

Таким образом, система (20) глобально экспоненциально устойчива при условии

$$\varepsilon < \frac{2\alpha_0}{\varkappa_{11}}. \tag{29}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (6)–(10), (13), (29) *и вектор* $s(t,x)$ *определяется из уравнений* (15), (16). *Тогда система* (4), (5) *глобально экспоненциально устойчива.*

3. Стабилизация в большом. Требование равномерной ограниченности во всем пространстве коэффициентов системы (4) исключает из рассмотрения системы, у которых коэффициенты являются полиномами относительно составляющих вектора x. Однако предложенный метод модальной стабилизации применим и к системам с неограниченно растущими коэффициентами, если начальные условия принадлежат некоторому шару $\mathcal{M} = \{x: \ |x|^2 < R^2\}$. Действительно, если в условии теоремы 1 sup и inf брать при $t \geq t_0$, $|x| < R$, то все решения с начальными условиями, принадлежащими шару $\mathcal{M}$, будут при $t \to +\infty$ стремиться к устойчивому по Ляпунову состоянию равновесия $x = 0$.

4. Системы с переменной структурой. Предположим, что в системе (4) при $t \in (t_k, t_{k+1})$ $A(t,x) = A_k(t,x)$, $\beta(t,x) = \beta_k(t,x)$ и $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Теорема 2. *Если* $A_k(t,x)$ *и* $\beta_k(t,x)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1 *при всех* k*, то система с переменной структурой будет глобально экспоненциально устойчива, если при* $t_k < t < t_{k+1}$ *управление определяется формулой*

$$u = s_k^*(t,x)x,$$

в которой $s_k(t,x)$ *находится из системы*

$$s_k^*(t,x)(A_k(t,x) - \lambda_j^k(t,x))^{-1}\beta_k(t,x)e_1 = -1 \quad (j \in \overline{1,n}),$$

где $\lambda_j^k(t,x) = -\alpha_k(t,x) - \varepsilon\psi_j$.

Доказательство очевидно, поскольку функция Ляпунова и оценка ее производной не зависят от k. Замечание об устойчивости в большом справедливо и для системы с переменной структурой.

5. Заключение. Рассмотрен некоторый класс негладких нестационарных нелинейных равномерно управляемых систем, к которым применим метод модальной стабилизации, заключающийся в специальном выборе спектра замкнутой системы и определении коэффициентов обратной связи в виде решения линейной системы алгебраических уравнений. При этом замкнутая система становится глобально экспоненциально устойчивой. Показано, что этот метод применим для стабилизации некоторого класса нелинейных нестационарных систем с переменной структурой, а также для стабилизации в большом, когда коэффициенты ограничены лишь в заданном шаре пространства состояний и начальные условия берутся из этого же шара.

Литература

1. *Isidory A.* Nonlinear Control Systems. II. London: Springer, 1999. P. 520.
2. *Zak S. H.* Systems and Control. Oxford: Oxford Univ. Press, 2002. P. 490.
3. *Крищенко А. П., Панфилов Д. Ю., Ткачев С. Б.* Глобальная стабилизация афинных систем с помощью виртуальных выходов // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 11. С. 1503–1510.
4. *Ткачев С. Б.* Стабилизация нестационарных афинных систем с помощью виртуальных выходов // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 11. С. 1507–1517.
5. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
6. *Зубер И. Е., Якубович В. А., Гелиг А. Х.* Стабилизация некоторого класса равномерно управляемых систем // Доклады Академии Наук. 2012. Т. 446, № 6. С. 1–3.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

С в е д е н и я о б а в т о р а х

Зубер Ирина Ефремовна — доктор технических наук, ведущий научный сотрудник; zuber-yanikum@mail.ru

Гелиг Аркадий Хаимович — доктор физико-математических наук, профессор; agelig@yandex.ru

MODAL STABILIZATION OF A CERTAIN CLASS OF NONLINEAR NONSTATIONARY SYSTEMS

Irina E. Zuber, Arkadiy Kh. Gelig

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; zuber-yanikum@mail.ru, agelig@yandex.ru

The system

$$\frac{dx}{dt} = A(t,x)x + b(t,x)u \tag{1}$$

is considered. Here $A(t,x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b(t,x) = \beta(t,x)e_1$, $\beta(t,x) \in \mathbb{R}^1$, $e_1^* = (1,0,\ldots,0)$. Matrix coefficients $a_{ij}(t,x)$ for $A(t,x)$ and $\beta(t,x)$ are real bounded continuous functions. It is supposed that system (1) is uniformly controllable:

$$\inf_{t\geq t_0,\, x\in\mathbb{R}^n} |\det(A^{n-1}(t,x)b(t,x),\ldots,A(t,x)b(t,x),b(t,x)| > 0.$$

Stabilizing control is defined by formula

$$u(t,x) = s^*(t,x)x, \tag{2}$$

$$s^*(t,x)(A(t,x) - \lambda_j(t,x)I)^{-1}b(t,x) = -1,$$

where $\lambda_j(t,x)$ are special choised functions of spectrum for matrix of closed-loop system. Such conditions are formulated for $A(t,x)$ and $\beta(t,x)$ so that fulfilment these conditions provides global exponential stability for closed-loop system (1), (2).

In the case then $a_{ij}(t,x)$ and $\beta(t,x)$ are bounded only for $|x| < R$ the constructed modal control stabilizes the closed-loop system in the large, i.e. $|x(t_0)| < R$.

The modal stabilizing control is constructed for systems with varying structure where

$$A(t,x) = A_k(t,x), \quad \beta(t,x) = \beta_k(t,x) \quad \text{by } t \in (t_k, t_{k+1}).$$

Here $t_{k+1} > t_k$, $t_k \to +\infty$ for $k \to \infty$. Refs 7.

Keywords: nonlinear system, nonstationary system, modal stabilization, globally exponentially stability.

References

1. Isidory A., “Nonlinear Control Systems” **II** (Springer, London, 1999).
2. Zak S. H., “Systems and Control” (Oxford Univ. Press, Oxford, 2002).
3. Krishchenko A. P., Panfilov D. V., Tkachev S. B., “Global stabilization of affine systems via virtual outputs”, *Differential Equations* **39**(11), 1585–1592 (2003).
4. Tkachev S. B., “Stabilization of Nonstationary Affine Systems by the Virtual Output Method”, *Differential Equations* **43**(11), 1546–1557 (2007).
5. Yakubovich V. A., Leonov G. A., Gelig A. Kh., “Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities” (World Scientific, Singapore, 2004).
6. Zuber I. E., Yakubovich V. A., Gelig A. Kh., “Stabilization of a Certain Class of Uniformly Contrallable Systems”, *Doclady Mathematics* **86**(2), 1–3 (2012).
7. Gantmacher F. R., The Theory of Matrices (Chelsea, 1959).