

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПО ПИРАГАСУ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ИМПУЛЬСНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ УСИЛЕНИЯ*

Г. А. Леонов, К. А. Звягинцева

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

В работе предложен метод стабилизации периодических решений динамических систем, основанный на введении в систему запаздывающей обратной связи с импульсным периодическим коэффициентом усиления, период которого в два раза больше периода стабилизируемой орбиты. Такой подход позволяет преодолеть ограничения, возникающие при стабилизации с помощью постоянного коэффициента усиления. Полученный алгоритм применим при любом числе превышающих единицу мультипликаторов линеаризованной в окрестности цикла системы.

Метод проиллюстрирован с помощью численных экспериментов для различных дискретных систем. Стабилизированы неустойчивые циклы кубического отображения, отображений Лози и Рикера. Библиогр. 40 назв. Ил. 16.

Ключевые слова: дискретная система, периодическая орбита, стабилизация, запаздывающая обратная связь, асимптотическая устойчивость.

1. Введение. Проблема стабилизации динамических систем является одной из основных задач современной теории автоматического управления и последние три десятилетия вызывает большой интерес ученых различных специальностей. В течение этого времени опубликовано несколько тысяч работ, посвященных вопросам изменения хаотического поведения решений и стабилизации положений равновесия или периодических орбит в различных непрерывных и дискретных динамических системах. Начало новому направлению положила работа Э. Отта, С. Гребоги и Дж. Йорке [1], в которой было введено понятие «управление хаосом» и на примере дискретной системы Хенона компьютерным моделированием показано, что достаточно малое входное управление системы с помощью обратной связи позволяет добиться устойчивости одной из периодических орбит, помещенных в странный аттрактор.

К. Пирагасом [2] был предложен новый метод стабилизации, основанный на обратной связи с запаздыванием (delayed feedback control of chaos). Управление, которое вводится в систему, представляет собой разность текущего состояния системы и состояния с задержкой по времени, кратной периоду стабилизируемой орбиты, с некоторым коэффициентом усиления. Пирагасом и его соавторами [2–6] было сделано большое число компьютерных экспериментов по стабилизации периодических траекторий в странном аттракторе для различных трехмерных систем. Этот метод был успешно применен к задачам стабилизации систем из различных областей науки и техники [7–16]. Подробный список приложений этого метода можно найти в [17–19]. Отметим, что во многих публикациях возможность стабилизации системы, моделирующей тот или иной процесс, демонстрируется с помощью компьютерного эксперимента и строго не обосновывается. Это порождает новые открытые теоретические вопросы.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №14-21-00041, первый автор) и СПбГУ (проект 6.38.505.2014, второй автор).

В работе Т. Ушио [20] показано, что в дискретных системах состояние равновесия не может быть стабилизировано управлением с постоянным коэффициентом усиления, если матрица линеаризации системы в окрестности этого состояния имеет нечетное число вещественных собственных чисел, превышающих единицу. Это ограничение получило название «odd number limitation». В работе [21] указано условие, при котором невозможна стабилизация данным методом систем с непрерывным временем. В [22] получены необходимые и достаточные условия возможности стабилизации по Пирагасу двух- и трехмерных систем управления с непрерывным временем.

Исследование устойчивости периодической орбиты (как в дискретных, так и в непрерывных системах) может быть сведено к исследованию устойчивости положения равновесия линейной стационарной системы. Поэтому «odd number limitation» накладывает ограничения и на возможность стабилизировать периодические орбиты управлением с постоянным коэффициентом усиления при запаздывающей составляющей. К настоящему моменту было сделано несколько попыток преодолеть «odd number limitation» в случае постоянного коэффициента усиления (например, [23–29]). Но решение так и не было найдено.

В [30] разработан алгоритм стабилизации периодического неустойчивого решения для систем с непрерывным временем. Этот алгоритм основан на методе Пирагаса и методах нестационарной стабилизации линейных систем [31–38]. Управление формируется с помощью запаздывающей обратной связи с периодическим коэффициентом усиления, период которого в шесть раз превышает период цикла.

В настоящей статье этот алгоритм переносится на дискретный случай. Трудности, которые имеются при решении проблемы в непрерывном случае, в дискретном отсутствуют. Неустойчивая периодическая орбита стабилизируется с импульсным периодическим коэффициентом в обратной связи, период которого в два раза больше периода цикла. Как и в [30], периодический коэффициент усиления дает возможность преодолеть «odd number limitation». Метод применим при любом числе превышающих единицу мультипликаторов линеаризованной относительно цикла системы. Эффективность метода проиллюстрирована с помощью компьютерных экспериментов для кубического отображения (стабилизированы стационарная точка и орбиты периодов 2–5), отображения Лози (стабилизированы стационарная точка и орбита периода 2) и отображения Рикера (стабилизирован цикл периода 3).

Для цикла периода 5 одномерного кубического отображения, цикла периода 2 отображения Лози и цикла периода 3 отображения Рикера также приведены результаты стабилизации при импульсном коэффициенте усиления, период которого равен периоду цикла. Такая стабилизация возможна не всегда; ограничения, которые возникают при таком коэффициенте усиления, аналогичны «odd number limitation». При этом скорость стабилизации значительно снижается. Статья организована следующим образом. В первой части описывается суть метода, его обоснование дает теорема 1. Во второй части представлены результаты численного эксперимента.

2. Стабилизация системы в окрестности цикла. Пусть дискретная система n -го порядка

$$x(j+1) = X(x(j)), \quad (1)$$

где $j \geq 0$, $x(j) \in \mathbb{R}^n$, $X(x) \in C^1(G)$, G — область, $G \subset \mathbb{R}^n$, имеет неустойчивую периодическую орбиту $L = \{\tilde{x}(0), \tilde{x}(1), \dots, \tilde{x}(l-1)\}$, может быть, помещенную в странный аттрактор, $\tilde{x}(j+1) = X(\tilde{x}(j))$, $j = 0, \dots, l-1$; $\tilde{x}(j+l) = \tilde{x}(j)$, $l \geq 1$ (заметим, что $L = \{\tilde{x}(0)\}$ — стационарная точка системы (1) при $l = 1$).

Наряду с системой (1) рассмотрим систему вида

$$x(j+1) = X(x(j)) + K(j)(x(j) - x(j-l)), \quad (2)$$

где $K(j)$ — Nl -периодическая матрица, $N \in \mathbb{N}$, $j \geq l$.

Отметим, что при $x(j) \in L$

$$K(j)(x(j) - x(j-l)) \equiv 0,$$

и L является периодической орбитой системы (2), однако поведение траекторий систем (1) и (2) существенно различно в окрестности L . Ниже приведен простой алгоритм выбора $K(j)$ таким образом, чтобы орбита L системы (2) была асимптотически устойчива по Ляпунову.

Линеаризация системы (1) в окрестности L (система в вариациях) имеет вид

$$y(j+1) = A(j)y(j), \quad (3)$$

где $j \geq 0$, $y(j) = x(j) - \tilde{x}(j)$, $A(j) = \left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{x=\tilde{x}(j) \in L}$ — l -периодическая матрица.

Запишем линеаризацию системы (2):

$$y(j+1) = A(j)y(j) + K(j)(y(j) - y(j-l)), \quad (4)$$

$j \geq l$.

Введем обозначения: $B = A(l-1)A(l-2) \dots A(1)A(0)$ — матрица монодромии системы (3), $C = A(l-2) \dots A(1)A(0)$ при $l \geq 2$, $C = I$ при $l = 1$ (I — единичная матрица размерности n).

Теорема. Пусть $\det A(j) \neq 0$ для всех $j = 0, 1, \dots, l-1$, и $\det(B - I) \neq 0$. Тогда существует $2l$ -периодическая матрица $K(j)$ такая, что цикл L системы (2) асимптотически устойчив по Ляпунову.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим матрицу $K(j)$ как $2l$ -периодическую импульсную последовательность:

$$K(l) = K(l+1) = \dots = K(3l-2) = 0, \quad K(3l-1) = \tilde{K},$$

где \tilde{K} — постоянная матрица, $K(j+2l) = K(j)$ для $\forall j \geq l$.

Тогда решение системы (4) имеет вид

$$y(l+1) = A(0)y(l),$$

$$y(l+2) = A(1)A(0)y(l),$$

\vdots

$$y(2l-1) = Cy(l),$$

$$y(2l) = By(l),$$

\vdots

$$y(3l-1) = CBy(l),$$

$$y(3l) = A(3l-1)y(3l-1) + \tilde{K}(y(3l-1) - y(2l-1)) = (B^2 + \tilde{K}C(B - I))y(l).$$

Введем обозначение:

$$B^2 + \tilde{K}C(B - I) = D,$$

где D — произвольная диагональная матрица, все ненулевые элементы которой по модулю меньше единицы.

Тогда

$$\tilde{K} = (D - B^2)(B - I)^{-1}C^{-1}. \quad (5)$$

Легко показать, что при таком выборе $K(j)$

$$y(3l + 1) = A(0)Dy(l),$$

$$y(3l + 2) = A(1)A(0)Dy(l),$$

⋮

$$y(4l - 1) = CDy(l)$$

$$y(4l) = BDy(l),$$

⋮

$$y(5l - 1) = CBDy(l),$$

$$y(5l) = A(5l - 1)y(5l - 1) + \tilde{K}(y(5l - 1) - y(4l - 1)) = (B^2D + \tilde{K}(CBD - CD))y(l) = D^2y(l)$$

и

$$y((2m + 1)l) = D^m y(l),$$

$$y((2m + 1)l + j) = A(j - 1) \dots A(0)D^m y(l)$$

для всех $m \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, l$; и

$$y((2m + 2)l + j) = A(j - 1) \dots A(0)BD^m y(l),$$

для всех $m \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, 2l - 1$.

При $m \rightarrow +\infty$ D^m стремится к 0 (покомпонентно или по норме) согласно выбору матрицы D . Следовательно, решение системы (4) $y(j)$ стремится к 0 при $j \rightarrow +\infty$, откуда следует асимптотическая устойчивость периодической орбиты L системы (2).

Теорема доказана.

3. Стабилизация неустойчивых циклов дискретных систем. 3.1. Стабилизация неустойчивых циклов кубического отображения. Рассмотрим кубическое дискретное отображение

$$x(j + 1) = x^3(j) - 2x(j) + s, \quad (6)$$

где $s \in \mathbb{R}$. Пусть уравнение (6) имеет неустойчивую периодическую орбиту $L = \{\tilde{x}(0), \tilde{x}(1), \dots, \tilde{x}(l - 1)\}$.

В этом случае $A(j) = 3\tilde{x}^2(j) - 2$.

Полагаем $D = 10^{-1}$.

3.1.1. Стабилизация стационарной точки. При значении параметра $s = 0.75921$ отображение (6) имеет неустойчивое положение равновесия $\tilde{x}(0) = 0.25885$.

В этом случае $\tilde{K} \approx 1.12053$.

Стабилизированное решение представлено на рис. 1.

3.1.2. Стабилизация цикла периода 2. При значении параметра $s = 0.54835$ отображение (6) имеет неустойчивый цикл периода 2 с координатами $\tilde{x}(0) = -0.29611$, $\tilde{x}(1) = 1.11462$.

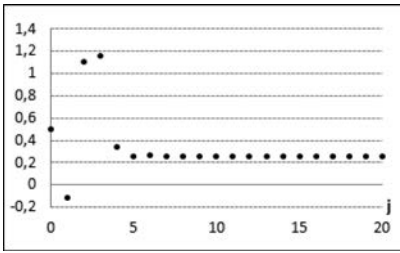


Рис. 1. Стабилизированная стационарная точка кубического отображения.

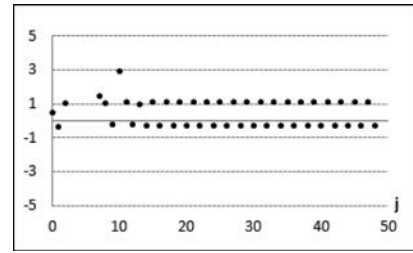


Рис. 2. Стабилизированный цикл периода 2 кубического отображения.

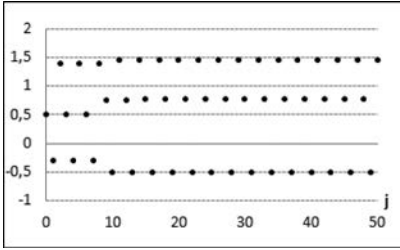


Рис. 3. Стабилизированный цикл периода 3 кубического отображения.

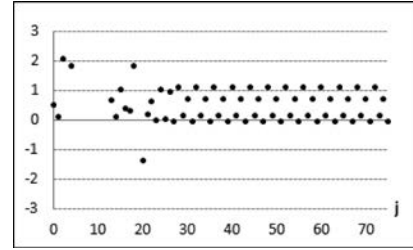


Рис. 4. Стабилизированный цикл периода 4 кубического отображения.

Получаем $\tilde{K} \approx -1.28093$, на рис. 2 — стабилизированное решение системы (6). Большие значения $x(j)$ на первых итерациях не отображены в силу выбора масштаба.

3.1.3. Стабилизация цикла периода 3. При $s = 0.57735$ отображение (6) имеет неустойчивый цикл периода 3 с координатами $\tilde{x}(0) = 0.77786$, $\tilde{x}(1) = -0.50771$, $\tilde{x}(2) = 1.4619$.

Получаем $\tilde{K} \approx 6266132.79$, стабилизированное решение изображено на рис. 3.

3.1.4. Стабилизация цикла периода 4. При $s = 1.00157$ цикл периода 4 отображения (6) имеет координаты $\tilde{x}(0) = 1.11204$, $\tilde{x}(1) = 0.15267$, $\tilde{x}(2) = 0.69979$, $\tilde{x}(3) = -0.05532$.

Результат стабилизации цикла при $\tilde{K} \approx 1.53451$ — на рис. 4.

Большие значения $x(j)$ на первых итерациях не отображены в силу выбора масштаба.

3.1.5. Стабилизация цикла периода 5. При $s = 0.84878$ цикл периода 5 кубического отображения имеет следующие координаты: $\tilde{x}(0) = 0.47874$, $\tilde{x}(1) = 0.00103$, $\tilde{x}(2) = 0.84673$, $\tilde{x}(3) = -0.23761$, $\tilde{x}(4) = 1.31059$.

Получаем $\tilde{K} = -2.15132$. Стабилизированное решение — на рис. 5.

Заметим, что циклы периодов 2, 3 и 4 кубического отображения не могут быть стабилизированы с помощью l -периодического коэффициента усиления, однако цикл периода 5 можно стабилизировать таким образом, результат стабилизации — на рис. 6.

На рис. 6 большие значения решения не отображены в силу выбора масштаба. Процесс стабилизации происходит очень медленно, требуется большое количество итераций, тогда как при $2l$ -периодическом коэффициенте цикл стабилизируется уже на 20-й итерации.

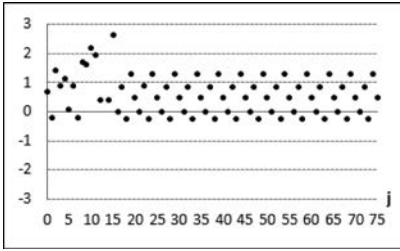


Рис. 5. Стабилизированный цикл периода 5 кубического отображения при $2l$ -периодическом коэффициенте усиления.

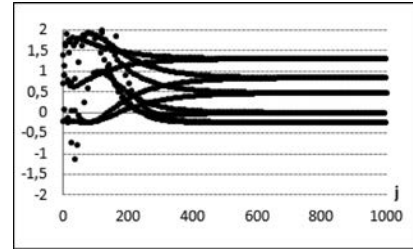


Рис. 6. Стабилизированный цикл периода 5 кубического отображения при l -периодическом коэффициенте усиления.

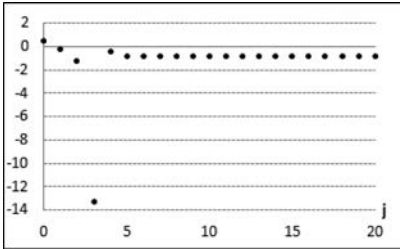


Рис. 7. Компонента $x_{-1}(j)$ стабилизированной стационарной точки отображения Лози.

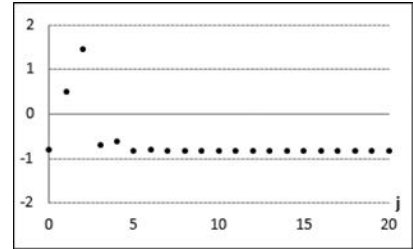


Рис. 8. Компонента $x_{-2}(j)$ стабилизированной стационарной точки отображения Лози.

3.2. Стабилизация неустойчивых циклов отображения Лози. Рассмотрим отображение Лози

$$\begin{cases} x_1(j+1) = 1 - a|x_1(j)| + bx_2(j), \\ x_2(j+1) = x_1(j), \end{cases} \quad (7)$$

где $j \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Здесь

$$A(j) = \begin{pmatrix} -a \cdot \operatorname{sign} \tilde{x}_1(j) & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $a = 1.7$, $b = 0.5$, следуя [39, 40].

3.2.1. Стабилизация стационарных точек. При выбранных значениях параметров система (7) имеет две неподвижные точки:

$$\tilde{x}_{-1}(0) = \tilde{x}_{-2}(0) = -\frac{1}{1.2} \approx -0.8333 \quad \text{и} \quad \tilde{x}_{+1}(0) = \tilde{x}_{+2}(0) = \frac{1}{2.2} \approx 0.4545.$$

Для первой неподвижной точки

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} -3.45 & -0.875 \\ -1.75 & -0.475 \end{pmatrix}.$$

Стабилизированное решение изображено на рис. 7–8.

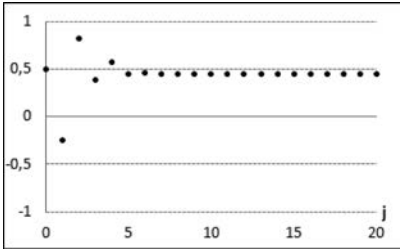


Рис. 9. Компонента $x_{+1}(j)$ стабилизированной стационарной точки отображения Лози.

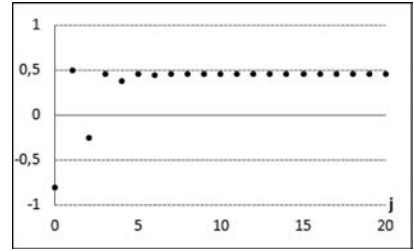


Рис. 10. Компонента $x_{+2}(j)$ стабилизированной стационарной точки отображения Лози.

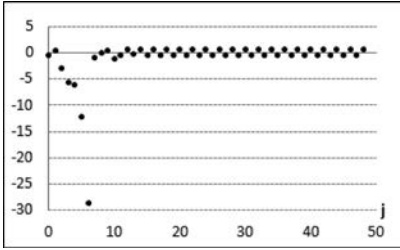


Рис. 11. Компонента $x_1(j)$ стабилизированного цикла периода 2 отображения Лози при $2l$ -периодическом коэффициенте усиления.

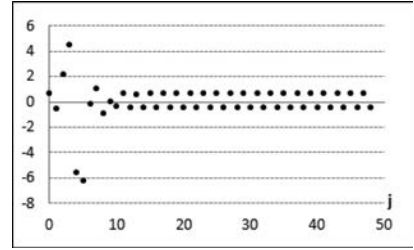


Рис. 12. Компонента $x_2(j)$ стабилизированного цикла периода 2 отображения Лози при $2l$ -периодическом коэффициенте усиления.

Для второй неподвижной точки

$$\tilde{K} \approx \begin{pmatrix} 1.10909 & -0.29545 \\ -0.59091 & 0.10455 \end{pmatrix}.$$

Компоненты стабилизированной стационарной точки — на рис. 9–10.

3.2.2. Стабилизация цикла периода 2. Цикл периода 2 отображения (7) имеет следующие координаты: $\tilde{x}_1(0) = 0.70064$, $\tilde{x}_2(0) = -0.38217$, $\tilde{x}_1(1) = -0.38217$, $\tilde{x}_2(1) = 0.70064$. В итоге

$$\tilde{K} \approx \begin{pmatrix} -1.21274 & -0.52834 \\ -1.05669 & -0.58363 \end{pmatrix}.$$

Результат стабилизации — на рис. 11–12.

Для цикла периода 2 отображения (7) проведена стабилизация при помощи l -периодического коэффициента усиления. Компоненты стабилизированного цикла — на рис. 13–14.

Процесс стабилизации при таком коэффициенте усиления происходит медленно, требуется большое количество итераций.

3.3. Стабилизация неустойчивых циклов отображения Рикера. Рассмотрим отображение Рикера

$$x(j+1) = Qx(j)e^{-rx(j)}, \quad (8)$$

где Q , $r > 0$, которое моделирует численность рыбной популяции.

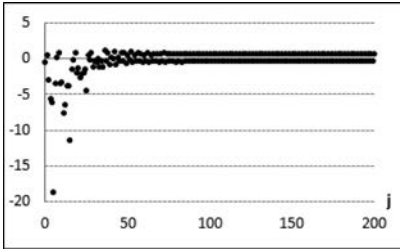


Рис. 13. Компонента $x_1(j)$ стабилизированного цикла периода 2 отображения Лози при l -периодическом коэффициенте усиления.

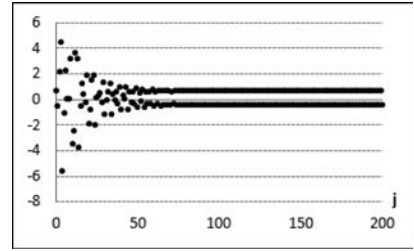


Рис. 14. Компонента $x_2(j)$ стабилизированного цикла периода 2 отображения Лози при l -периодическом коэффициенте усиления.

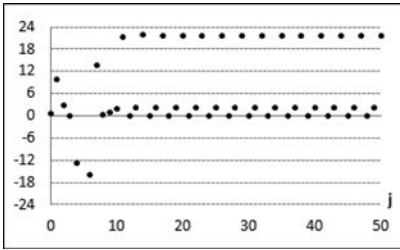


Рис. 15. Стабилизированный цикл периода 3 отображения Рикера при $2l$ -периодическом коэффициенте усиления.

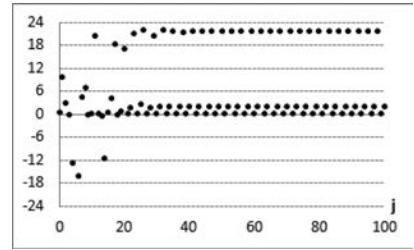


Рис. 16. Стабилизированный цикл периода 3 отображения Рикера при l -периодическом коэффициенте усиления.

Пусть $L = \{\tilde{x}(0), \tilde{x}(1), \dots, \tilde{x}(l-1)\}$ — неустойчивая орбита (8). В данном случае

$$A(j) = Q(1 - r\tilde{x}(j))e^{-r\tilde{x}(j)}.$$

Рассмотрим значения параметров $Q = 24$, $r = 0.4$. Положим $D = 10^{-2}$.

3.3.1. Стабилизация цикла периода 3. Отображение (8) имеет неустойчивый цикл периода 3 с координатами

$$\tilde{x}(0) = 0.08892, \quad \tilde{x}(1) = 2.05946, \quad \tilde{x}(2) = 21.68702.$$

Вычисляем \tilde{K} :

$$\tilde{K} = 0.01771.$$

Компоненты стабилизированной орбиты изображены на рис. 15.

При l -периодическом коэффициенте усиления скорость стабилизации значительно падает. Результат стабилизации — на рис. 16.

На рисунке большие значения решения не отображены в силу выбора масштаба.

Литература

1. Ott E., Grebogi C., Yorke J. Controlling chaos // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64, N 11. P. 1196–1199.
2. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 170. P. 421–428.

3. *Pyragas K.* Control of chaos via extended delay feedback // *Phys. Lett. A.* 1995. Vol. 206. P. 323–330.
4. *Namajunas A., Pyragas K., Tamasevicius A.* Stabilization of an unstable steady state in a Mackey-Class system // *Phys. Lett. A.* 1995. Vol. 204. P. 255–262.
5. *Pyragas V., Pyragas K.* Delayed feedback control of the Lorenz system: An analytical treatment at a subcritical Hopf bifurcation // *Phys. Rev. E.* 2006. 036215, N 73. P. 1–10.
6. *Tamasevicius A., Mykolaitis G., Pyragas V., Pyragas K.* Delayed feedback control of periodic orbits without torsion in nonautonomous systems: Theory and experiment // *Phys. Rev. E.* 2007. 026203, N 76. P. 1–6.
7. *Glorieux P.* Control of chaos in lasers by feedback and nonfeedback methods // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 1998. Vol. 8. P. 1749–1758.
8. *Roy R., Murphy T. W., Maier T. D., Gills Z., Hunt E. R.* Dynamical control of a chaotic laser: experimental stabilization of a globally coupled system // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol. 68. P. 1259–1262.
9. *Sen A. K.* Control and diagnostic uses of feedback // *Phys. of Plasmas.* 2000. Vol. 7. P. 1759–1766.
10. *Kol'tsova E. M., Gordeev L. S., Korchagin E. Y., et al.* Control of chaos in chemical systems (for the process of crystallization as an example) // *Russian J. of Phys. Chemistry.* 2000. Vol. 74. P. 78–84.
11. *Kol'tsova E. M., Cherenkov M. V., Korchagin E. Y.* Nonlinear processes and control of chaos in chemical technology // *Int. Conf. Physics and Control. Proc. / eds A. L. Fradkov, A. N. Churilov. St. Petersburg, Russia.* 2003. P. 484–490.
12. *Chen H. K.* Chaos and chaos synchronization of a symmetric gyro with linear-plus-cubic damping // *J. Sound Vib.* 2002. Vol. 255, N 4. P. 719–740.
13. *Mitsubori K., Aihara K.* Delayed-feedback control of chaotic roll motion of a loaded ship in waves // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 2002. Vol. 458. P. 2801–2813.
14. *Chen J. H., Chau K. T., Siu S. M., Chan C. C.* Experimental stabilization of chaos in a voltage-mode DC drive system // *IEEE Trans. Circ. Syst. I.* 2000. Vol. 47. P. 1093–1095.
15. *Dolov A. M., Kuznetsov S. P.* Application of idea of chaos control to stabilization of stationary generation in backward-wave oscillator // *Int. Conf. Physics and Control. Proc. / eds A. L. Fradkov, A. N. Churilov. St. Petersburg, Russia.* 2003. P. 507–509.
16. *Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N.* Synthesis of controls for a spacecraft that optimize the pole placement of the closed-loop control system // *J. of Computer and System Sciences Int.* 2012. Vol. 51. P. 431–444.
17. *Fradkov A. L., Evans R. J.* Control of chaos: Methods and applications in engineering // *Annual Rev. in Control.* 2005. Vol. 29. P. 33–56.
18. *Boccaletti S., Grebogi C., Lai Y. C., Mancini H., Maza D.* The control of chaos: theory and applications // *Phys. Rep.* 2000. Vol. 329, N 3. P. 103–197.
19. *Chen G., Dong X.* From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications // *World Scientific, Singapore.* 1999.
20. *Ushio T.* Limitation of Delayed Feedback Control in Nonlinear Discrete-Time Systems // *IEEE Transactions of Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications.* 1996. Vol. 43, N 9. P. 815–816.
21. *Hooton E. W., Amann A.* Analytical Limitation for Time-Delayed Feedback Control in Autonomous Systems // *Phys. Rev. Lett.* 2012. 154101. N 109.
22. *Leonov G. A., Shumafov M. M., Kuznetsov N. V.* Delayed feedback stabilization of unstable equilibria // *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline), 19 (1) World Congress, 2014.* P. 6818–6825.
23. *Morgul O.* On the stability of delayed feedback controllers // *Phys. Lett. A.* 2003. Vol. 314. P. 278–285.
24. *Morgul O.* On the stability of delayed feedback controllers for discrete time systems // *Physics Letters A.* 2005. Vol. 335. P. 31–42.
25. *Socolar J. E. S., Sukow D. W., Gauthier D. J.* Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 50. P. 3245–3248.
26. *Bleich M. E., Socolar J. E. S.* Stability of periodic orbits controlled by time-delay feedback // *Phys. Lett. A.* 1996. Vol. 210. P. 87–96.
27. *Tian Y. P., Zhu J.* Full characterization on limitation of generalized delayed feedback control for discrete-time systems // *Physica D.* 2004. Vol. 198. P. 248–257.
28. *Ushio T., Yamamoto S.* Delayed feedback control with nonlinear estimation in chaotic discrete-time systems // *Phys. Lett. A.* 1998. Vol. 247. P. 112–118.
29. *Polyak B. T.* Stabilizing chaos with predictive control // *Automation and Remote Control.* 2005. Vol. 66, N 11. P. 1791–1804.

30. Leonov G. A. Pyragas stabilizability via delayed feedback with periodic control gain // *Systems & Control Letters*. 2014. Vol. 69. P. 34–37.
31. Brockett R. Stabilization problem // *Open problems in Mathematical Systems and Control Theory*. Berlin, 1999. P. 75–78.
32. Leonov G. A. Brockett's problem in the theory of stability of linear differential equations // *St.Petersburg Math. J.* 2001. Vol. 13, N 4. P. 134–155.
33. Leonov G. A. Linear Nonstationary Stabilization Algorithms and Brockett Problem // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2001. Vol. 65, N 5. P. 777–783.
34. Leonov G. A. Brockett Problem in the Theory of Stability of Nonstationary Stabilization of Linear Differential Equations // *American Mathematical Society Translation*. 2002. Vol. 205, N 2. P. 163–173.
35. Leonov G. A., Shumafov M. M. Stabilization of Linear Systems // *Cambridge Scientific Press*, 2012. 396 p.
36. Leonov G. A., Shumafov M. M. Vibrational stabilization and the Brockett problem // *Differential Equations*. Vol. 47, Issue 13. 2011. P. 1853–1915.
37. Leonov G. A. Brockett's problem for linear discrete control systems // *Automatics and Telemekhanics*. 2002. Vol. 5. P. 92–96.
38. Shumafov M. M. On stabilization problem of two-dimensional linear discrete system // *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Sev.-Kavk. Reg., Estestv. Nauki*, N 5, 2009. P. 71–74.
39. Senkerik R., Kominkova-Oplatkova Z., Zelinka I., Pluhacek M. Analytic programming in the task of evolutionary synthesis of the robust controller for selected discrete chaotic systems // *Computers & Mathematics with Applications*. 2013. Vol. 66, N 2. P. 177–189.
40. Senkerik R., Kominkova-Oplatkova Z., Pluhacek M. Analytic Programming — a Novel Tool for Synthesis of Controller for Chaotic Lozi Map // *Proceedings of the SCSI 2013*. Rhodes Island, GR, EUROPEMENT, P. 201–206.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

Сведения об авторах

Леонов Геннадий Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корр. РАН, профессор; leonov@math.spbu.ru

Звягинцева Ксения Александровна — студент; zvyagintsevaksenia@gmail.com

STABILIZATION BY PIRAGAS OF DISCRETE SYSTEMS WITH THE DELAYED FEEDBACK WITH PULSE PERIODIC GAIN

Gennadiy A. Leonov, Kseniya A. Zvyagintseva

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; leonov@math.spbu.ru, zvyagintsevaksenia@gmail.com

In this paper a method for stabilization of unstable periodic solutions of dynamic systems is proposed. It is based on the delayed feedback with pulse periodic gain which period is twice the period of an orbit being stabilized. Such approach allows one to overcome the restrictions imposed by stabilization with a constant gain. The obtained algorithm is applicable if the linearized system around the cycle has any number of eigenvalues larger than unity.

The method is illustrated with the numerical experiments for various discrete systems. Unstable cycles of Cubic, Lozi, and Ricker maps are stabilized. Refs 40. Figs 16.

Keywords: discrete system, periodic orbit, stabilization, delayed feedback control, asymptotic stability.

References

- Ott E., Grebogi C., Yorke J., "Controlling chaos", *Phys. Rev. Lett.* **64**(11), 1196–1199 (1990).
- Pyragas K., "Continuous control of chaos by self-controlling feedback", *Phys. Lett. A.* **170**, 421–428 (1992).
- Pyragas K., "Control of chaos via extended delay feedback", *Phys. Lett. A.* **206**, 323–330 (1995).
- Namajunas A., Pyragas K., Tamasevicius A., "Stabilization of an unstable steady state in a Mackey-Class system", *Phys. Lett. A.* **204**, 255–262 (1995).

5. Pyragas V., Pyragas K., "Delayed feedback control of the Lorenz system: An analytical treatment at a subcritical Hopf bifurcation", *Phys. Rev. E* **036215**(73), 1–10 (2006).
6. Tamasevicius A., Mykolaitis G., Pyragas V., Pyragas K., "Delayed feedback control of periodic orbits without torsion in nonautonomous systems: Theory and experiment", *Phys. Rev. E* **026203**(76), 1–6 (2007).
7. Glorieux P., "Control of chaos in lasers by feedback and nonfeedback methods", *Int. J. Bifurc. Chaos* **8**, 1749–1758 (1998).
8. Roy R., Murphy T.W., Maier T.D., Gills Z., Hunt E.R., "Dynamical control of a chaotic laser: experimental stabilization of a globally coupled system", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1259–1262 (1992).
9. Sen A.K., "Control and diagnostic uses of feedback", *Phys. of Plasmas* **7**, 1759–1766 (2000).
10. Kol'tsova E.M., Gordeev L.S., Korchagin E.Y., et al., "Control of chaos in chemical systems (for the process of crystallization as an example)", *Russian J. of Phys. Chemistry* **74**, 78–84 (2000).
11. Kol'tsova E.M., Cherenkov M.V., Korchagin E.Y., "Nonlinear processes and control of chaos in chemical technology", *Int. Conf. Physics and Control. Proc.* (Eds A.L.Fradkov, A.N.Churilov, St.Petersburg, Russia, 2003), 484–490.
12. Chen H.K., "Chaos and chaos synchronization of a symmetric gyro with linear-plus-cubic damping", *J. Sound Vibr.* **255**(4), 719–740 (2002).
13. Mitsubori K., Aihara K., "Delayed-feedback control of chaotic roll motion of a ooded ship in waves", *Proc. R. Soc. Lond. A* **458**, 2801–2813 (2002).
14. Chen J.H., Chau K.T., Siu S.M., Chan C.C., "Experimental stabilization of chaos in a voltage-mode DC drive system", *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **47**, 1093–1095 (2000).
15. Dolov A.M., Kuznetsov S.P., "Application of idea of chaos control to stabilization of stationary generation in backward-wave oscillator", *Int. Conf. Physics and Control. Proc.* (Eds A.L.Fradkov, A.N.Churilov, St.Petersburg, Russia, 2003), 507–509.
16. Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N., "Synthesis of controls for a spacecraft that optimize the pole placement of the closed-loop control system", *J. of Computer and System Sciences Int.* **51**, 431–444 (2012).
17. Fradkov A.L., Evans R.J. "Control of chaos: Methods and applications in engineering", *Annual Rev. in Control* **29**, 33–56 (2005).
18. Boccaletti S., Grebogi C., Lai Y.C., Mancini H., Maza D., "The control of chaos: theory and applications", *Phys. Rep.* **329**(3), 103–197 (2000).
19. Chen G., Dong X., "From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications", *World Scientific* (Singapore, 1999).
20. Ushio T., "Limitation of Delayed Feedback Control in Nonlinear Discrete-Time Systems", *IEEE Transactions of Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* **43**(9), 815–816 (1996).
21. Hooton E.W., Amann A., "Analytical Limitation for Time-Delayed Feedback Control in Autonomous Systems", *Phys. Rev. Lett.* **154101**(109) (2012).
22. Leonov G.A., Shumafov M.M., Kuznetsov N.V., "Delayed feedback stabilization of unstable equilibria", *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, **19**(1) (World Congress, 2014), 6818–6825.
23. Morgul O., "On the stability of delayed feedback controllers", *Phys. Lett. A* **314**, 278–285 (2003).
24. Morgul O., "On the stability of delayed feedback controllers for discrete time systems", *Physics Letters A* **335**, 31–42 (2005).
25. Socolar J.E.S., Sukow D.W., Gauthier D.J., "Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems", *Phys. Rev. E* **50**, 3245–3248 (1994).
26. Bleich M.E., Socolar J.E.S., "Stability of periodic orbits controlled by time-delay feedback", *Phys. Lett. A* **210**, 87–96 (1996).
27. Tian Y.P., Zhu J., "Full characterization on limitation of generalized delayed feedback control for discrete-time systems", *Physica D* **198**, 248–257 (2004).
28. Ushio T., Yamamoto S., "Delayed feedback control with nonlinear estimation in chaotic discrete-time systems", *Phys. Lett. A* **247**, 112–118 (1998).
29. Polyak B.T., "Stabilizing chaos with predictive control", *Automation and Remote Control* **66**(11), 1791–1804 (2005).
30. Leonov G.A., "Pyragas stabilizability via delayed feedback with periodic control gain", *Systems & Control Letters* **69**, 34–37 (2014).
31. Brockett R., "Stabilization problem", *Open problems in Mathematical Systems and Control Theory* (Berlin, 1999), 75–78.
32. Leonov G.A., "Brockett's problem in the theory of stability of linear differential equations", *St. Petersburg Math. J.* **13**(4), 134–155 (2001).
33. Leonov G.A., "Linear Nonstationary Stabilization Algorithms and Brockett Problem", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **65**(5), 777–783 (2001).

34. Leonov G. A., “Brockett Problem in the Theory of Stability of Nonstationary Stabilization of Linear Differential Equations”, *American Mathematical Society Translation* **205**(2), 163–173 (2002).
35. Leonov G. A., Shumafov M. M., “Stabilization of Linear Systems” (Cambridge Scientific Press, 2012).
36. Leonov G. A., Shumafov M. M., “Vibrational stabilization and the Brockett problem”, *Differential Equations* **47**(13), 1853–1915 (2011).
37. Leonov G. A., “Brockett’s problem for linear discrete control systems”, *Automatics and Telemekhanics* **5**, 92–96 (2002).
38. Shumafov M. M., “On stabilization problem of two-dimensional linear discrete system”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Sev.-Kavk. Reg., Estestv. Nauki* N 5, 71–74 (2009).
39. Senkerik R., Kominkova-Oplatkova Z., Zelinka I., Pluhacek M., “Analytic programming in the task of evolutionary synthesis of the robust controller for selected discrete chaotic systems”, *Computers & Mathematics with Applications* **66**(2), 177–189 (2013).
40. Senkerik R., Kominkova-Oplatkova Z., Pluhacek M., “Analytic Programming — a Novel Tool for Synthesis of Controller for Chaotic Lozi Map”, *Proceedings of the SCSI* (Rhodes Island, GR, EUROPMENT, 2013), 201–206.