УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 3

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОБЪЕДИНЕНИЙ СОБЫТИЙ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ЛЕММЕ БОРЕЛЯ—КАНТЕЛЛИ

А. Н. Фролов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Получены новые оценки сверху и снизу вероятностей объединений событий. Доказанные неравенства точны и могут обращаться в равенства. Они позволяют получить новые варианты обеих частей леммы Бореля—Кантелли. Результаты остаются справедливыми для пространств с мерой не обязательно являющихся вероятностными. Библиогр. 18 назв.

Ключевые слова: неравенства Бонферрони, вероятности объединения событий, лемма Бореля—Кантелли.

1. Введение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство и $A_1, A_2, \ldots, A_N$ — события, $N \geqslant 2$. Положим $U = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_N$.

Оценки сверху и снизу для $\mathbf{P}(U)$ играют важную роль в теории вероятностей и различных ее приложениях. Отысканию таких оценок посвящено значительное число работ, в которых использованы разнообразные методы их получения. Один из таких методов был предложен автором в статьях [1–3]. В настоящей работе мы получим новые неравенства для вероятности $\mathbf{P}(U)$, комбинируя наш метод из [3] с представлением рассматриваемой вероятности в виде суммы вероятностей некоторых событий с весами.

Пусть m — фиксированное натуральное число такое, что $m \leqslant N$. Пусть B_i — событие, состоящее в том, что происходит ровно i событий из $A_1, A_2, \ldots, A_N$, где $0 \leqslant i \leqslant N$. Мы покажем, что выполняется соотношение

$$\mathbf{P}(U) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j_1=1}^{N} \ldots \sum_{j_m=1}^{N} \frac{1}{i^m} \mathbf{P}(B_i A_{j_1} \ldots A_{j_m}).$$

Тогда

$$\mathbf{P}(U) = \sum_{j_1=1}^{N} \ldots \sum_{j_m=1}^{N} R(j_1, \ldots, j_m), \quad \text{где} \quad R(j_1, \ldots, j_m) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i^m} \mathbf{P}(B_i A_{j_1} \ldots A_{j_m}).$$

Оценив каждое $R(j_1, \ldots, j_m)$ сверху или снизу с помощью результатов из [3], мы придем к оценке для вероятности объединения событий. При этом и верхние и нижние оценки будут точными. То есть можно подобрать события $A_1, A_2, \ldots, A_N$ так, что неравенства обратятся в равенства. Мы выпишем неравенства, основанные на степенных моментах сумм индикаторов некоторых событий. Порядки использованных моментов, вообще говоря, не будут целыми. Кроме того, этим же методом возможно получение неравенств, опирающихся на нестепенные моменты (например, логарифмические). Подчеркнем, что нормированность меры и даже ее конечность не существенны. Соответствующие оценки справедливы для произвольных пространств с мерой. Доказанные неравенства позволяют получать новые варианты обеих частей леммы Бореля—Кантелли. Здесь также возможны обобщения на произвольные пространства с мерой.

2. Оценивание вероятностей объединений. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $A_1, A_2, \ldots, A_N$ — события, $N \geqslant 2$. Положим

$$U = \bigcup_{i=1}^{N} A_i, \quad \xi = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{I}_{A_i},$$

где $\mathbb{I}_B$ обозначает индикатор события B.

Неравенства для вероятностей $\mathbf{P}(U)$ играют важную роль в теории вероятностей и ее приложениях. Такие неравенства и методы их получения можно найти в работах Чжуна и Эрдёша [4], Галло [5], Доусона и Санкова [6], Куниаса [7], Кверела [8, 9], Галамбоша [10], Мори и Секея [11], Бороша и Прекопы [12], Зубкова [13], Галамбоша и Симонелли [14], де Кайена [15], Куаи, Алаяджи и Такахары [16], Петрова [17], Прекопы [18] (см. также библиографию в этих работах). Эти методы дают оценки $\mathbf{P}(U)$ в терминах моментов случайной величины ξ. В работах [1–3] автор предложил свой метод получения таких неравенств. При этом были использованы моменты ξ произвольного нецелого порядка. Их применение дает более точные, но и более сложные неравенства. Например, известное неравенство Чжуна—Эрдёша, построенное на первом и втором моментах ξ, просто и удобно в использовании. Однако, опираясь на моменты порядков 1 и 1.5, можно получить более точные неравенства. Наш метод позволяет также оценивать $\mathbf{P}(U)$, используя нестепенные моменты ξ.

В этом параграфе мы построим оценки вероятности U снизу и сверху в терминах сумм моментов случайных величин $\xi \mathbb{I}_{A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_m}}$, где $1 \leqslant j_k \leqslant N$ для всех $1 \leqslant k \leqslant m$, а $m \geqslant 2$ — фиксированное натуральное число.

Для этого нам потребуется следующий результат.

Лемма 1. *Пусть B_i — событие, состоящее в том, что происходит ровно i событий из $A_1, A_2, \ldots, A_N$, где $0 \leqslant i \leqslant N$. Пусть m — фиксированное натуральное число такое, что $m \leqslant N$. Положим $p_{i,j_1,\ldots,j_m} = \mathbf{P}(B_i A_{j_1} \ldots A_{j_m})$ для любых $j_1, \ldots, j_m$ таких, что $1 \leqslant j_k \leqslant N$ для всех $1 \leqslant k \leqslant m$.*

Тогда

$$\mathbf{P}(U) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j_1=1}^{N} \ldots \sum_{j_m=1}^{N} \frac{1}{i^m} p_{i,j_1,\ldots,j_m}. \tag{1}$$

Доказательство. Мы имеем

$$\mathbb{I}_U = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{I}_{B_i} \quad \text{и} \quad \xi \mathbb{I}_{B_i} = i\, \mathbb{I}_{B_i} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant i \leqslant N.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(U) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbb{I}_{B_i}\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{N} i^{-m}\, \mathbb{I}_{B_i} \xi^m\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j_1=1}^{N} \ldots \sum_{j_m=1}^{N} i^{-m}\, \mathbb{I}_{B_i} \mathbb{I}_{A_{j_1}} \ldots \mathbb{I}_{A_{j_m}}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j_1=1}^{N} \ldots \sum_{j_m=1}^{N} i^{-m}\, \mathbf{E}\left(\mathbb{I}_{B_i A_{j_1} \ldots A_{j_m}}\right) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j_1=1}^{N} \ldots \sum_{j_m=1}^{N} \frac{1}{i^m} p_{i,j_1,\ldots,j_m}.$$

Соотношение (1) доказано. □

При $m = 1$ соотношение (1) получено в работе Куаи, Алаяджи и Такахары [16] другим способом.

Пусть a и ϱ — положительные вещественные числа, а ℓ — натуральное число такое, что $2 \leqslant \ell \leqslant N$. Для всех возможных наборов $j_1, \ldots, j_m$ положим $j = (j_1, \ldots, j_m)$,

$$\bar{s}_k(j) = \bar{s}_k(j_1, \ldots, j_m) = \sum_{i=1}^{N} i^{a+(k-1)\varrho-m} p_{i,j_1,\ldots,j_m}, \tag{2}$$

$$s_k(j) = s_k(j_1, \ldots, j_m) = \sum_{i=1}^{N} i^{k-1} p_{i,j_1,\ldots,j_m} \tag{3}$$

для всех $1 \leqslant k \leqslant \ell$. Из величин $\bar{s}_k(j)$ при $a = m$ и $\varrho = 1$ получаются величины $s_k(j)$, имеющие достаточно простой смысл. Действительно, учитывая равенство $p_{i,j_1,\ldots,j_m} = \mathbf{E}\mathbb{I}_{B_i A_{j_1} \ldots A_{j_m}}$, мы имеем

$$s_1(j) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbb{I}_{B_i} \mathbb{I}_{A_{j_1} \ldots A_{j_m}}\right) = \mathbf{E}\mathbb{I}_U \mathbb{I}_{A_{j_1} \ldots A_{j_m}} = \mathbf{P}(A_{j_1} \ldots A_{j_m}),$$

$$s_2(j) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{N} i\, \mathbb{I}_{B_i} \mathbb{I}_{A_{j_1} \ldots A_{j_m}}\right) = \mathbf{E}\xi \mathbb{I}_U \mathbb{I}_{A_{j_1} \ldots A_{j_m}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(A_i A_{j_1} \ldots A_{j_m}),$$

$$s_3(j) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{N} i^2\, \mathbb{I}_{A_{j_1} \ldots A_{j_m}}\right) = \mathbf{E}\xi^2 \mathbb{I}_U \mathbb{I}_{A_{j_1} \ldots A_{j_m}} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(A_k A_j A_{j_1} \ldots A_{j_m}), \ldots$$

Таким образом, $s_k(j_1, \ldots, j_m)$ — момент порядка $k-1$ случайной величины $\xi \mathbb{I}_{A_{j_1} \ldots A_{j_m}}$. (Мы считаем, что $0^0 = 0$ и, поэтому, $\mathbb{I}_B^0 = \mathbb{I}_B$ для любого события B.) Аналогично, при $a \geqslant m$ величина $\bar{s}_k(j_1, \ldots, j_m)$ будет моментом порядка $(a + (k-1)\varrho - m)$ той же случайной величины. В этом случае порядок может быть нецелым.

Для всех возможных $j_1, \ldots, j_m$ положим

$$R(j) = R(j_1, \ldots, j_m) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i^m} p_{i,j_1,\ldots,j_m}.$$

Суммы $R(j)$ мы оценим сверху и снизу, используя результаты нашей работы [3]. В этой работе представлен метод оценивания таких сумм для любого числа моментов ℓ, но мы рассмотрим наиболее простые и интересные случаи $\ell = 2$ и $\ell = 3$.

Пусть $\ell = 2$. В этом случае для оценивания сумм $R(j)$ будут использованы только моменты $\bar{s}_1(j)$ и $\bar{s}_2(j)$. Для всех $j_1, \ldots, j_m$ определим величины

$$\bar{\delta}(j) = \bar{\delta}(j_1, \ldots, j_m) = \left(\frac{\bar{s}_2(j)}{\bar{s}_1(j)}\right)^{1/\varrho}, \quad \theta(j) = \theta(j_1, \ldots, j_m) = \bar{\delta}(j) - [\bar{\delta}(j)],$$

$$\bar{\theta}(j) = \bar{\theta}(j_1, \ldots, j_m) = \frac{\bar{\delta}^{\varrho}(j) - (\bar{\delta}(j) - \theta(j))^{\rho}}{(\bar{\delta}(j) + 1 - \theta(j))^{\varrho} - (\bar{\delta}(j) - \theta(j))^{\rho}} \in [0, 1),$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа в скобках. Мы также считаем, что $0/0 = 0$.

По теореме 2 из работы [3]

$$R(j) \geqslant \underline{R}(j) = \frac{\bar{\theta}(j) \bar{s}_1^{(a+\varrho)/\varrho}(j)}{\left(\bar{s}_2^{1/\varrho}(j) + (1 - \theta(j)) \bar{s}_1^{1/\varrho}(j)\right)^a} + \frac{(1 - \bar{\theta}(j)) \bar{s}_1^{(a+\varrho)/\varrho}(j)}{\left(\bar{s}_2^{1/\varrho}(j) - \theta(j) \bar{s}_1^{1/\varrho}(j)\right)^a}. \tag{4}$$

При $a = m$ и $\varrho = 1$ мы имеем

$$\underline{R}(j) = \frac{\theta(j)s_1^{a+1}(j)}{\Big(s_2(j) + (1-\theta(j))s_1(j)\Big)^a} + \frac{(1-\theta(j))s_1^{a+1}(j)}{\Big(s_2(j) - \theta(j)s_1(j)\Big)^a}.$$

Это приводит нас к следующему результату.

Теорема 1. *Выполняется неравенство*

$$\mathbf{P}(U) \geqslant \sum_{j_1=1}^{N} \dots \sum_{j_m=1}^{N} \underline{R}(j_1, \dots, j_m),$$

где $\underline{R}(j_1, \dots, j_m) = \underline{R}(j)$ *определены в соотношении (4).*

При $m = 1$ теорема 1 превращается в теорему 6 из работы автора [3], обобщающую результаты из [15] и [16].

Используя следствия 2 и 3 из [3], можно получить неравенства с более простыми правыми частями. Эти неравенства будут, естественно, менее точными, хотя и они могут обращаться в равенства. Например, по следствию 3 мы получим

$$\underline{R}(j) \geqslant \frac{s_1^2(j)}{s_2(j)}.$$

Отметим, что последнее неравенство представляет собой аналог неравенства Чжуна—Эрдёша.

Перейдем к оценке сверху. По теореме 3 из [3] мы получим

$$R(j) \leqslant \overline{R}(j) = \frac{N^{a+\varrho} - 1}{N^{a+\varrho} - N^a}\bar{s}_1(j) - \frac{N^a - 1}{N^{a+\varrho} - N^a}\bar{s}_2(j). \tag{5}$$

При $a = m$ и $\varrho = 1$ мы имеем

$$\overline{R}(j) = \frac{N^{a+1} - 1}{N^{a+1} - N^a}s_1(j) - \frac{N^a - 1}{N^{a+1} - N^a}s_2(j).$$

Это дает нам следующий результат.

Теорема 2. *Выполняется неравенство*

$$\mathbf{P}(U) \leqslant \sum_{j_1=1}^{N} \dots \sum_{j_m=1}^{N} \overline{R}(j_1, \dots, j_m),$$

где $\underline{R}(j_1, \dots, j_m) = \underline{R}(j)$ *определены в соотношении (5).*

Перейдем к случаю $\ell = 3$, в котором для оценки сумм $R(j)$ используются $\bar{s}_1(j)$, $\bar{s}_2(j)$ и $\bar{s}_3(j)$. Для всех $j_1, \dots, j_m$ положим

$$\bar{\delta}_1(j) = \bar{\delta}_1(j_1, \dots, j_m) = N^\varrho \bar{s}_1(j) - \bar{s}_2(j), \quad \bar{\delta}_2(j) = \bar{\delta}_2(j_1, \dots, j_m) = N^\varrho \bar{s}_2(j) - \bar{s}_3(j),$$

$$\bar{\delta}(j) = \bar{\delta}(j_1, \dots, j_m) = \left(\frac{\bar{\delta}_2(j)}{\bar{\delta}_1(j)}\right)^{1/\varrho}, \quad \theta(j) = \theta(j_1, \dots, j_m) = \bar{\delta}(j) - [\bar{\delta}(j)],$$

$$\bar{\theta}(j) = \bar{\theta}(j_1, \dots, j_m) = \frac{\bar{\delta}^\varrho(j) - (\bar{\delta}(j) - \theta(j))^\rho}{(\bar{\delta}(j) + 1 - \theta(j))^\varrho - (\bar{\delta}(j) - \theta(j))^\rho} \in [0, 1).$$

Отметим, что $\bar\theta(j)$ и $\theta(j)$ определяются через $\bar\delta(j)$ и в случае $\ell = 2$, и в случае $\ell = 3$ одинаково, но $\bar\delta(j)$ различны.

По теореме 4 из статьи [3] имеет место неравенство $R(j) \geqslant \underline{R}'(j)$, где

$$\underline{R}'(j) = \frac{\bar\delta_1(j)(1-\bar\theta(j))(N^a - (\bar\delta(j)-\theta(j))^a)}{N^a(\bar\delta(j)-\theta(j))^a(N^\varrho - (\bar\delta(j)-\theta(j))^\varrho)} + \\ + \frac{\bar\delta_1(j)\bar\theta(j)(N^a - (\bar\delta(j)-\theta(j)+1)^a)}{N^a(\bar\delta(j)-\theta(j)+1)^a(N^\varrho - (\bar\delta(j)-\theta(j)+1)^\varrho)} + \frac{\bar s_1(j)}{N^a}. \quad (6)$$

Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Выполняется неравенство*

$$\mathbf{P}(U) \geqslant \sum_{j_1=1}^{N} \cdots \sum_{j_m=1}^{N} \underline{R}'(j_1,\ldots,j_m),$$

где $\underline{R}'(j_1,\ldots,j_m) = \underline{R}'(j)$ *определены соотношением (6).*

При $m = 1$ теорема 3 совпадает с теоремой 7 из работы автора [3]. Используя следствия 5 и 6 из последней статьи, можно получить более простые неравенства.

Найдем теперь оценку сверху для $\mathbf{P}(U)$. Для всех $j_1,\ldots,j_m$ положим

$$\bar\delta_1(j) = \bar\delta_1(j_1,\ldots,j_m) = \bar s_2(j) - \bar s_1(j), \quad \bar\delta_2(j) = \bar\delta_2(j_1,\ldots,j_m) = \bar s_3(j) - \bar s_2(j),$$

$$\bar\delta(j) = \bar\delta(j_1,\ldots,j_m) = \left(\frac{\bar\delta_2(j)}{\bar\delta_1(j)}\right)^{1/\varrho}, \quad \theta(j) = \theta(j_1,\ldots,j_m) = \bar\delta(j) - [\bar\delta(j)],$$

$$\bar\theta(j) = \bar\theta(j_1,\ldots,j_m) = \frac{\bar\delta^\varrho(j) - (\bar\delta(j)-\theta(j))^\rho}{(\bar\delta(j)+1-\theta(j))^\varrho - (\bar\delta(j)-\theta(j))^\rho} \in [0,1).$$

Отметим, что $\bar\theta(j)$ и $\theta(j)$ определяются через $\bar\delta(j)$ для оценок снизу и сверху одинаково, но $\bar\delta(j)$ различны. Кроме того, для верхних и нижних оценок различны также $\bar\delta_1(j)$ и $\bar\delta_2(j)$.

По теореме 5 из [3] мы получим $R(j) \leqslant \overline{R}'(j)$, где

$$\overline{R}'(j) = \bar s_1(j) - \frac{\bar\delta_1(j)(1-\bar\theta(j))((\bar\delta(j)-\theta(j))^a-1)}{(\bar\delta(j)-\theta(j))^a((\bar\delta(j)-\theta(j))^\varrho-1)} - \frac{\bar\delta_1(j)\bar\theta(j)((\bar\delta(j)-\theta(j)+1)^a-1)}{(\bar\delta(j)-\theta(j)+1)^a((\bar\delta(j)-\theta(j)+1)^\varrho-1)}. \quad (7)$$

Отсюда вытекает следующий результат.

Теорема 4. *Выполняется неравенство*

$$\mathbf{P}(U) \leqslant \sum_{j_1=1}^{N} \cdots \sum_{j_m=1}^{N} \overline{R}'(j_1,\ldots,j_m),$$

где $\underline{R}'(j_1,\ldots,j_m) = \underline{R}'(j)$ *определены соотношением (7).*

Теорема 4 обобщает теорему 8 из [3] на случай $m \geqslant 2$. Здесь также возможно получение более простых неравенств. Для этого нужно воспользоваться следствиями 7 и 8 из [3].

3. Приложения к лемме Бореля—Кантелли. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность событий. Положим

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Всякий вариант леммы Бореля—Кантелли доставляет оценку сверху (первая часть леммы) и снизу (вторая часть леммы) вероятности $\mathbf{P}(\limsup A_n)$. Так как

$$\mathbf{P}(\limsup A_n) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{t} A_k\right),$$

любые новые неравенства для вероятностей объединения дают обобщения леммы Бореля—Кантелли. Оценка снизу позволяет получить новые формулировки второй части леммы Бореля—Кантелли, а оценки сверху — первой части. Теоремы 1–4 оптимальны в том смысле, что для некоторых наборов событий неравенства обращаются в равенства. Поэтому и новые варианты леммы Бореля—Кантелли будут давать точные оценки вероятности $\mathbf{P}(\limsup A_n)$ для некоторых последовательностей событий $\{A_n\}$. Мы не приводим здесь результаты, очевидным образом вытекающие из теорем 1–4. Более сложные варианты леммы Бореля—Кантелли с заменой двух пределов одним можно получить так же, как это сделано в [3]. В работах [1–3] можно найти различные обобщения леммы Бореля—Кантелли и список статей по этой тематике.

Литература

1. *Frolov A. N.* Bounds for probabilities of unions of events and the Borel—Cantelli lemma // Statist. Probab. Lett. 2012. Vol. 82. P. 2189–2197.

2. *Фролов А. Н.* О неравенствах для вероятностей объединений событий и лемме Бореля—Кантелли // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2014. Т. 1(59). Вып. 2. С. 201–210.

3. *Frolov A. N.* 2015. On lower and upper bounds for probabilities of unions and the Borel—Cantelli lemma // Studia Sci. Math. Hungarica. Vol. 52(1). P. 102–108. DOI: 10.1556/SScMath.2015.1304

4. *Chung K. L., Erdős P.* On the application of the Borel—Cantelli lemma // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. Vol. 72. P. 179–186.

5. *Gallot S.* A bound for the maximum of a number of random variables // J. Appl. Probab. 1966. Vol. 3. P. 556–558.

6. *Dawson D. A. Sankoff D.* An inequality for probabilities // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 18. P. 504–507.

7. *Kounias E. G.* Bounds for the probability of a union, with applications // Ann. Math. Statist. 1968. Vol. 39. P. 2154–2158.

8. *Kwerel S. M.* Bounds on the probability of the union and intersection of m events // Adv. Appl. Probab. 1975. Vol. 7. P. 431–448.

9. *Kwerel S. M.* Most stringent bounds on aggregated probabilities of partially specified probability systems // J. Amer. Statist. Assoc. 1975. Vol. 70. P. 472–479.

10. *Galambos J.* Bonferroni inequalities // Ann. Probab. 1977. Vol. 5. P. 577–581.

11. *Móri T. F., Székely G. J.* A note on the background of several Bonferroni—Galambos-type inequalities // J. Appl. Pobab. 1985. Vol. 22. P. 836–843.

12. *Boros E., Prékopa A.* Closed form two-sided bounds for probabilities that at least r and exactly r out of n events occurs // Math. Oper. Research. 1989. Vol. 14. P. 317–342.

13. *Зубков А. М.* Неравенства для распредjеления числа одновременно происходящих событий // Обозрение прикладной и промышл. матем. 1994. Т. 1. С. 638–666.

14. *Galambos J., Simonelli I.* Bonferroni-type inequalities with applications. New York: Springer-Verlag, 1996.

15. *de Caen D.* A lower bound on the probability of a union // Discrete Math. 1997. Vol. 169. P. 217–220.

16. *Kuai H., Alajaji F., Takahara G.* A lower bound on the probability of a finite union of events // Discrete Math. 2000. Vol. 215. P. 147–158.

17. *Петров В. В.* Обобщение неравенства Чжуна—Эрдёша для вероятности объединения событий // Записки научн. семин. ПОМИ. 2007. Т. 396. С. 147–150.

18. *Prékopa A.* Inequalities for discrete higher order convex functions // J. Math. Inequalities. 2009. Vol. 4. P. 485–498.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

С в е д е н и я   о б   а в т о р е

Фролов Андрей Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор;
Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

ON ESTIMATION FOR PROBABILITIES OF UNIONS OF EVENTS WITH APPLICATIONS TO THE BOREL—CANTELLI LEMMA

Andrei N. Frolov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation;
Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

We discuss a method which allow to estimate probabilities of unions of events from above and below. We derive new upper and lower bounds for such probabilities. These bounds are sharp. They are generalizations of the previous ones. They are based on moments of the sums of indicators of the events. The order of these moments may be non-integer. Non-power moments may be applied as well. We discuss applications of our inequalities to generalizations of the first and second parts of the Borel—Cantelli lemma. The method may be applied in arbitrary measurable spaces as well. Refs 18.

Keywords: Bonferroni inequalities, probabilities of unions of events, Borel—Cantelli lemma.

References

1. Frolov A. N., "Bounds for probabilities of unions of events and the Borel—Cantelli lemma", *Statist. Probab. Lett.* **82**, 2189–2197 (2012).

2. Frolov A. N., "On inequalities for probabilities of union of events and the Borel—Cantelli lemma", *Vestnik St.Petersburg State Univ.* **2(59)**, 201–210 (2014).

3. Frolov A. N., "On lower and upper bounds for probabilities of unions and the Borel—Cantelli lemma", *Studia Sci. Math. Hugar.* **52**(1), 102–108 (2015).

4. Chung K. L., Erdős P., "On the application of the Borel—Cantelli lemma", *Trans. Amer. Math. Soc.* **72**, 179–186 (1952).

5. Gallot S., "A bound for the maximum of a number of random variables", *J. Appl. Probab.* **3**, 556–558 (1966).

6. Dawson D. A., Sankoff D., "An inequality for probabilities", *Proc. Amer. Math. Soc.* **18**, 504–507 (1967).

7. Kounias E. G., "Bounds for the probability of a union, with applications", *Ann. Math. Statist.* **39**, 2154–2158 (1968).

8. Kwerel S. M., "Bounds on the probability of the union and intersection of m events", *Adv. Appl. Probab.* **7**, 431–448 (1975).

9. Kwerel S. M., "Most stringent bounds on aggregated probabilities of partially specified probability systems", *J. Amer. Statist. Assoc.* **70**, 472–479 (1975).

10. Galambos J., "Bonferroni inequalities", *Ann. Probab.* **5**, 577–581 (1977).

11. Móri T. F., Székely G. J., "A note on the background of several Bonferroni—Galambos-type inequalities", *J. Appl. Pobab.* **22**, 836–843 (1985).

12. Boros E., Prékopa A., "Closed form two-sided bounds for probabilities that at least r and exactly r out of n events occurs", *Math. Oper. Research.* **14**, 317–342 (1989).

13. Zubkov A. M., "Inequalities for the distribution of the number of simultaneously occuring events", *Obozrenie Prikladnoi i promyshlennoi metematiki* **1**, 638–666.

14. Galambos J., Simonelli I., "Bonferroni-type inequalities with applications" (Springer-Verlag, New York, 1996).

15. de Caen D., "A lower bound on the probability of a union", *Discrete Math.* **169**, 217–220 (1997).

16. Kuai H., Alajaji F., Takahara G., "A lower bound on the probability of a finite union of events", *Discrete Math.* **215**, 147–158 (2000).

17. Petrov V. V., "A generalization of the Chung—Erdos inequality for a probability of union of events", *Zapiski nauchnyh seminarov POMI* **396**, 147–150.

18. Prékopa A., "Inequalities for discrete higher order convex functions", *J. Math. Inequalities* **4**, 485–498 (2009).