

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ*

С. М. Бауэр, А. Л. Смирнов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

В статье рассматривается задача о деформации упругого трансверсально-изотропного цилиндрического слоя под действием нормального давления в трехмерной постановке. Получены асимптотические формулы, описывающие поведение слоя, у которого жесткость в трансверсальном направлении много меньше, чем в тангенциальном. Проведено сравнение точных и асимптотических решений, исследовано влияние параметров на величину относительного изменения толщины слоя. Библиогр. 5 назв. Ил. 3.

Ключевые слова: цилиндрический слой, задача Ламе, трансверсальная изотропия.

1. Введение и постановка задачи. Задача о деформации тонкого цилиндрического слоя под действием внешнего и внутреннего давлений, как правило, рассматривается в двумерной постановке с использованием уравнений теории оболочек. Однако для решения практических задач следует учитывать эффекты, которые обычно не принимаются во внимание в теориях тонких оболочек, например изменение толщины слоя при деформации. Неизотропность материала слоя создает дополнительные сложности для анализа.

При рассмотрении деформации ортотропного слоя можно использовать трехмерные уравнения теории упругости. Если материал слабо ортотропен, то есть его упругие постоянные в тангенциальной плоскости близки друг к другу, но заметно отличаются от таковых в трансверсальном направлении, уместно использовать асимптотический подход. При этом в нулевом приближении возникает задача о деформации трансверсально-изотропного слоя. Такой подход был использован в статье [1], где в качестве нулевого приближения к решению задачи для ортотропного сферического слоя была рассмотрена задача для трансверсально-изотропного сферического слоя.

В данной работе проводится исследование деформации трансверсально-изотропного цилиндрического слоя с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 ($R_1 < \rho < R_2$), находящегося под действием внутреннего и внешнего давлений P_1 и P_2 соответственно.

Из соображений симметрии, как и в [1], полагаем, что напряжения в слое зависят только от радиальной координаты и перемещения точек происходят только в направлении радиуса $w = w(\rho)$. В этом случае уравнения равновесия приводятся к одному уравнению, которое после перехода к перемещениям принимает вид [2, 3]

$$w_0''(\rho) + \frac{w_0'(\rho)}{\rho} - \frac{E(1-\nu_1)}{E_1(1-\nu)\rho^2} w_0(\rho) = 0, \quad (1)$$

при этом граничные условия таковы:

$$\frac{EE_1\nu_1 w(R_i)}{(E_1 - E_1\nu - 2E\nu_1^2)\rho} + \frac{E_1^2(1-\nu)w'(R_i)}{E_1 - E_1\nu - 2E\nu_1^2} = -P_i, \quad i = 1, 2.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 13-01-00523 А и № 15-01-06311 А). Часть результатов исследования была включена в доклад [5].

Здесь ν, ν_1 — коэффициенты Пуассона и E, E_1 — модули Юнга соответственно в тангенциальном и трансверсальном направлениях. Для трансверсально-изотропного материала ограничения для упругих постоянных приведены в [4]:

$$\nu < 1, \quad \nu_1 < \sqrt{\frac{E_1}{E}} \cdot \min \left(1, \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \right), \quad (2)$$

причем для материалов с $\nu > -1$, то есть для всех известных, $\sqrt{\frac{1-\nu}{2}} < 1$.

2. Изменение толщины цилиндрического слоя. Аналитическое решение уравнения получено в [3]. Используем это решение для исследования поведения относительного изменения толщины цилиндрического слоя вследствие давления на внешней и внутренней поверхностях. После преобразований, выполненных с помощью системы компьютерной алгебры Mathematica, получим выражение для относительного изменения толщины:

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{w(R_2) - w(R_1)}{R_2 - R_1} = \\ &= p_1 \frac{\xi + \kappa}{(\xi - 1)\mu} \left((1 + \nu)\nu_1 \frac{\xi - \kappa}{\xi + \kappa} + \sqrt{1 - \nu^2} \sqrt{\mu - \nu_1^2} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{\mu - \nu_1^2} \ln \xi}{2\mu\sqrt{1 - \nu^2}} \right) \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\xi = R_1/R_2$, $\kappa = P_2/P_1$, $p_1 = P_1/E$, $\mu = E_1/E$. Для биологических мягких тканей, как правило, $E_1 \ll E$, и параметр μ является малым. Для параметра ξ выполняется неравенство $0 < \xi < 1$, а $0 \leq \kappa < \infty$. Заметим, что из условия неотрицательности толщины слоя $h = R_2 + w(R_2) - R_1 - w(R_1) > 0$ следует $\Delta h > -1$, что накладывает ограничения на возможные значения параметров. Дальнейшее упрощение формулы (3) связано с анализом порядков параметров ξ, μ, κ .

Для тонкого слоя $\xi \sim 1$, то есть $\xi = 1 + O(\mu^\alpha)$ ($\alpha > 0$). Если внутреннее и внешнее давления близки по величине, то $\kappa \sim 1$, то есть $\kappa = 1 + O(\mu^\beta)$ ($\beta > 0$). В силу ограничения (2) $\nu_1 = O(\mu^{1/2})$. Таким образом, первое слагаемое в скобках имеет порядок $O(\mu^{\gamma+1/2})$, где $\gamma = \min(\alpha, \beta)$. Аргумент функции th имеет порядок $\mu^{\alpha-1/2}$. При $\alpha > 1/2$ порядок второго слагаемого — μ^α . Следовательно, при $\beta \geq \alpha - 1/2$ главным оказывается второе слагаемое и формула для относительного изменения толщины принимает простой вид

$$\Delta h = p_1 \frac{\xi + \kappa}{\mu} \left(\frac{\mu - \nu_1^2}{2\mu} \right). \quad (4)$$

На рис. 1, а приведена зависимость величины относительного изменения толщины от параметра μ , вычисленной по формулам (4) — красная линия и (3) синяя линия. Значения параметров таковы $p_1 = 0.01$, $\kappa = 0.98$, $\xi = 0.99$, $\nu = 0.4$, $\nu_1 = 0.3\sqrt{\mu}$. При $\mu = 0.01$ это соответствует значениям $\alpha = \beta = 1$.

Если различие в величинах внутреннего и внешнего давлений велико, то первое слагаемое имеет порядок $\nu_1 = O(\mu^{1/2})$, а второе по-прежнему μ^α . При $\alpha > 1/2$ первое слагаемое является главным и формула для относительного изменения толщины слоя приобретает вид

$$\Delta h = p_1 \frac{(\xi - \kappa)(1 + \nu)\nu_1}{(\xi - 1)\mu}. \quad (5)$$

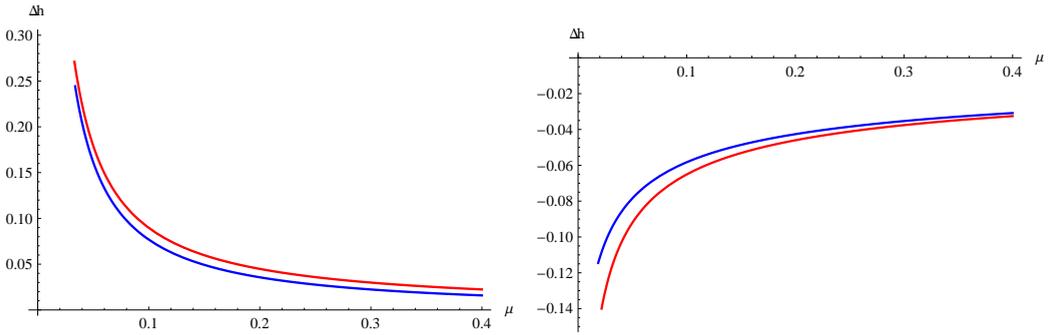


Рис. 1. Зависимость относительного изменения толщины от параметра μ при малой (а) и большой (б) разнице величин внешнего и внутреннего давлений.

На рис. 1, б приведена зависимость величины относительного изменения толщины от параметра μ , вычисленной по формулам (5) — красная линия и (3) — синяя линия. Значения параметров таковы: $p_1 = 0.01$, $\kappa = 0.5$, $\xi = 0.99$, $\nu = 0.4$, $\nu_1 = 0.3\sqrt{\mu}$. При $\mu = 0.01$ это соответствует значению $\alpha = 1$.

С уменьшением ν_1 точность формулы (5) снижается. Заметим, что увеличение внутреннего давления приводит к уменьшению толщины слоя, а внешнего — к его увеличению. При одновременном действии внутреннего и внешнего давлений толщина слоя может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от значения параметров (см. рис. 2). При $\kappa = 0$ $\Delta h < 0$ и условие $\Delta h > -1$ выполняется при $p_1 \ll 1$.

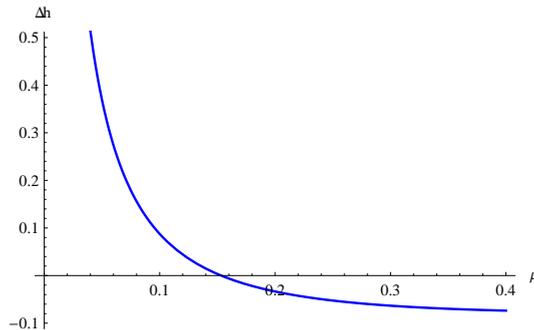


Рис. 2. Зависимость относительного изменения толщины от относительной жесткости слоя при $\nu = 0.4$, $\nu_1 = 0.3\sqrt{\mu}$, $P_1 = 5P_2$, $R_1 = 0.8R_2$.

3. Цилиндрический слой под действием внутреннего давления. В завершение рассмотрим практически важный случай действия только внутреннего давления. При этом $\kappa = 0$ и формула (5) дает хорошее приближение для величины относительного изменения толщины слоя. На рис. 3 представлено сравнение значений изменения относительной толщины, вычисленных по формулам (3) — синяя линия и (5) — красная линия, от относительной жесткости слоя для различных значений коэффициента Пуассона в трансверсальном направлении: сплошные кривые — для $\nu_1 = 0.1\sqrt{\mu}$, штриховые — для $\nu_1 = 0.5\sqrt{\mu}$. В обоих случаях совпадение результатов, полученных по приближенной и точной формулам, вполне удовлетворительное.

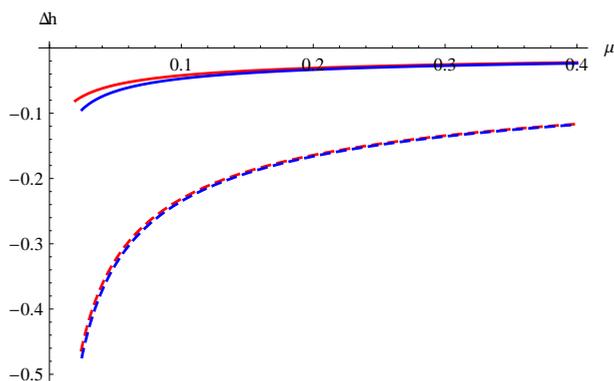


Рис. 3. Зависимость изменения относительной толщины от относительной жесткости слоя для различных значений коэффициента Пуассона.

Заметим, что при увеличении значения коэффициента Пуассона в трансверсальном направлении уменьшается значение относительного изменения толщины слоя.

4. Заключение. Полученные простые асимптотические формулы могут быть использованы для качественного описания поведения стенок кровеносных сосудов при изменении давления в сосудах, а также в некоторых случаях для оценки соотношения модулей упругости в тангенциальном и трансверсальном направлениях.

Литература

1. Bauer S. M., Smirnov A. L. Axisymmetric Deformations of the Orthotropic Spherical Layer under Normal Pressure // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. Vol. 48, 2015, N 1. P. 35–39.
2. Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. Неклассические теории анизотропных оболочек в задачах о деформации тансверсально-изотропных сферических и цилиндрических слоев под действием нормального давления // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. Т. 44, 2011. Вып. 3. С. 86–93.
3. Bauer S. M., Voronkova E. B. Nonclassical Shell Theories in Ocular Biomechanics // The 1st international conference Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology: From Macro- to Nanoscale Structures (SMT in MB – 2013).
4. Родионова В. А., Титаев Б. Ф., Черных К. Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1996. 278 с.
5. Бауэр С. М., Ершов В. И., Смирнов А. Л. Деформации цилиндрического и сферического слоев под действием нормального давления // Тезисы конференции «Седьмые Поляховские чтения». Санкт-Петербург, 2015. С. 156.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

Сведения об авторах

Бауэр Светлана Михайловна — доктор физико-математических наук, профессор; s_bauer@mail.ru
Смирнов Андрей Леонидович — кандидат физико-математических наук, доцент; a_l_smirnov@mail.ru

AXISYMMETRIC DEFORMATIONS OF THE TRANSVERSE ISOTROPIC CYLINDRICAL LAYER UNDER NORMAL PRESSURE

Svetlana M. Bauer, Andrei L. Smirnov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; s_bauer@mail.ru, a_l_smirnov@mail.ru

The deformation of the elastic transverse isotropic layer under normal pressure applied on the outer and inner surfaces is analyzed. For the shell, which is much softer in the transverse direction than in the tangential plane, one gets singularly perturbed boundary value problem. Solution of the problem in zero

approximation allows to obtain the asymptotic formula for the change of the relative layer thickness under normal pressure. The asymptotic results well agree with the exact solution. Refs 5. Figs 3.

Keywords: cylindrical layer, Lamé problem, transverse isotropy.

References

1. Bauer S. M., Smirnov A. L., “Axisymmetric Deformations of the Orthotropic Spherical Layer under Normal Pressure”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **48**(1), 35–39 (2015).
2. Bauer S. M., Voronkova E. B., “Nonclassic theories of anisotropic shells in the problems on the deformation of transversely isotropic spherical and cylindrical layers under normal pressure”, *Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1* Issue 3, 86–93 (2011) [in Russian].
3. Bauer S. M., Voronkova E. B., “Nonclassical Shell Theories in Ocular Biomechanics in Advanced Structured Materials”, **45**, *Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology: From Macro- to Nanoscale Structures* (Springer, International Publishing Switzerland, 81–97, 2015).
4. Rodionova V. A., Titaev V. F., Chernykh K. F., “Applied Theory of Anisotropic Plates and Shells” (St. Peterb. Univ., St. Petersburg, 1996, 278 p.) [in Russian].
5. Bauer S. M., Ershov M. I., Smirnov A. L., “Deformations of spherical and cylindrical layers under normal pressure”, *Book of abstract. The Seventh Polyakhov’s Reading* (St. Petersburg, 2015, p. 156) [in Russian].