

О ГРАФАХ КРИТИЧЕСКИХ ДЛЯ УСЛОВИЯ НА МИНИМАЛЬНУЮ РАЗМЕРНОСТЬ ОРТОНОРМАЛЬНОГО ПОМЕЧИВАНИЯ

Е. В. Просолупов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Рассмотрено понятие графа, критического для условия, что число вершинной независимости равно минимальной размерности ортонормального помечивания и строго меньше наименьшего размера кликового покрытия. Найдены необходимые и достаточные условия того, что граф является критическим в указанном смысле. На основе полученных результатов улучшены достаточные условия для того, чтобы равенство числа вершинной независимости и минимальной размерности ортонормального помечивания графа влекло равенство числа вершинной независимости и минимального размера кликового покрытия. Библиогр. 16 назв. Ил. 1.

Ключевые слова: граф, критический граф, ортонормальное помечивание, ранг, минимальный ранг, симметричные матрицы, клика, независимое множество, минимальный размер кликового покрытия, число вершинной независимости, минимальная размерность ортонормального помечивания.

1. Введение. Рассматривается обыкновенный граф G (неориентированный, без петель и кратных ребер) с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Пусть для определенности $|V(G)| = n$ и $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$.

Подграфом графа G , порожденным множеством вершин $U \subseteq V$, называется граф $G[U]$ с множеством вершин U и множеством ребер $\{\{v, w\} : \{v, w\} \in E(G), v, w \in U\}$. Термин «подграф» в рамках статьи используется в смысле «порожденный подграф».

Проблема исследования минимума ранга на классах матриц, ассоциированных с графом, встречается в разных вариантах в зависимости от того, как именно задается класс матриц. Пусть S_n множество всех вещественных симметричных матриц $n \times n$, а S_n^+ — множество положительно полуопределенных матриц из S_n . Для любой матрицы $X \in S_n$ обозначим $G(X)$ граф с множеством вершин $\{1, \dots, n\}$ и множеством ребер $\{\{i, j\} : x_{i,j} \neq 0, 1 \leq i < j \leq n\}$. Для данного графа G обозначим $S(G)$ множество всех симметричных матриц, для которых $G(X) = G$:

$$S(G) = \{X \in S_n : G(X) = G\}.$$

Минимальный ранг графа G определяется как

$$\text{mr}(G) = \min\{\text{rank } X : X \in S(G)\}.$$

Проблема нахождения минимального ранга графа, в том числе над полями, отличными от поля вещественных чисел, и для классов графов, отличных от обыкновенных, является предметом постоянного интереса (см., например, [1–4], обзоры [5] и [6], а также сайт American Institute of Mathematics (URL: <<http://aimath.org/pastworkshops/matrixspectrum.html>>)).

Ортонормальным помечиванием графа G называется такое отображение

$$f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

что выполняется

$$\|f(v)\| = 1, \quad \forall v \in V(G),$$

и

$$\{u, v\} \notin E(G) \Rightarrow f(u) \cdot f(v) = 0.$$

Минимальную размерность d пространства $\mathbb{R}^d$, для которого существует ортонормальное помечивание графа G , обозначают $d(G)$.

Можно показать (см., например, [7]), что минимальная размерность ортонормального помечивания $d(G)$ тоже может быть выражена в терминах минимума ранга на множестве матриц, ассоциированных с графом. Определим множество квадратных матриц с единичной диагональю $\mathcal{A}_{\geq 0}(G)$ следующим образом:

$$\mathcal{A}_{\geq 0}(G) = \{X : X \in S_n^+, I - A_G \leq X \leq I + A_G\}.$$

Здесь A_G — матрица смежности графа G , I — единичная матрица, символ $\leq$ для матриц означает поэлементное сравнение. Тогда

$$d(G) = \min\{\text{rank } X : X \in \mathcal{A}_{\geq 0}\}. \quad (1)$$

Множество вершин $U \subseteq V(G)$ называется независимым множеством графа G , если никакие две вершины $u_1 \in U$ и $u_2 \in U$ не смежны в G . Другими словами, независимым называется множество U , которое порождает пустой подграф. Числом вершинной независимости $\alpha(G)$ называется наибольшее количество вершин в независимом множестве графа G .

Кликой графа G называется полный подграф G_1 графа G (т.е. любые две вершины смежны в G_1). Минимальное число клик, которые покрывают все вершины графа G , обозначают $\overline{\chi}(G)$.

В [8] Ловас показал, что

$$\alpha(G) \leq \vartheta(G) \leq d(G) \leq \overline{\chi}(G),$$

где $\vartheta(G)$ — широко известная ϑ -функция Ловаса [8]. Эта функция имеет ряд эквивалентных определений. В частности,

$$\vartheta(G) = \min_f \max_{i \in V(G)} \frac{1}{(e_1, f(i))^2},$$

где минимум берется по всем ортонормальным помечиваниям f графа G ; e_1 — орт пространства размерности, соответствующей f . При изучении комбинаторной оптимизации и аппроксимационных алгоритмов важную роль играет ϑ -функция [9–11].

Известно, что в интервале $[\alpha(G), \overline{\chi}(G)]$ кроме функций $\vartheta(G)$ и $d(G)$ лежат функции $r(G)$ и $r_+(G)$, определенные следующим образом:

$$r(G) = \min\{\text{rank } X : X \in \mathcal{A}(G)\}, \quad (2)$$

где $\mathcal{A}(G) = \{X : X \in S_n, I - A_G \leq X \leq I + A_G\}$;

$$r_+(G) = \min\{\text{rank } X : X \in \mathcal{A}_{\geq 0}(G)\}, \quad (3)$$

где $\mathcal{A}_{\geq 0}(G) = \{X : X \in S_n, I \leq X \leq I + A_G\}$.

Обзор результатов, связанных с функциями d , r и r_+ , можно найти в [7]. В частности, известны следующие соотношения:

$$\alpha(G) \leq r(G) \leq r_+(G) \leq \overline{\chi}(G),$$

$$\alpha(G) \leq r(G) \leq d(G) \leq \bar{\chi}(G).$$

В работе [12] доказана

Теорема 1. *Для любого графа G верно, что $\alpha(G) = r_+(G)$ влечет $\alpha(G) = \bar{\chi}(G)$.*

Естественно, возникает вопрос, возможно ли перенести этот результат с функции r_+ на функции r и d . Можно сформулировать предположение, что

Предположение 1. *Для любого графа G $\alpha(G) = r(G)$ влечет $\alpha(G) = \bar{\chi}(G)$.*

В [16] приводится

Лемма 1. *Для каждого графа G равенство $\alpha(G) = r(G)$ влечет $\alpha(G) = d(G)$.*

Согласно этой лемме все результаты для случая, когда $\alpha(G) = d(G)$, влекут аналогичные результаты для графов с $\alpha(G) = r(G)$, и наоборот. В дальнейшем будет использоваться только функция $d(G)$. Все полученные результаты будут верны и для функции $r(G)$. В частности, предположение 1 эквивалентно тому, что

Предположение 2. *Для любого графа G $\alpha(G) = d(G)$ влечет $\alpha(G) = \bar{\chi}(G)$.*

В [13] показано, что предположение 2 не может быть верно для всех графов, поскольку существует такой граф Γ , что

$$\alpha(\Gamma) = r(\Gamma) = d(\Gamma) = 3, \quad r_+(\Gamma) = \bar{\chi}(\Gamma) = 4.$$

Некоторые свойства этого графа будут рассмотрены в конце данной статьи. В [14] результат был обобщен.

Теорема 2. *Для любого k существует такой связный граф G , что $\alpha(G) = d(G)$ и $\alpha(G) + k \leq \bar{\chi}(G)$.*

То есть, несмотря на равенство $\alpha(G) = d(G)$, разница между $\alpha(G)$ и $\bar{\chi}(G)$ может быть сколь угодно велика.

Тем не менее, при наложении дополнительных ограничений на множество графов предположение 2 становится верным. В [13] доказана

Теорема 3. *Если в графе G нет двух циклов C_4 без хорд с общим ребром, то равенство $\alpha(G) = r(G)$ влечет $\alpha(G) = \bar{\chi}(G)$.*

В [16] этот результат усилен более точным описанием исключаемой структуры и расширением класса графов, для которых закономерность выполняется. Множество исключаемых графов обозначено $[W^{\frac{1}{2}}]$ и сформулирована

Теорема 4. *Если у графа G не существует такого порожденного подграфа F , для которого бы выполнялось $F \in [W^{\frac{1}{2}}]$, то $\alpha(G) = d(G)$ влечет $\alpha(G) = \bar{\chi}(G)$.*

В данной статье изучен ключевой подграф, который можно обнаружить в любом графе, для которого не выполняется предположение 2. С использованием полученных свойств сформулировано утверждение, где ключевой подграф использован как исключаемый, в условиях, аналогичных теоремам 3 и 4. Таким образом, использован более узкий класс исключаемых графов и, соответственно, более широкое множество графов, для которых утверждение теоремы имеет силу.

2. α - и $\bar{\chi}$ -критические вершины. Для получения основных результатов требуется рассмотреть некоторые свойства критических вершин графа.

Определение 1. Пусть $f(G)$ — некоторая числовая характеристика графа G . Вершина $v \in V(G)$ называется f -критической вершиной графа G , если $f(G - v) < f(G)$. Вершину, не являющуюся f -критической, назовем f -нейтральной.

Ниже нас будут интересовать α - и $\bar{\chi}$ -критические вершины, которые при этом являются d -нейтральными. Очевидно, при удалении одной вершины из графа, каждая из этих характеристик может остаться неизменной или уменьшиться ровно на

единицу. Потому, например, для α -критической вершины v графа G верно, что $\alpha(G - v) = \alpha(G) - 1$.

Лемма 2. 1. Вершина является α -критической для графа G тогда и только тогда, когда входит во все наибольшие независимые множества графа G .

2. Если в графе G все вершины α -критические, G является пустым графом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $\alpha(G) = k$. Если вершина v принадлежит всем независимым множествам графа G размера k , то в графе $(G - v)$ нет ни одного независимого множества размера k и $\alpha(G - v) < \alpha(G)$. То есть, v — α -критическая вершина.

С другой стороны, если вершина v не принадлежит какому-нибудь независимому множеству $A = \{u_1, \dots, u_k\}$, то после удаления вершины v из графа множество A останется в графе G и число вершинной независимости $\alpha(G)$ не изменится. Значит, v не может быть α -критической вершиной.

2. Пусть все вершины графа G являются α -критическими. Поскольку каждая такая вершина принадлежит всем наибольшим независимым множествам графа G , они все вместе образуют единое независимое множество. Таким образом, в графе G не будет ребер.

Следствие 1. У графа G не может быть больше, чем $\alpha(G)$ α -критических вершин.

Из леммы 2 следует, что у непустого графа все вершины не могут быть α -критическими. Можно привести пример связного графа с n вершинами, у которого $n - 1$ α -критическая вершина. Этот граф — звезда $K_{n-1,1}$.

3. Критический подграф

Определение 2. Граф G называется критическим для свойства, заданного предикатом $P(G)$, если $P(G)$ — истина, но $P(G - v)$ — ложь для любой вершины $v \in V(G)$.

Лемма 3. У любого графа G , для которого выполняется $P(G) = (\alpha(G) = d(G) \ \& \ \alpha(G) < \overline{\chi}(G))$, есть порожденный подграф H , который является критическим для этого свойства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный граф G , для которого верно выражение $\alpha(G) = d(G) < \overline{\chi}(G)$. Не умаляя общности, можем утверждать, что граф G связен. В противном случае указанное неравенство должно выполняться для одной из компонент связности, которая и будет рассматриваться далее.

Будем удалять из графа G вершины до тех пор, пока не получим такой граф H , что $\alpha(H) = d(H) < \overline{\chi}(H)$ и для любой вершины $v \in V(H)$ для графа $H - v$ аналогичное выражение не выполняется.

Полученный граф H и является искомым критическим графом.

Лемма 4. Если граф H является критическим для свойства $P(G) = (\alpha(G) = d(G) \ \& \ \alpha(G) < \overline{\chi}(G))$, то

- 1) любая вершина графа H является d -нейтральной и при этом $\overline{\chi}$ - или α -критической;
- 2) в графе H обязательно найдется $\overline{\chi}$ -критическая вершина;
- 3) $\alpha(H) = d(H) = \overline{\chi}(H) - 1$;
- 4) $\alpha(H) \geq 3$;
- 5) граф H связен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Так как H — граф критический для P , для любой вершины $v \in V(H)$ ложным является условие $P(H - v)$. То есть, для $\forall v \in V(H)$ верно хотя бы одно из двух свойств:

- а) $\alpha(H - v) < d(H - v)$;
 б) $\alpha(H - v) = \overline{\chi}(H - v)$.

Поскольку

$$\alpha(H) - 1 \leq \alpha(H - v) \leq d(H - v) \leq \alpha(H),$$

$$\overline{\chi}(H) - 1 \leq \overline{\chi}(H - v) \leq \overline{\chi}(H),$$

для $\forall v \in V(H)$ верно

- а) либо v является α -критической и d -нейтральной:

$$\alpha(H - v) = \alpha(H) - 1 \quad \text{и} \quad d(H - v) = d(H); \quad (4)$$

- б) либо α - и d -нейтральной и $\overline{\chi}$ -критической:

$$\alpha(H - v) = d(H - v) = \alpha(H), \quad \overline{\chi}(H - v) = \overline{\chi}(H) - 1, \quad (5)$$

и при этом

$$\alpha(H - v) = \overline{\chi}(H - v). \quad (6)$$

В любом случае значение функции d при удалении вершины v из графа H не меняется: $d(H - v) = d(H)$.

2. Из леммы 2 следует, что все вершины графа H не могут быть α -критическими. Следовательно, в графе H существуют вершины, для которых выполняется свойство (5)–(6).

3. Поскольку такая вершина существует, из уравнений (5) и (6), в частности, следует, что для графа H обязательно выполняется равенство

$$\alpha(H) = \overline{\chi}(H) - 1. \quad (7)$$

4. Если $\alpha(H) = d(H) = 2$, то из статьи [7] известно, что $\overline{\chi}(H) = 2$. Следовательно, $\alpha(H) \geq 3$.

5. Предположим, что граф F несвязен и $P(F)$ — истина. Тогда хотя бы для одной из его компонент связности выполняется условие P . Действительно, принимая во внимание то, что для любого графа G выполняется $\alpha(G) \leq d(G) \leq \overline{\chi}(G)$, и то, что значение каждой из этих функций для графа является суммой соответствующих значений для его компонент связности, получим

$$\sum \alpha(F_i) = \sum d(F_i) < \sum \overline{\chi}(F_i).$$

Отсюда с учетом доказанного выше равенства (7) следует $\alpha(F_s) = d(F_s) < \overline{\chi}(F_s)$ для одной из компонент связности графа F и $\alpha(F_i) = d(F_i) = \overline{\chi}(F_i)$ для всех остальных.

Рассмотрим произвольную компоненту связности F_i графа F , для которой выполняется $\alpha(F_i) = d(F_i) = \overline{\chi}(F_i)$. Никакая вершина F_i не может быть $\overline{\chi}$ -критической и d -нейтральной, поскольку $d(G) \leq \overline{\chi}(G)$.

С другой стороны, по лемме 2 каждая вершина F_i может быть α -критической, только если F_i состоит из одной вершины. Но в таком случае эта вершина будет α -, d - и $\overline{\chi}$ -критической одновременно.

Таким образом, согласно пункту 1 граф F не может быть критическим для свойства P .

Лемма 5. Если для графа H выполняются свойства

1) любая вершина графа H является d -нейтральной и при этом $\overline{\chi}$ - или α -критической;

2) $\alpha(H) = d(H) = \overline{\chi}(H) - 1$,

то он является критическим для свойства $P(G) = (\alpha(G) = d(G) \ \& \ \alpha(G) < \overline{\chi}(G))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из пункта 2 условий следует, что $P(H)$ — истина. При удалении же любой вершины v мы получим один из двух случаев:

а) вершина v является d -нейтральной и α -критической; тогда $\alpha(H-v) < d(H-v)$;

б) вершина v является d -нейтральной и $\overline{\chi}$ -критической; тогда $d(H-v) = \overline{\chi}(H-v)$.

В любом случае условие P не будет выполняться для графа $H-v$. Следовательно, H является критическим графом для условия P .

Теорема 5. Граф H является критическим для свойства $(\alpha(G) = d(G) \ \& \ \alpha(G) < \overline{\chi}(G))$ тогда и только тогда, когда выполняются два свойства:

1) любая вершина графа H является d -нейтральной и при этом $\overline{\chi}$ - или α -критической;

2) $\alpha(H) = d(H) = \overline{\chi}(H) - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Истинность утверждения непосредственно следует из лемм 4 и 5.

Теорема 6. Если у графа G нет порожденного подграфа H , для которого бы выполнялись свойства

1) любая вершина графа H является d -нейтральной и при этом $\overline{\chi}$ - или α -критической;

2) $\alpha(H) = d(H) = \overline{\chi}(H) - 1$,

то равенство $\alpha(G) = d(G)$ влечет $\alpha(G) = \overline{\chi}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного графа G равенство $\alpha(G) = d(G)$ влечет $\alpha(G) = \overline{\chi}(G)$ тогда и только тогда, когда не выполняется свойство $P(G) = (\alpha(G) = d(G) \ \& \ \alpha(G) < \overline{\chi}(G))$.

Согласно теореме 5, если у графа G нет подграфа H , обладающего свойствами 1 и 2, то у G нет подграфа, критического для P , а из этого по лемме 3 следует, что и для самого G условие P не выполняется. Что и требовалось доказать.

Можно заметить, что теорема 6 является усилением теоремы 4 из [16], поскольку сужается класс исключаемых графов.

4. Пример критического графа Γ . Ниже рассмотрены некоторые свойства наименьшего известного на данный момент графа, для которого выполняется $\alpha(\Gamma) = d(\Gamma) < \overline{\chi}(\Gamma)$ [14]. Этот граф изображен на рисунке. Известно, что

$$\alpha(\Gamma) = d(\Gamma) = 3 \text{ и } \overline{\chi}(\Gamma) = 4. \quad (8)$$

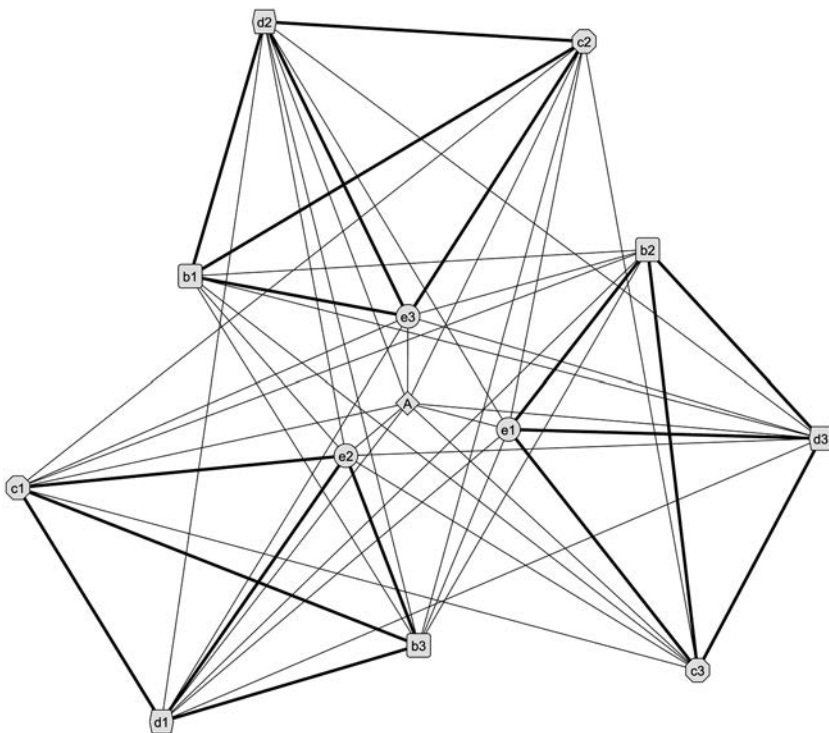
Лемма 6. Для любой вершины v графа Γ верно, что

1) v является α - и d -нейтральной;

2) v является $\overline{\chi}$ -критической.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение легко доказывается непосредственной проверкой.

1. Всего у графа Γ четыре наибольших независимых множества: $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{e_1, c_1, b_1\}$, $\{e_2, c_2, b_2\}$, $\{e_3, c_3, b_3\}$, то есть ни одна вершина не лежит во всех наибольших независимых множествах, а значит не является α -критической. Поскольку $\alpha(\Gamma) = d(\Gamma)$ и $\alpha(G) \leq d(G)$ для любых G , ни одна вершина не может быть и d -критической.



Граф Γ : клики при удалении вершины a .

2. Кликовое покрытие размера 3 графа Γ после удаления вершины a порождается подмножествами $\{b_1, c_2, d_2, e_3\}$, $\{b_2, c_3, d_3, e_1\}$, $\{b_3, c_1, d_1, e_2\}$ (см. рисунок):

для графа $(\Gamma - b_1)$ — подмножествами $\{a, c_1, c_3, e_2\}$, $\{b_2, d_1, d_3, e_3\}$, $\{b_3, c_2, d_2, e_1\}$;

для графа $(\Gamma - c_1)$ — подмножествами $\{a, c_2, c_3, e_1\}$, $\{b_1, b_2, d_3, e_3\}$, $\{b_3, d_1, d_2, e_2\}$;

для графа $(\Gamma - d_1)$ — подмножествами $\{a, c_1, c_2, e_3\}$, $\{b_1, b_3, d_2, e_2\}$, $\{b_2, c_3, d_3, e_1\}$;

для графа $(\Gamma - e_1)$ — подмножествами $\{a, c_1, c_2, c_3\}$, $\{b_1, b_2, d_3, e_3\}$, $\{b_3, d_1, d_2, e_2\}$;

и т. д.

Из леммы 6 и равенств (8) по теореме 5 следует, что граф Γ является критическим для свойства $P(G) = (\alpha(G) = d(G) \ \& \ \alpha(G) < \overline{\chi}(G))$. При этом вполне разумно предположить, что он является наименьшим критическим графом для этого свойства. В пользу этого предположения говорит то, что $\alpha(\Gamma) = 3$, что является наименьшим значением числа вершинной независимости по лемме 4, а также следующая лемма.

Лемма 7. У графа Γ нет порожденного подграфа G (не считая самого Γ), для которого бы выполнялось $\alpha(G) = d(G) < \overline{\chi}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку любая вершина Γ является $\overline{\chi}$ -критической, для любого его подграфа $G \neq \Gamma$ верно $\overline{\chi}(G) \leq 3$. Значит, если предположить, что $\alpha(G) = d(G)$ и $\alpha(G) < \overline{\chi}(G)$, получим $\alpha(G) \leq 2$. Но, согласно лемме 4, у наименьшего графа со свойством $(\alpha(G) = d(G) \ \& \ \alpha(G) < \overline{\chi}(G))$ должно быть $\alpha(G) \geq 3$.

Теперь можно привести пример, показывающий, что результат леммы 3 нельзя обратить; то есть, наличие у графа G подграфа, критического для свойства $P(H) = (\alpha(H) = d(H) \ \& \ \alpha(H) < \overline{\chi}(H))$ не влечет выполнение данного свойства для самого графа G .

Легко построить пример. Добавим к графу Γ новую вершину x , связанную ребром только с одной вершиной, например a . Полученный граф назовем G . Тогда $\alpha(G) = 4$, так как $\{e_1, e_2, e_3, x\}$ — независимое множество, и $\overline{\chi}(G) = 4$, так как $\Gamma - a$ покрывается 3 кликами, а пара $\{a, x\}$ соединена ребром (то есть покрывается кликой K_2).

Таким образом, видно, что у графа G есть критический подграф Γ , но при этом $\alpha(G) = d(G) = \overline{\chi}(G)$.

Из приведенного примера следует, что и условия теоремы 6 нельзя обратить и, несмотря на усиление по сравнению с результатом из [16], все еще исключаются лишние графы. Тем не менее, представляется маловероятным, что условия теоремы 6 удастся еще усилить, так как каждый исключаемый по условиям этой теоремы граф гарантировано содержит подграф, для которого утверждение теоремы не выполняется. Значит, в терминах исключаемых подструктур формулировка теоремы представляет самые жесткие условия.

5. Результаты. В работе рассмотрены графы, критические для условия $(\alpha(G) = d(G) \& \alpha(G) < \overline{\chi}(G))$. В теореме 5 доказаны необходимые и достаточные условия того, что граф является критическим в указанном смысле.

На основе доказанного критерия в качестве исключаемой структуры сформулирована теорема 6, в которой усилен известный ранее результат теоремы 3 (см. [13]) и теоремы 4 (см. [16]). Также в работе приведен пример графа, критического для условия $(\alpha(G) = d(G) \& \alpha(G) < \overline{\chi}(G))$, и рассмотрены некоторые его свойства.

Литература

1. AIM Minimum Rank—Special Graphs Work Group: *Barioli F., Barrett W., Butler S., Cioabă S. M., Cvetković D., Fallat S. M., Godsil C., Haemers W., Hogben L., Mikkelson R., Narayan S., Pryporova O., Sciriha I., So W., Stevanović D., van der Holst H., Meulen K. V., Wehe A. W.* Zero forcing sets and the minimum rank of graphs // *Linear Algebra Appl.* 2008. Vol. 428. P. 1628–1648.
2. *Berman A., Friedland S., Hogben L., Rothblum U. G., Shader B.* Minimum Rank of Matrices Described by a Graph or Pattern over the Rational, Real and Complex Numbers // *Electron. J. Combinat.* 2008. Vol. 15, R25. 19 p.
3. *Liang-Hao Huang, Gerard J. Chang, Hong-Gwa Yeh.* On minimum rank and zero forcing sets of a graph // *Linear Algebra Appl.* 2010. Vol. 432. P. 2961–2973.
4. *Liang-Hao Huang, Gerard J. Chang, Hong-Gwa Yeh.* A note on universally optimal matrices and field independence of the minimum rank of a graph // *Linear Algebra Appl.* 2010. Vol. 433. P. 585–594.
5. *Fallat S. M., Hogben L.* The minimum rank of symmetric matrices described by a graph: a survey // *Linear Algebra Appl.* 2007. Vol. 426. P. 558–582.
6. *Hogben L.* Minimum rank problems // *Linear Algebra Appl.* 2010. Vol. 432. P. 1961–1974.
7. *Добрынин В. Ю.* О классификации графов, основанной на минимальном ранге матрицы, ассоциированной с графом // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления.* 2004. Вып. 3. С. 30–38.
8. *Lovász L.* On the Shannon capacity of graphs // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1979. Vol. 25. P. 1–7.
9. *Jethava V., Martinsson A., Bhattacharyya C., Dubhashi D. P.* The Lovasz ϑ function, SVMs and finding large dense subgraphs // *Advances in Neural Information Processing Systems.* 2012. Vol. 25. P. 1169–1177.
10. *Duan R., Severini S., Winter A.* Zero-Error Communication via Quantum Channels, Noncommutative Graphs, and a Quantum Lovász Number // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 2013. Vol. 59. P. 1164–1174.
11. *Goemans M. X.* Semidefinite programming in combinatorial optimization // *Math. Program.* 1997. Vol. 79. P. 143–161.

12. Dobrynin V. Yu. On the function “sandwiched” between $\alpha(G)$ and $\overline{\chi}(G)$ // Electron. J. Combinat. 1997. Vol. 4, R19. 3 p.
13. Dobrynin V., Pliskin M., Prosolupov E. On the functions with values from $[\alpha(G), \overline{\chi}(G)]$ // Electron. J. Combinat. 2004. Vol. 11, N5. 5 p.
14. Проколунов Е. В. О разрыве между минимальной размерностью ортонормального помечивания и размером наименьшего кликового покрытия графа // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2004. Вып. 4. С. 51–57.
15. Dobrynin V. On the rank of a matrix associated with graph // Discrete Mathematics. 2004. Vol. 276, 1-3. P. 169–175.
16. Проколунов Е. В. О достаточных условиях равенства числа вершинной независимости и минимального размера кликового покрытия для одного класса графов // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2014. Вып. 1. С. 90–103.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

Сведения об авторе

Проколунов Евгений Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент;
e.prosolupov@spbu.ru

ABOUT GRAPHS CRITICAL FOR THE CONDITION FOR THE SMALLEST DIMENSION OF ORTHONORMAL LABELING

Evgenii V. Prosolupov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation;
e.prosolupov@spbu.ru

The concept of graph critical for condition that independence number is equal to smallest dimension of orthonormal labeling and strictly less then clique cover number was considered. Necessary and sufficient conditions for graph to be critical in this sense were found. Based on the results sufficient condition for equality of the independence number and the smallest dimension of orthonormal labeling of graph to imply equality of the independence number and the clique cover number was improved. Refs 16. Figs 1.

Keywords: graph, critical graph, orthonormal labeling, rank, minimal rank, symmetric matrices, clique, independent set, clique cover number, independence number, smallest dimension of orthonormal labeling.

References

1. AIM Minimum Rank—Special Graphs Work Group: Barioli F., Barrett W., Butler S., Cioabă S. M., Cvetković D., Fallat S. M., Godsil C., Haemers W., Hogben L., Mikkelsen R., Narayan S., Pryporova O., Sciriha I., So W., Stevanović D., van der Holst H., Meulen K. V., Wehe A. W., “Zero forcing sets and the minimum rank of graphs”, *Linear Algebra Appl.* **428**, 1628–1648 (2008).
2. Berman A., Friedland S., Hogben L., Rothblum U. G., Shader B., “Minimum Rank of Matrices Described by a Graph or Pattern over the Rational, Real and Complex Numbers”, *Electron. J. Combinat.* **15**(R25). 19 p. (2008)
3. Liang-Hao Huang, Gerard J. Chang, Hong-Gwa Yeh., “On minimum rank and zero forcing sets of a graph”, *Linear Algebra Appl.* **432**, 2961–2973 (2010).
4. Liang-Hao Huang, Gerard J. Chang, Hong-Gwa Yeh., “A note on universally optimal matrices and field independence of the minimum rank of a graph”, *Linear Algebra Appl.* **433**, 585–594 (2010).
5. Fallat S. M., Hogben L., “The minimum rank of symmetric matrices described by a graph: a survey”, *Linear Algebra Appl.* **426**, 558–582 (2007).
6. Hogben L., “Minimum rank problems”, *Linear Algebra Appl.* **432**, 1961–1974 (2010).
7. Dobrynin V. Ju., “On graph classification based on a minimum rank of a matrix associated with a graph”, *Vestn. S.-Peterb. un-ta, ser. 10: Prikladnaja matematika, informatika, processy upravlenija* Issue 3, 30–38 (2004).
8. Lovász L., “On the Shannon capacity of graphs”, *IEEE Trans. Inform. Theory* **25**, 1–7 (1979).
9. Jethava V., Martinsson A., Bhattacharyya C., Dubhashi D. P., “The Lovasz ϑ function, SVMs and finding large dense subgraphs”, *Advances in Neural Information Processing Systems* **25**, 1169–1177 (2012).

10. Duan R., Severini S., Winter A., "Zero-Error Communication via Quantum Channels, Noncommutative Graphs, and a Quantum Lovász Number", *IEEE Trans. Inform. Theory.* **59**, 1164–1174 (2013).
11. Goemans M. X., "Semidefinite programming in combinatorial optimization", *Math. Program.* **79**, 143–161 (1997).
12. Dobrynin V. Yu., "On the function "sandwiched" between $\alpha(G)$ and $\overline{\chi}(G)$ ", *Electron. J. Combinat.* **4**(R19), 3 p. (1997).
13. Dobrynin V., Pliskin M., Prosolupov E., "On the functions with values from $[\alpha(G), \overline{\chi}(G)]$ " *Electron. J. Combinat.* **11**(5), 5 p. (2004).
14. Prosolupov E. V., "About the gap between the minimal dimension of the orthonormal labeling and size of smallest clique covering of a graph", *Vestn. S.-Peterb. un-ta, ser. 1: Mathematics*, Issue 4, 51–57 (2004).
15. Dobrynin V., "On the rank of a matrix associated with graph", *Discrete Mathematics.* **276**(1-3), 169–175 (2004).
16. Prosolupov E. V., "On sufficient conditions for equality of the independence number and the clique cover number for a class of graphs", *Vestn. S.-Peterb. un-ta, ser. 10: Prikladnaja matematika, informatika, processy upravlenija* Issue 1, 90–103 (2014).