УДК 514.172 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 3

ДЕЛЕНИЕ ВЫПУКЛОЙ ФИГУРЫ СИСТЕМОЙ ЛУЧЕЙ И ВПИСАННЫЕ В ЭТУ ФИГУРУ МНОГОУГОЛЬНИКИ

В. В. Макеев

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Доказаны утверждения о делении площади выпуклой фигуры системой лучей с общим началом, включающие в себя некоторые ранее известные результаты такого рода. В качестве предельного случая получаются также некоторые ранее известные теоремы о возможности вписать в выпуклую фигуру многоугольник того или иного типа. Библиогр. 13 назв. Ил. 2.

Ключевые слова: выпуклая фигура, деление площади, вписанные многоугольники.

Имеется много утверждений о делении площади выпуклой фигуры на равные части системой лучей с общим началом и о возможности вписать в выпуклую фигуру (или описать вокруг нее) многоугольник того или иного типа (см. обзор [1]). При этом для доказательства этих утверждений используются аналогичные топологические соображения, которе можно излагать различными по форме способами (мы используем более геометрический).

Ниже мы доказываем более общие утверждения о делении площади выпуклой фигуры системой лучей с общим началом. При этом утверждения о вписанных многоугольниках становятся предельным случаем теорем о делении площади выпуклой фигуры.

Всюду в дальнейшем под выпуклой фигурой понимаем компактное выпуклое подмножество плоскости с непустой внутренностью. Ниже $S(K)$ и ∂K означают площадь и границу выпуклой фигуры K.

§ 1. Случай произвольной выпуклой фигуры. Хорошо известно, что на границе всякой плоской выпуклой фигуры лежат вершины некоторого квадрата (в [4] изложена история вопроса). В [2] (см.[3]) это доказано для произвольной гладкой жордановой кривой. Также хорошо известно, что площадь выпуклой фигуры можно разделить на равные части парой перпендикулярных прямых. Нижеследующая теорема объединяет оба эти утверждения.

Теорема 1. *Пусть K — плоская выпуклая фигура с гладкой границей, а $C_1, \ldots, C_4$ — конусы с общей вершиной в центре некоторого квадрата, имеющие в качестве направляющих множеств отрезки его сторон равной длины, симметричные относительно середин этих сторон (рис. 1). Тогда существует такое дви-*

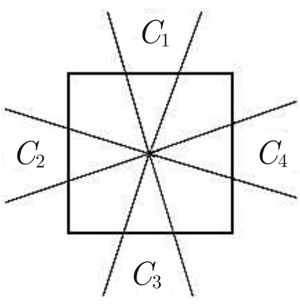

Рис. 1.

жение, переводящее общую вершину конусов во внутреннюю точку фигуры K, что образы конусов $C_1, \dots, C_4$ содержат равные части площади фигуры K.

Доказательство. Нам в дальнейшем понадобится вспомогательное утверждение.

Лемма. *Для любой плоской выпуклой фигуры K с гладкой границей найдется такое $\varepsilon > 0$, что через каждую внутреннюю точку фигуры, удаленную от ее границы менее, чем на ε, проходит ровно одна хорда фигуры, делящаяся в этой точке пополам.*

Доказательство. В каждой граничной точке фигуры K рассмотрим вспомогательную декартову систему координат, поместив начало координат в рассматриваемую точку, направив ось x по касательной к фигуре, а ось y — по направленной внутрь нормали к границе. В силу гладкости границы K найдется такое $\varepsilon > 0$, что в каждой граничной точке фигуры в вспомогательной системе координат точки границы фигуры, удаленные от оси x менее чем на ε, являются точками графика функции, не убывающей при $x > 0$ и не возрастающей при $x < 0$. По соображениям компактности ε можно выбрать обслуживающим все точки границы фигуры K. Пусть внутренняя точка a фигуры расположена на расстоянии меньше $\varepsilon/2$ от границы фигуры. Рассмотрим вышеописанную систему координат с началом в ближайшей к точке a точке границы K. Очевидно, что граница симметричной K относительно точки a фигуры имеет точки пересечения с границей фигуры K лишь на расстоянии меньше ε от оси x. Таких точек ровно две. Лемма доказана.

Докажем теорему 1. Мы считаем, что стороны квадрата и конусы занумерованы против часовой стрелки; обозначим через M конфигурационное пространство квадратов, полученных из исходного сохраняющими ориентацию движениями плоскости, при которых центр квадрата является внутренней точкой фигуры K.

Определим отображение $f : M \times (0, \pi/2] \to R^4$, где вторая координата есть угол при вершине связанного с квадратом конуса (который может меняться в указанных пределах), сопоставив упорядоченному набору конусов $(C_1, \dots, C_4)$ набор чисел $(S(C_1 \cap K), \dots, S(C_4 \cap K))$.

Множество искомых конфигураций конусов замкнуто по соображениям непрерывности. Из доказанной леммы следует, что это множество еще и компактно. Действительно, в силу равенства площадей внутри каждой пары симметричных конусов проходит хорда фигуры, делящаяся в их общей вершине пополам. Следовательно, по доказанной лемме вершины всех искомых конфигураций конусов отделены от границы фигуры K.

На пространстве $M \times (0, \pi/2]$ свободно действует циклическая группа Z_4 циклическими перестановками конусов $(C_1, \dots, C_4)$. Множество A искомых конфигураций конусов — прообраз прямой в R^4, заданной уравнениями $x_1 = \dots = x_4$. По построению A инвариантно относительно вышеуказанного действия Z_4. В ситуации общего положения (то есть для открытого плотного в C^1-топологии множества фигур K) множество A — одномерное гладкое подмногообразие $M \times (0, \pi/2]$, а $A_1 = A/Z_4$ — гладкое подмногообразие $M/Z_4 \times (0, \pi/2]$. Для $a > 0$ в многообразии с краем $M/Z_4 \times [a, \pi/2]$ содержащаяся в нем часть A_1, которую обозначим через A_2, является одномерным гладким многообразием с краями в $M/Z_4 \times a$ и $M/Z_4 \times (\pi/2)$.

Заметим, что в ситуации общего положения $A_2 \cap (M/Z_4) \times (\pi/2)$ состоит из нечетного числа точек, то есть в этом случае существует нечетное число пар перпендикулярных прямых, делящих площадь фигуры K на равные части. Это следует из того, что типичная гладкая функция, принимающая на концах отрезка значения разного знака, имеет нечетное число нулей (вспомним стандартное доказательство существования такой пары прямых, например [5]).

Но тогда и $A_2 \cap (M/Z_4) \times a$ состоит из нечетного числа точек, что и доказывает теорему 1 в ситуации общего положения. В остальных случаях теорема получается предельным переходом.

Замечание. Если угол при вершине конуса равен $\pi/2$, то получается теорема о возможности разделить на равные части площадь выпуклой фигуры парой перпендикулярных прямых. Если угол при вершине конуса стремится к 0, то в пределе получается теорема о вписанном квадрате.

В [6] доказано, что на границе выпуклой фигуры лежат вершины аффинного образа правильного шестиугольника, а в [7] доказано, что площадь этой фигуры можно разделить на равные части тремя проходящими через одну точку прямыми (см. [5]).

Теорема 2. *Пусть K — плоская выпуклая фигура с гладкой границей, а $C_1, \ldots, C_6$ — конусы с общей вершиной в центре некоторого правильного шестиугольника с отрезками его сторон равной длины, симметричными относительно середин этих сторон в качестве направляющих множеств (рис. 2). Тогда существует такое аффинное преобразование, переводящее общую вершину конусов во внутреннюю точку фигуры K, что образы рассматриваемых конусов $C_1, \ldots, C_6$ содержат равные части площади фигуры K.*

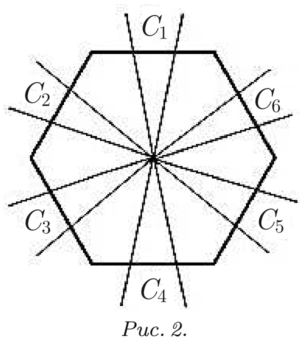

Рис. 2.

Доказательство. Действуем по аналогии с доказательством теоремы 1. Мы считаем, что стороны шестиугольника и конусы занумерованы против часовой стрелки; обозначим через M конфигурационное пространство шестиугольников, полученных из исходного сохраняющими ориентацию аффинными преобразованиями плоскости с единичным определителем, при которых центр шестиугольника является внутренней точкой фигуры K.

Определим отображение $f\colon M \times (0, \pi/3] \to R^6$, где вторая координата есть угол при вершине конуса, связанного с исходным шестиугольником, сопоставив упорядоченному набору подвергнутых аффинному преобразованию конусов $(C_1, \ldots, C_6)$ набор чисел $(S(C_1 \cap K), \ldots, S(C_6 \cap K))$.

Множество A искомых конфигураций конусов — прообраз прямой в R^6, заданной уравнениями $x_1 = \cdots = x_6$. Множество A замкнуто по соображениям непрерывности. Из доказанной леммы следует, что множество вершин конусов из A отделено от границы фигуры K. Действительно, в силу равенства площадей внутри каждой пары симметричных конусов проходит хорда фигуры, делящаяся в их общей вершине пополам. Следовательно, по доказанной лемме вершины всех искомых конфигураций конусов отделены от границы фигуры K. Пересечение A с каждым множеством $M \times [a, \pi/3]$ для $a > 0$ компактно. В противном случае в $M \times [0, \pi/3]$ присутствуют элементы A, полученные из исходной системы конусов сжатием в некотором направлении со сколь угодно малым коэффициентом. Но тогда (учитывая то, что вершины конусов отделены от границы фигуры), выбрав из указанных предельное направление, совершая обратное аффинное преобразование и предельный переход, мы построим бесконечную полосу между параллельными прямыми, высекающую на исходных конусах равные площади, чего не может быть.

На пространстве $M \times (0, \pi/3]$ свободно действует циклическая группа Z_6 циклическими перестановками конусов $(C_1, \dots, C_6)$. По построению A инвариантно относительно вышеуказанного действия Z_6. В ситуации общего положения (то есть для открытого плотного в C^1-топологии множества фигур K) множество A — одномерное гладкое подмногообразие $M \times (0, \pi/3]$, а $A_1 = A/Z_6$ — гладкое подмногообразие$M/Z_6 \times (0, \pi/3]$. Для $a > 0$ в многообразии с краем $M/Z_6 \times [a, \pi/3]$ содержащаяся в нем часть A_1, которую обозначим через A_2, является одномерным гладким многообразием с краями в $M/Z_6 \times a$ и $M/Z_6 \times (\pi/3)$.

Заметим, что в ситуации общего положения $A_2 \cap M/Z_6 \times (\pi/3)$ состоит из нечетного числа точек, то есть в этом случае существует нечетное число троек пересекающихся прямых, делящих площадь фигуры K на равные части. Это следует из того, что типичная гладкая функция, принимающая на концах отрезка значения разного знака, имеет нечетное число нулей (вспомним доказательство существования такой тройки прямых [5], [7]).

Но тогда и $A_2 \cap M/Z_6 \times a$ состоит из нечетного числа точек, что и доказывает теорему 2 в ситуации общего положения. В остальных случаях теорема получается предельным переходом.

Замечание. Если угол при вершине конуса равен $\pi/3$, то получается теорема о возможности разделить на равные части площадь выпуклой фигуры тройкой пересекающихся прямых [7]. Если угол при вершине конуса стремится к 0, то в пределе получается теорема о вписанном аффинно-правильном шестиугольнике [6].

В [8, 9] доказано, что во всякую плоскую выпуклую фигуру можно вписать аффинный образ правильного пятиугольника с вершиной в наперед заданной точке границы фигуры K (см. [10]). В [11] то же самое доказано для выпуклого пятиугольника, сумма любых соседних углов которого больше π.

Теорема 3. *Пусть K — плоская выпуклая фигура с гладкой границей, а $C_1, \dots, C_5$ — конусы с общей вершиной в центре некоторого правильного пятиугольника с такими отрезками его сторон равной длины, симметричными относительно середин этих сторон в качестве направляющих множеств, что углы при вершинах конусов менее $\pi/5$. Тогда существует такое аффинное преобразование, переводящее общую вершину конусов во внутреннюю точку фигуры K, что образы конусов $C_1, \dots, C_5$ содержат равные части площади фигуры K, а выбранный луч, ограничивающий один из конусов, пересекает границу фигуры K в заданной точке.*

Доказательство. Мы считаем, что стороны пятиугольника и конусы занумерованы против часовой стрелки; обозначим через M конфигурационное пространство систем конусов, полученных из исходной сохраняющими ориентацию аффинными преобразованиями плоскости с единичным определителем, при которых общая вершина конусов является внутренней точкой фигуры K.

Зафиксировав угол $\varphi < \pi/5$ при вершине конуса, определим отображение $f : M \to R^5$, сопоставив упорядоченному набору конусов $(C_1, \dots, C_5)$ набор чисел $(S(C_1 \cap K), \dots, S(C_5 \cap K))$.

Обозначим через A множество таких вышеописанных аффинных преобразований, что для площадей образов конусов выполняется равенство $S(C_1 \cap K) = \dots = (C_5 \cap K)$. Покажем, что в ситуации общего положения (то есть для открытого плотного в C^1-топологии множества фигур K отображение f трансверсально к прямой $x_1 = \dots = x_5$ в R^5) множество A — одномерное гладкое компактное ориентируемое подмногообразие пятимерного некомпактного многообразия рассматриваемых аффинных преобразований, которое реализует образующую фундаментальной группы M.

Проверим, что круг K — фигура общего положения. Для круга K искомыми являются только правильные конфигурации конусов с общей вершиной в центре круга. Пусть вышеописанная правильная система конусов имеет общую вершину в центре круга K, и аффинное преобразование a с единичным определителем переводит ее в систему конусов с тем же свойством. Тогда система конусов $a(C_1), \dots, a(C_5)$ высекает на фигурах K и (ограниченной эллипсом) $a(K)$ секторы равной площади. Тогда внутри каждого из конусов $a(C_1), \dots, a(C_5)$ проходит исходящий из их общей вершины луч, на котором фигуры K и $a(K)$ высекают равные отрезки, то есть их границы пересекаются в пяти (лежащих на окружности) точках, а значит по теореме Безу они совпадают. Таким образом, в рассматриваемом случае множество A состоит из сохраняющих ориентацию поворотов вокруг центра круга. Подвергая правильную систему конусов с общей вершиной в центре круга K сжатию к биссектрисе угла одного из конусов с последующим сдвигом вдоль биссектрисы их общей вершины внутрь этого конуса, мы добьемся того, что секторы, высекаемые другими конусами, будут иметь равную площадь, а выделенный конус с ненулевой скоростью будет уменьшать свою площадь по сравнению с ними. Это доказывает, что круг K — фигура общего положения.

Определим для фигуры K с гладкой границей непрерывное отображение $g : A \to \partial K$, сопоставив аффинному преобразованию точку пересечения образа выделенного луча, ограничивающего один из конусов, с границей фигуры. Любые две плоские гладкие выпуклые фигуры гладко деформируемы друг в друга в классе таких фигур (например, их выпуклые линейные комбинации). При этом множество искомых конфигураций конусов для фигур из рассматриваемого однопараметрического семейства компактно. В противном случае, как и выше, превратим найденные системы конусов аффинными преобразованиями в правильные системы и рассмотрим круги с центрами в общих вершинах конусов, от которых конусы отсекают секторы той же площади, что и образы рассматриваемых фигур при тех же преобразованиях. Границы фигур и кругов пересекаются внутри конусов в точках $A_1, \dots, A_5$. В силу сделанного ограничения на углы при вершине конусов для любых четырех идущих подряд вершин пятиугольников $A_1, \dots, A_5$, например $A_1, \dots, A_4$, выполняется следующее. Продолжения сторон A_1A_2, A_4A_3 и A_2A_3 ограничивают треугольник A_2A_3B с углом $\angle B$ более $\pi/5 - \varphi$. Действительно, угловая мера дуги A_2A_3 менее $2\pi/5 + \varphi$, а не пресекающей ее дуги A_1A_4 более $4\pi/5 - \varphi$. Угол B измеряется полуразностью угловых мер этих дуг, поэтому он более $\pi/5 - \varphi$.

Таким образом, аффинный образ фигуры содержит вписанный в окружность пятиугольник $A_1, \dots, A_5$ и содержится в пятиугольной звезде, ограниченной продолжениями сторон этого пятиугольника, с острыми углами при вершинах более $\pi/5 - \varphi$. Таким образом, отношение площади аффинного образа фигуры к площади пятиугольника $A_1, \ldots, A_5$ не превосходит отношения площади звезды к площади пятиугольника, которое ограничено зависящей от φ постоянной. Это доказывает компактность множества искомых конфигураций конусов для фигур из рассматриваемых однопараметрических семейств.

Таким образом, по стандартным топологическим соображениям для фигуры общего положения корректно определен класс сингулярного бордизма отображения g, а значит и его степень. Рассмотренный пример круга K показывает, что эта степень равна 1. Теорема доказана.

§ 2. Случай центрально-симметричной выпуклой фигуры

Теорема 4. *Пусть K — плоская центрально-симметричная выпуклая фигура, а $C_1, \ldots, C_6$ — конусы с общей вершиной в центре некоторого правильного шестиугольника с отрезками его сторон равной длины, симметричными относительно середин этих сторон в качестве направляющих множеств. Тогда существует такое аффинное преобразование, переводящее общую вершину конусов в центр симметрии фигуры K, что образы конусов $C_1, \ldots, C_6$ содержат равные части площади фигуры K, а выбранный луч, ограничивающий один из конусов, пересекает границу фигуры K в заданной точке.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3. Мы считаем, что стороны шестиугольника и конусы занумерованы против часовой стрелки; обозначим через M конфигурационное пространство систем конусов, полученных из исходной сохраняющими ориентацию аффинными преобразованиями плоскости с единичным определителем, при которых общая вершина конусов является центром фигуры K. Обозначим через A множество таких вышеописанных аффинных преобразований, что для образов конусов выполняется равенство $S(C_1 \cap K) = \cdots = S(C_6 \cap K)$.

Зафиксировав некоторый угол при вершине конусов, определим отображение $f : M \to R^3$, сопоставив упорядоченному набору конусов $(C_1, \ldots, C_6)$ набор чисел $(S(C_1 \cap K),\ S(C_3 \cap K_0,\ S(C_5 \cap K))$. Покажем, что в ситуации общего положения (то есть для открытого плотного в C^1-топологии множества фигур K отображение f трансверсально к прямой $x_1 = x_3 = x_5$ в R^3) множество A — одномерное гладкое компактное ориентируемое подмногообразие трехмерного некомпактного многообразия рассматриваемых аффинных преобразований, которое реализует образующую фундаментальной группы M.

Проверим, что круг K — фигура общего положения. Для круга K искомыми являются только правильные конфигурации конусов с общей вершиной в центре круга. Пусть вышеописанная правильная система конусов имеет общую вершину в центре круга K и аффинное преобразование a с единичным определителем переводит ее в систему конусов с тем же свойством. Тогда система конусов $a(C_1), \ldots, a(C_6)$ высекает на фигурах K и $a(K)$ секторы равной площади. Тогда внутри каждого из конусов $a(C_1), \ldots, a(C_6)$ проходит исходящий из их общей вершины луч, на котором фигуры K и $a(K)$ высекают равные отрезки, то есть их границы пересекаются в шести точках, а значит по теореме Безу они совпадают. Таким образом, в рассматриваемом случае множество A состоит из сохраняющих ориентацию поворотов вокруг центра круга. Подвергая правильную систему конусов с общей вершиной в центре круга K сжатию к биссектрисе угла между соседними конусами, мы добьемся того, что секторы, ограниченные ближайшими к биссектрисе конусами, уменьшат свою площадь, оставаясь равными, а оставшиеся два симметричных конуса с ненулевой скоростью увеличат свою площадь. Это доказывает, что круг K — фигура общего положения.

Определим непрерывное отображение $g : A \to \partial K$, сопоставив аффинному преобразованию точку пересечения образа выделенного луча, ограничивающего один из конусов, с границей фигуры. Любые две плоские центрально-симметричные гладкие выпуклые фигуры с общим центром гладко деформируемы друг в друга в классе таких фигур (например, их выпуклые линейные комбинации). При этом множество искомых конфигураций конусов для фигур из рассматриваемого однопараметрического семейства компактно, так как в противном случае превратим найденные системы конусов аффинными преобразованиями в правильные системы и совершим предельный переход (как и выше). Мы построим бесконечную полосу, ограниченную параллельными прямыми, от которой конусы отсекают равные площади, чего не может быть. Таким образом, по стандартным топологическим соображениям для фигуры общего положения корректно определен класс сингулярного бордизма отображения g, а значит и его степень. Рассмотренный пример круга K показывает, что эта степень равна 1. Теорема доказана в ситуации общего положения. В остальных случаях она получается предельным переходом.

Замечание. Если угол при вершине конуса стремится к 0, то в пределе получается известная теорема о вписанном аффинно-правильном шестиугольнике с вершиной в наперед заданной граничной точке фигуры K.

Известно, что во всякую центрально-симметричную выпуклую фигуру вписан аффинный образ правильного восьмиугольника [9, 10].

Теорема 5. *Пусть K — плоская центрально-симметричная выпуклая фигура, а $C_1, \dots, C_8$ — конусы с общей вершиной в центре некоторого правильного восьмиугольника с отрезками его сторон равной длины, симметричными относительно середин этих сторон в качестве направляющих множеств. Тогда существует такое аффинное преобразование, переводящее общую вершину конусов в центр симметрии фигуры K, что образы конусов $C_1, \dots, C_8$ содержат равные части площади фигуры K.*

Доказательство. Покажем, что в ситуации общего положения (то есть для открытого плотного в C^1-топологии множества фигур K с гладкой границей) искомых конфигураций образов конусов нечетное число. Покажем, что для системы конусов с углом меньше $\pi/4$ при вершине квадрат (сглаженный в малых окрестностях вершин) является фигурой общего положения и для него существует ровно одна искомая система конусов.

Действительно, прямая, отсекающая от двух соседних конусов треугольники равной площади, должна быть перпендикулярна разделяющей их диагонали восьмиугольника. Поэтому для квадрата искомая система конусов одна, когда диагонали восьмиугольника перпендикулярны сторонам квадрата. Меняя пару параллельных сторон квадрата, превращая его в параллелограмм, легко добиться того, что площади частей фигуры в трех парах симметричных конусов не изменятся, а в четвертой паре будут меняться с ненулевой скоростью. Превращая аффинными преобразованиями получаемые параллелограммы в исходный квадрат, видим, что сглаженный квадрат является фигурой общего положения.

Любые две плоские центрально-симметричные гладкие выпуклые фигуры с общим центром гладко деформируемы друг в друга в классе таких фигур (например, их выпуклые линейные комбинации). При этом множество искомых конфигураций конусов для фигур из рассматриваемого однопараметрического семейства компактно. Так как в противном случае, превратив найденные системы конусов аффинными преобразованиями в правильные системы, совершив предельный переход (как и выше), мы построим бесконечную полосу, ограниченную параллельными прямыми, от которой конусы отсекают равные площади, чего не может быть. Таким образом, по стандартным топологическим соображениям вычет по модулю 2 числа искомых конфигураций конусов для фигуры общего положения корректно определен. Рассмотренный пример сглаженного квадрата показывает, что он равен 1. Теорема доказана в ситуации общего положения. В остальных случаях она получается предельным переходом.

Замечание. Если угол при вершине конуса стремится к 0, то в пределе получается теорема о вписанном аффинно-правильном восьмиугольнике.

В [12] доказано, что во всякую плоскую центрально-симметричную выпуклую фигуру K или же вписан аффинный образ правильного десятиугольника, или же имеются два аффинных образа правильного десятиугольника, четыре пары противоположных вершин которых лежат на границе K, при этом две оставшиеся вершины первого многоугольника лежат вне K, а две оставшиеся вершины второго лежат внутри K.

Теорема 6. *Пусть K — плоская центрально-симметричная выпуклая фигура. Рассмотрим десять конусов с общей вершиной в центре некоторого правильного десятиугольника с отрезками его сторон равной длины, симметричными относительно середин этих сторон в качестве направляющих множеств. Тогда или существует такое аффинное преобразование, переводящее общую вершину конусов в центр симметрии фигуры K, что образы конусов содержат равные части площади фигуры K, или же существуют такие два аффинных образа системы конусов с общей вершиной в центре симметрии фигуры K, что образы четырех пар симметричных конусов содержат равные части площади фигуры K, которые в одном случае больше частей, содержащихся в конусах оставшейся пары, а в другом меньше.*

Доказательство. Рассмотрим прямой цилиндр C с основанием K, высота которого многократно больше диаметра основания, и пусть O — центр симметрии C. Обозначим через $C_1, \ldots, C_5$ пары симметричных относительно их общей вершины конусов. Обозначим через M многообразие вышеуказанной системы конусов с общей вершиной в центре O цилиндра C, причем пары конусов занумерованы против часовой стрелки в содержащих их ориентированных плоскостях из многообразия Грассмана ориентированных двумерных плоскостей в R^3. Ясно, что M гомеоморфно многообразию Штифеля $V_2(R^3)$ 2-реперов в R^3.

Определим непрерывное отображение $f : M \to R^5$, сопоставив упорядоченному набору конусов набор чисел $(S(C_1 \cap C), \ldots, (C_5 \cap C))$. На многообразиях M и R^5 действует циклическая группа Z_5: на первом — циклическими перестановками пар симметричных конусов, а на втором — циклическими перестановками координат. По построению рассматриваемое отображение f сохраняет вышеописанное групповое действие.

Как доказано в [13], в этом случае образ $f(M)$ или содержит точку с равными координатами, или же содержит две точки с четырьмя равными координатами, причем пятая координата у одной из точек меньше остальных, а у второй — больше. Очевидно, что в силу центральной симметрии C и того, что его высота многократно больше диаметра основания, системы найденных конусов не могут пересекать основания цилиндра C. Теперь, проектируя на основание K цилиндра вышеописанную систему конусов, получаем требуемое.

Замечание. При стремлении угла при вершине конусов к 0 в качестве предельного случая получаем приведенное выше утверждение из [12].

Литература

1. *Карасёв Р. Н.* Топологические методы в комбинаторной геометрии // Успехи математических наук. 63:6 (384). 2008. С. 39–90.

2. *Шнирельман Л. Г.* О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых // Успехи математических наук. Вып. 10. 1944. С. 34–44.

3. *Griffiths H.* The topology of square pegs in round holes // Proc. London Math. Soc. Vol. 62, N 3. 1991. P. 647–672.

4. *Eggleston H. G.* Figures inscribed in convex sets // Amer. Math. Monthly. Vol. 65. 1958. P. 76–80.

5. *Яглом И. М., Болтянский В. Г.* Выпуклые фигуры. Гостехиздат, 1951.

6. *Besicovitch A. S.* Measure of asymmetry of convex curves // J. London. Math. Soc. Vol. 23. 1945. P. 237–240.

7. *Buck B., Buck E.* Equipartition of convex sets // Math. Mag. Vol. 22. 1948/49. P. 195–198.

8. *Böhme W.* Ein Satz úber ebene konvexe Figuren // Math. Phys. Semesterber. Vol. 6. 1958. P. 153–156.

9. *Grunbaum B.* Affineregular polygons inscribed in plane convex sets // Riveon Lematimatika. Vol. 13. 1959. P. 20–24.

10. *Грюнбаум Б.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. М.: Наука, 1971.

11. *Макеев В. В.* О пятиугольниках, вписанных в замкнутую выпуклую кривую // Записки научных семинаров ПОМИ. 246. СПб., 1997. С. 184–190.

12. *Макеев В. В., Нецветаев Н. Ю.* О вписанных и описанных многогранниках для центрально-симметричного выпуклого тела // Записки научных семинаров ПОМИ. 415. СПб., 2013. С. 54–61.

13. *Макеев В. В.* Задача Кнастера и почти сферические сечения // Мат. сб. 180, № 3. 1989. С. 424–431.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

Сведения об авторе

Макеев Владимир Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор; mvv57@inbox.ru

PARTITIONING THE CONVEX FIGURE BY SYSTEM OF RAYS AND INSCRIBED POLYGONS

Vladimir V. Makeev

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; mvv57@inbox.ru

Established some new theorems about equipartitioning the area of a convex figure by system of convex cones with common vertex. As the limit case of this theorems we have some previous theorems about equipartitioning the area of a convex figure by convex fans and about inscribed polygons of convex figure. Refs 13. Figs 2.

Keywords: convex figure, equipartitioning the area, inscribed polygons.

References

1. Karasev R. N., “Topological methods in combinatorial geometry”, *Russ. Math. Surv.* **63**, 1031–1078 (2008) [in Russian].

2. Shnirel’man L. G., “On certain geometrical properties of closed curves”, *Usp. Mat. Nauk* no. 10, 34–44 (1944) [in Russian].

3. Griffiths H., “The topology of square pegs in round holes”, *Proc. London Math. Soc.* **62**(3), 647–672 (1991).

4. Eggleston H. G., “Figures inscribed in convex sets”, *Am. Math. Mon.* **65**, 76–80 (1958).

5. Yaglom I. M., Boltyanskii V. G., Convex Figures, *Ser. Library of the Mathematical Circle* **4** (Gostekhizdat, Moscow, 1951; Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961) [in Russian].

6. Besicovitch A. S., “Measure of asymmetry of convex curves”, *J. London. Math. Soc.* **23**, 237–240 (1945).

7. Buck B., Buck E., “Equipartition of convex sets”, *Math. Mag.* **22**, 195–198 (1949).

8. Böhme W., “Ein satz über ebene konvexe figuren”, *Math. Phys. Semesterber* **6**, 153–156 (1958).

9. Grunbaum B., “Affineregular polygons inscribed in plane convex sets”, *Riveon Lematimatika* **13**, 20–24 (1959).

10. Gryunbaum B., “Studies on the Combinatorial Geometry and the Theory of Convex Bodies” (Nauka, Moscow, 1971) [in Russian].

11. Makeev V. V., “Pentagons inscribed in a closed convex curve”, *J. Math. Sci.* **100**, 2303–2306 (2000) [in Russian].

12. Makeev V. V., Netsvetaev N. Yu., “On inscribed and circumscribed polyhedra for a centrally symmetric convex body”, *Zap. Nauchn. Sem. POMI* **415**, 54–61 (2013) [in Russian].

13. Makeev V. V., “The Knaster problem and almost spherical sections”, *Mat. USSR Sb.* **66**, 431–438 (1990) [in Russian].