

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ШПАНГОУТАМИ С ТАВРОВЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ*

М. Л. Боярская, С. Б. Филиппов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Исследована устойчивость тонкой круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами с тавровым поперечным сечением, под действием равномерного внешнего давления. Для модели, в которой шпангоуты рассматриваются как круговые стержни, по приближенным формулам решается задача об оптимальном распределении материала между шпангоутами и оболочкой, приводятся максимальные значения критического давления, соответствующие найденным величинам оптимального характерного размера поперечного сечения шпангоута. Для поиска критического значения параметра нагрузки и соответствующего ему значения критического давления в случае моделирования шпангоута кольцевой пластиной применен метод прогонки. Путем совместного использования стержневой и пластиночной моделей шпангоута найдено оптимальное значение ширины подкрепляющего кольца. Библиогр. 6 назв. Ил. 3. Табл. 2.

Ключевые слова: устойчивость, цилиндрическая оболочка, шпангоут с тавровым поперечным сечением, асимптотический метод.

1. Введение. Внешнее давление, действующее на круговую цилиндрическую оболочку, может привести к потере ее устойчивости. Подкрепление оболочки шпангоутами позволяет увеличить критическое давление. Шпангоут представляет собой кольцо, которое может иметь различное поперечное сечение. Наиболее часто используются шпангоуты с прямоугольным и тавровым сечениями.

Почти во всех многочисленных исследованиях подкрепленных оболочек шпангоуты рассматривались как круговые стержни. В монографии [1] имеются ссылки на работы этого направления. Стержневая модель дает удовлетворительные результаты при вычислении критического давления, если ширина и толщина кольца — величины одного порядка. При потере устойчивости оболочки, подкрепленной узкими шпангоутами, на ее поверхности, как и у гладкой оболочки, образуются вмятины, вытянутые в направлении образующей цилиндра. Такую форму потери устойчивости будем называть формой первого типа.

С увеличением ширины шпангоутов форма потери устойчивости первого типа сменяется формой второго типа, при которой кольцо теряет устойчивость, в то время как сама оболочка практически не деформируется. Для того чтобы найти такую форму и соответствующее ей критическое давление, необходимо рассматривать шпангоут как кольцевую пластинку.

Для случая шпангоутов с прямоугольным поперечным сечением потеря устойчивости по формам первого и второго типов рассматривалась в работе [2]. В ней стержневая и пластиночная модели шпангоута использованы для приближенного вычисления оптимального значения ширины кольца, соответствующего максимальной величине критической нагрузки.

Колебания и устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами с тавровым поперечным сечением, исследованы в статье [3] на основе стержневой

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00523).

модели. В этой статье выведены, в частности, простые приближенные формулы для определения внешнего критического давления и оптимальных параметров подкрепленной оболочки. Предполагается, что масса оболочки фиксирована, а оптимальные параметры соответствуют максимальному значению критической нагрузки.

В работе [4] асимптотическим методом получено приближенное решение задачи о потере устойчивости шпангоута с тавровым поперечным сечением, моделью которого является пластинка, подкрепленная по краю круговым стержнем с прямоугольным поперечным сечением. Однако решение, найденное в [4], годится только для случая, когда параметры пластинки и кольца удовлетворяют определенному соотношению. Это обстоятельство сильно ограничивает возможность практического применения полученных результатов.

В данной работе рассматривается задача о потере устойчивости под действием равномерного бокового внешнего давления безмоментного напряженного состояния круговой шарнирно опертой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами с тавровым поперечным сечением. В качестве модели шпангоута используется кольцевая пластинка, подкрепленная по краю круговым стержнем. Найлены начальные напряжения в пластинке, возникающие при действии на оболочку внешнего давления. Разработан алгоритм определения критического давления, соответствующего форме потери устойчивости второго типа. Определены оптимальные параметры подкрепленной оболочки заданной массы, соответствующие максимальному значению критической нагрузки.

2. Стержневая модель шпангоута. Предположим, что круговая цилиндрическая оболочка средней длины подкреплена по параллелям $s = s_i, i = 1, 2, \dots, n_s$ одинаковыми шпангоутами (рис. 1).

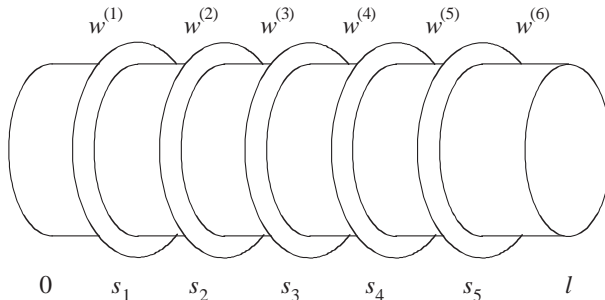


Рис. 1. Подкрепленная цилиндрическая оболочка.

Выбрав за единицу длины радиус оболочки R , для описания потери устойчивости подкрепленной оболочки под действием равномерного внешнего бокового давления p используем безразмерные уравнения полубезмоментной теории [1]:

$$\frac{d^4 w^{(i)}}{ds^4} - \alpha^4 w^{(i)} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n_s. \quad (1)$$

Здесь s — координата, направленная по образующей, $w^{(i)}$ — проекция перемещения на направление нормали для $s \in [s_{i-1}, s_i], i = 1, 2, \dots, n, n = n_s + 1, s_0 = 0, s_n = l, l$ — безразмерная длина оболочки,

$$\alpha^4 = (m^4 \lambda - \mu^4 m^8) / \sigma, \quad \sigma = 1 - \nu^2, \quad \lambda = \frac{\sigma p}{Eh},$$

m — число волн по параллели, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, $\mu^4 = h^2/12$ — малый параметр, h — безразмерная толщина оболочки.

Граничные условия для уравнений (1) в случае шарнирного опирания краев оболочки имеют вид

$$w(0) = w''(0) = w(l) = w''(l), \quad (2)$$

где (\prime) обозначает производную по координате s .

В работе [1] шпангоут рассматривается как круговой стержень. В предположении, что оболочка и шпангоуты изготовлены из одного материала, а характерный размер поперечного сечения шпангоута много меньше μ , на параллелях, подкрепленных шпангоутами, получены следующие условия сопряжения:

$$\begin{aligned} w^{(i)} &= w^{(i+1)}, & w^{(i)\prime} &= w^{(i+1)\prime}, \\ w^{(i)''} &= w^{(i+1)''}, & w^{(i)'''} - w^{(i+1)'''} &= -cw^{(i+1)}, \\ s &= s_i, & i &= 1, 2, \dots, n_s, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$c = \frac{m^8 \mu^4 l \eta}{\sigma n}, \quad \eta = \frac{12 \sigma n I}{h^3 l},$$

I — момент инерции поперечного сечения шпангоута относительно образующей цилиндра.

Уравнения (1) с граничными условиями (2), (3) также описывают колебания шарнирно опертой балки, подкрепленной пружинами жесткости c в точках $s = s_i$.

Пусть λ_1 — критическое значение параметра λ , соответствующее потере устойчивости подкрепленной оболочки. Приближенное значение параметра λ_1 определяется по формуле

$$\lambda_1(c) = \min_m \lambda_1(c, m), \quad \lambda_1(c, m) = \frac{\sigma \alpha_1^4(c)}{m^6} + \mu^4 m^2, \quad (4)$$

где $\alpha_1(c)$ — наименьшее положительное значение параметра α , для которого краевая задача (1)–(3) имеет нетривиальное решение.

В дальнейшем предполагается, что шпангоуты расположены равномерно, т. е. $s_i = il/n$, $i = 1, 2, \dots, n_s$. В этом случае краевая задача (1)–(3) имеет явное решение

$$w_n^{(i)} = \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad \alpha_n(0) = \frac{\pi n}{l},$$

которое не зависит от c , а приближенное значение $\lambda_n(0)$, соответствующее $\alpha_n(0)$, может быть найдено по формуле

$$\lambda_n(0) = \min_m \lambda_n(0, m) \simeq \frac{4\sigma^{1/4} \alpha_n(0) \mu^3}{3^{3/4}} = \frac{4\pi n \sigma^{1/4} \mu^3}{3^{3/4} l}. \quad (5)$$

Такие же решения имеет краевая задача для неподкрепленной оболочки. Для нее критическое значение параметра нагрузки

$$\lambda_1(0) \simeq \frac{4\pi \sigma^{1/4} \mu^3}{3^{3/4} l} = \frac{4\pi \sigma^{1/4}}{l} \left(\frac{h}{6} \right)^{3/2}. \quad (6)$$

При одновременном выполнении условий $n \gg 1$, $c \sim 1/n$ для нахождения наименьшего собственного значения краевой задачи (1)–(3) можно использовать метод осреднения. В работе [1] получена приближенная формула

$$\alpha_1^4 = \frac{\pi^4}{l^4} + \frac{\eta m^8 \mu^4}{\sigma}. \quad (7)$$

Несмотря на то, что формула (7) выведена в предположении $n \gg 1$, $c \sim 1/n$, она дает хорошее приближение к точному значению α_1 даже при наличии на оболочке всего одного шпангоута и при достаточно больших значениях параметра c .

Подстановка (7) в формулу (4) дает приближенное выражение для λ_1 :

$$\lambda_1(\eta) = \lambda_1(0)(1 + \eta)^{3/4}. \quad (8)$$

Формула (8) годится для определения критического значения λ , если значение η не слишком велико. С увеличением η увеличивается и выражение в правой части формулы (8). При $\eta = \eta_* = n^{4/3} - 1$ имеет место равенство

$$\lambda_1(0)(1 + \eta)^{3/4} = \lambda_n(0) = n\lambda_1(0),$$

поэтому формулой (8) можно пользоваться при $\eta \leq \eta_*$. Если же $\eta > \eta_*$, то

$$\lambda_1 = n\lambda_1(0). \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) следует, что

$$\frac{\lambda_1(\eta)}{\lambda_1(0)} \simeq \begin{cases} (1 + \eta)^{3/4}, & 0 \leq \eta \leq \eta_*, \\ n, & \eta > \eta_*. \end{cases} \quad (10)$$

Если неподкрепленная цилиндрическая оболочка имеет длину l , радиус R и толщину h_0 , то ее масса $M_0 = 2\pi R^3 \rho h_0 l$, где ρ — плотность материала. Из формулы (6) следует, что критическое давление p_0 для такой оболочки можно определить с помощью приближенной формулы

$$p_0 = \frac{\lambda_1(0) E h_0^{5/2}}{\sigma h^{3/2}} = \frac{4\pi E h_0^{5/2}}{6^{3/2} l \sigma^{3/4}}. \quad (11)$$

Рассмотрим цилиндрическую оболочку длиной l , радиусом R и толщиной h , подкрепленную n_s шпангоутами с тавровыми поперечными сечениями. Размеры таврового сечения приведены на рис. 2.

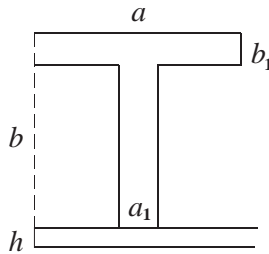


Рис. 2. Тавровое поперечное сечение шпангоута.

Введем обозначения $k = b/a$, $k_1 = a_1/a$, $k_2 = b_1/b$. Тогда площадь поперечного сечения шпангоута $S = a^2 k(k_1 + k_2 - k_1 k_2)$, а момент инерции поперечного сечения шпангоута относительно образующей цилиндра

$$I = a^4 k^3 [1 + (1 - k_1)(1 - k_2)^3] / 3.$$

При $k_1 = 1$ или $k_2 = 1$ шпангоут имеет прямоугольное поперечное сечение. Масса подкрепленной оболочки $M_s = 2\pi R^3 \rho h l + 2\pi R^3 \rho n_s S$. Критическое давление для рассматриваемой оболочки

$$p_1 = \frac{\lambda_1(\eta) E h}{\sigma},$$

где $\lambda_1(\eta)$ находится по формуле (10). Обозначив $f_b = p_1/p_0$, $d = h/h_0$, получим

$$f_b = d^{5/2} \frac{\lambda_1(\eta)}{\lambda_1(0)} = \begin{cases} d^{5/2}(1+\eta)^{3/4}, & 0 \leq \eta \leq \eta_*, \\ d^{5/2}n, & \eta > \eta_*. \end{cases} \quad (12)$$

Предположим, что массы подкрепленной и неподкрепленной оболочек равны: $M_s = M_0$. Из последнего равенства вытекает, что

$$d = 1 - Aa^2, \quad \eta = \frac{Ba^4}{d^3} = \frac{B(1-d)^2}{A^2 d^3}, \quad (13)$$

$$A = \frac{n_s k(k_1 + k_2 - k_1 k_2)}{l h_0}, \quad B = \frac{4\sigma n k^3 [1 + (1 - k_1)(1 - k_2)^3]}{h_0^3 l}.$$

Зафиксируем значения параметров l , h_0 , n_s , k , k_1 и k_2 . Тогда отношение f_b критических давлений для подкрепленной и неподкрепленной оболочек с равной массой будет зависеть только от d . В работе [1] доказано, что при достаточно малом h_0 функция f_b имеет максимум в точке $d = d_*$, где $d_* \in [0, 1]$ — корень кубического уравнения

$$d^3 - \frac{B}{\eta_* A^2} (d - 1)^2 = 0.$$

Будем называть d_* оптимальным параметром, так как при $d = d_*$ критическое давление для подкрепленной оболочки с фиксированной массой имеет максимальное значение. Оптимальное значение a_* размера поперечного сечения a определяется по формуле $a_* = \sqrt{(1 - d_*)/A}$, а максимальное значение f_b^* функции $f_b(d)$ равно $f_b^* = n d_*^{5/2}$.

В таблице 1 приведены значения оптимальных параметров a_* , d_* и максимальных значений f_b^* функции $f_b(d)$ для случая $l = 10$, $h_0 = 0.01$, $n_s = 5$, $k = 1$, $k_2 = k_1$, $\nu = 0.3$.

Таблица 1

k_1	d_*	a_*	f_b^*
1	0.908	0.0429	4.712
0.8	0.912	0.0430	4.755
0.6	0.922	0.0431	4.895
0.4	0.941	0.0428	5.160
0.2	0.969	0.0414	5.549

Случай $k_1 = k_2 = 1$ соответствует прямоугольной форме поперечного сечения шпангоута. При уменьшении k_1 значение относительного критического давления f_b^* для подкрепленной оболочки увеличивается, в то время как ее масса не изменяется. Это показывает, что шпангоут с тавровым сечением является более эффективным, чем шпангоут с прямоугольным сечением.

Результаты, полученные в работах [1, 3] на основе стержневой модели шпангоута, свидетельствуют о том, что с увеличением относительной ширины шпангоута k функция $f_b^*(k)$ возрастает. Однако расчеты, проведенные в [2] методом конечных

элементов, показывают, что при достаточно больших значениях k относительное критическое давление убывает. Это связано с тем, что при больших значениях k стержневая модель шпангоута не работает, и для адекватного описания потери устойчивости подкрепленной оболочки необходимо использовать пластиночную модель шпангоута.

3. Пластиночная модель шпангоута. Предположим, что круговая цилиндрическая оболочка подкреплена по параллелям $s = s_k$, $k = 1, 2, \dots, n_s$ одинаковыми шпангоутами с тавровыми поперечными сечениями (см. рис. 1). В качестве модели шпангоута будем использовать кольцевую пластинку толщиной a_1 и шириной $\varepsilon = b - b_1$, внешний край которой сопряжен с круговым стержнем прямоугольного поперечного сечения размером $a \times b_1$ (см. рис. 2).

Действующее на оболочку внешнее давление p вызывает растягивающие радиальные напряжения на внутреннем контуре пластинки, вследствие чего пластинка может потерять устойчивость. Для того чтобы найти возникающие в пластинке начальные напряжения, следует решить краевую задачу, описывающую осесимметричную деформацию рассматриваемой конструкции.

Безразмерные уравнения для цилиндрической оболочки могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{dT_1^{(k)}}{ds} = 0, \quad \frac{dQ^{(k)}}{ds} + T_2^{(k)} + \lambda = 0, \quad Q^{(k)} + \frac{dM^{(k)}}{ds} = 0, \\ T_1^{(k)} = \frac{du^{(k)}}{ds} - \nu w^{(k)}, \quad T_2^{(k)} = \nu \frac{du^{(k)}}{ds} - w^{(k)}, \quad M^{(k)} = -\mu^4 \frac{d\vartheta^{(k)}}{ds}, \quad \vartheta = -\frac{dw^{(k)}}{ds}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $T_1^{(k)}$, $T_2^{(k)}$, $Q^{(k)}$ и $M^{(k)}$ — безразмерные усилия и момент, $u^{(k)}$, $w^{(k)}$ и $\vartheta^{(k)}$ — компоненты перемещения и угол поворота для $s \in [s_{k-1}, s_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, $n = n_s + 1$, $s_0 = 0$, $s_n = l$. Предположим, что на краях оболочки заданы условия шарнирного опирания:

$$T_1^{(1)} = w^{(1)} = M^{(1)} = 0, \quad s = s_0, \quad T_1^{(n)} = w^{(n)} = M^{(n)} = 0, \quad s = s_n.$$

Уравнения

$$\frac{dT_1^{(k)}}{ds} = 0, \quad T_2^{(k)} + \lambda = 0, \quad T_1^{(k)} = \frac{du^{(k)}}{ds} - \nu w^{(k)}, \quad T_2^{(k)} = \nu \frac{du^{(k)}}{ds} - w^{(k)}, \quad (15)$$

которые получаются из (14) при $\mu = 0$, называются безмоментными. В случае шарнирного опирания решения (15) удовлетворяют граничным условиям

$$T_1^{(1)}(s_0) = T_1^{(n)}(s_n) = 0. \quad (16)$$

Осесимметричная деформация пластинки в ее плоскости описывается следующими безразмерными уравнениями:

$$(rT_{1p})' - T_{2p} = 0, \quad rT_{1p} = ru_p' + \nu u_p, \quad rT_{2p} = u_p + \nu ru_p'. \quad (17)$$

Здесь ($'$) обозначает производную по радиальной координате r , $r \in [1, r_1]$, $r_1 = 1 + \varepsilon$ — внешний радиус пластины, ε — ширина пластины, T_{1p} и T_{2p} — тангенциальные усилия, u_p и v_p — компоненты перемещения. Жесткость пластинки на изгиб не учитывается, так как она намного меньше ее тангенциальной жесткости.

На внешнем крае пластины $r = r_1$, подкрепленном круговым стержнем, следует задать условие сопряжения:

$$T_{1p} = -\frac{\sigma S_1}{r_1^2 a_1} u_p(r_1), \quad (18)$$

где $S_1 = ab_1$ — площадь прямоугольного поперечного сечения кольца. На параллели $s = s_k$, $r = 1$ должны быть выполнены условия сопряжения оболочки и пластинки:

$$w^{(k)} = w^{(k+1)} = -u_p, \quad \vartheta^{(k)} = \vartheta^{(k+1)}, \quad M^{(k)} = M^{(k+1)}, \quad hQ^{(k)} = hQ^{(k+1)} - a_1 T_{1p}, \quad (19)$$

$$T_1^{(k)} = T_1^{(k+1)}, \quad (20)$$

где $k = 1, 2, \dots, n_r$. Предполагается, что пластинка и оболочка изготовлены из одного материала.

Для приближенного решения систем (14) используем асимптотический метод, представленный в книге [6]. Неизвестные функции будем искать в виде суммы основного безмоментного состояния и краевых эффектов. Так, $w^{(k)} = w_a^{(k)} + w_b^{(k)}$, где $w_a^{(k)}$ — решения безмоментных систем (15), а функции

$$w_b^{(k)} = D_1^{(k)} e^{\alpha_1(s-s_{k-1})} + D_2^{(k)} e^{\alpha_2(s-s_{k-1})} + D_3^{(k)} e^{\alpha_3(s-s_k)} + D_4^{(k)} e^{\alpha_4(s-s_k)},$$

где $D_j^{(k)}$ — произвольные постоянные,

$$\alpha_{1,2} = -\frac{q}{\mu\sqrt{2}}(1 \pm i), \quad \alpha_{3,4} = \frac{q}{\mu\sqrt{2}}(1 \pm i), \quad q = \sigma^{1/4},$$

описывают краевой эффект.

Имеют место приближенные равенства

$$\begin{aligned} u^{(k)} &= u_{1a}^{(k)}, \quad T_1^{(k)} = T_{1a}^{(k)}, \quad \vartheta^{(k)} = \vartheta_b^{(k)} = -\frac{dw_b^{(k)}}{ds}, \\ M^{(k)} &= M_b^{(k)} = -\mu^4 \frac{d\vartheta^{(k)}}{ds}, \quad Q^{(k)} = Q_b^{(k)} = -\frac{dM_b^{(k)}}{ds}, \end{aligned} \quad (21)$$

и условия (19) с точностью до величин $O(\mu)$ принимают вид

$$\begin{aligned} w_b^{(k)} &= w_b^{(k+1)}, \quad \vartheta_b^{(k)} = \vartheta_b^{(k+1)}, \quad M_b^{(k)} = M_b^{(k+1)}, \quad hQ_b^{(k)} = hQ_b^{(k+1)} - a_1 T_{1p}, \\ w_a^{(k)} + w_b^{(k)} &= -u_p, \quad s = s_k, \quad r = 1. \end{aligned} \quad (22)$$

Из соотношений (15), (16), (20) и (21) следует, что

$$T_{1a}^{(k)} = \frac{dw_a^{(k)}}{ds} - \nu w_a^{(k)} = 0, \quad w_a^{(k)} = \frac{\lambda}{\sigma}, \quad k = 1, 2, \dots, n_r. \quad (23)$$

Общее решение системы (17)

$$u_p = C_1 r + C_2 / r, \quad T_{1p,2p} = \gamma C_1 \mp \delta C_2 / r^2, \quad \gamma = 1 + \nu, \quad \delta = 1 - \nu \quad (24)$$

содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2 . Связь между ними находится путем подстановки решения (24) в условие (18):

$$C_2 = C_1 r_1^2 K, \quad K = \frac{\gamma r_1 a_1 + \sigma S}{\delta r_1 a_1 - \sigma S}.$$

Следовательно,

$$u_p(1) = C_1 + C_2 = C_1(1 + r_1^2 K), \quad T_{1p}(1) = \gamma C_1 - \delta C_2 = C_1(\gamma - \delta r_1^2 K). \quad (25)$$

Предположим, что $s_k - s_{k-1} \gg \mu$ для $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$\begin{aligned} w_b^{(k)}(s_k) &= D_1^{(k)} e^{\alpha_1(s_k - s_{k-1})} + D_2^{(k)} e^{\alpha_2(s_k - s_{k-1})} + D_3^{(k)} + D_4^{(k)} \simeq D_3^{(k)} + D_4^{(k)}, \\ w_b^{(k+1)}(s_k) &= D_1^{(k+1)} + D_2^{(k+1)} + D_3^{(k+1)} e^{\alpha_3(s_k - s_{k+1})} + D_4^{(k+1)} e^{\alpha_4(s_k - s_{k+1})} \simeq \\ &\simeq D_1^{(k+1)} + D_2^{(k+1)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогичным образом с помощью формул (21) получим

$$\begin{aligned} \vartheta_b^{(k)}(s_k) &\simeq -\alpha_3 D_3^{(k)} - \alpha_4 D_4^{(k)}, \quad \vartheta_b^{(k+1)}(s_k) \simeq -\alpha_1 D_1^{(k+1)} - \alpha_2 D_2^{(k+1)}, \\ M_b^{(k)}(s_k) &\simeq \mu^4 (\alpha_3^2 D_3^{(k)} + \alpha_4^2 D_4^{(k)}), \quad M_b^{(k+1)}(s_k) \simeq \mu^4 (\alpha_1^2 D_1^{(k+1)} + \alpha_2^2 D_2^{(k+1)}), \\ Q_b^{(k)}(s_k) &\simeq -\mu^4 (\alpha_3^3 D_3^{(k)} + \alpha_4^3 D_4^{(k)}), \quad Q_b^{(k+1)}(s_k) \simeq -\mu^4 (\alpha_1^3 D_1^{(k+1)} + \alpha_2^3 D_2^{(k+1)}). \end{aligned} \quad (27)$$

Введем обозначения $D_1 = D_1^{(k+1)}$, $D_2 = D_2^{(k+1)}$, $D_3 = D_3^{(k)}$, $D_4 = D_4^{(k)}$ и подставим выражения (26), (27) в условия (22). Принимая во внимание второе равенство (23), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} D_1 + D_2 - D_3 - D_4 &= 0, \quad \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 - \alpha_3 D_3 - \alpha_4 D_4 = 0, \\ \alpha_1^2 D_1 + \alpha_2^2 D_2 - \alpha_3^2 D_3 - \alpha_4^2 D_4 &= 0, \quad \mu^4 h (\alpha_3^3 D_3 + \alpha_4^3 D_4 - \alpha_1^3 D_1 - \alpha_2^3 D_2) = a_1 T_{1p}(1), \\ \lambda + \sigma [D_1 + D_2 + u_p(1)] &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Из первого и третьего уравнений (28) следует, что $D_3 = D_1$, $D_4 = D_2$. С учетом последних равенств и формул (25) остальные три уравнения (28) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 &= 0, \quad 2\mu^4 h (\alpha_3^3 D_1 + \alpha_4^3 D_2) = a_1 (\delta r_1^2 K - \gamma) C_1, \\ \lambda + \sigma (D_1 + D_2) + \sigma (1 + r_1^2 K) C_1 &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Исключив D_1 и D_2 из системы (29), получим

$$C_1 = -\frac{\lambda}{B_*}, \quad B_* = \sigma(1 + r_1^2 K) + \frac{qa_1(\delta r_1^2 K - \gamma)}{2\sqrt{2}h\mu}. \quad (30)$$

Из соотношения (30) и формул (24) следует, что начальные усилия в кольцевой пластине можно найти по приближенным формулам

$$T_{1p} = -\frac{\lambda}{B_*} \left(\gamma - \frac{\delta r_1^2 K}{r^2} \right), \quad T_{2p} = -\frac{\lambda}{B_*} \left(\gamma + \frac{\delta r_1^2 K}{r^2} \right). \quad (31)$$

Безразмерное дифференциальное уравнение, описывающее потерю устойчивости кольцевой пластины, приведено в работе [4]. Оно имеет вид

$$\frac{d^4 w_p}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w_p}{dr^3} - \frac{2m^2 + 1 + \beta t_1}{r^2} \frac{d^2 w_p}{dr^2} + \frac{2m^2 + 1 - \beta t_2}{r^3} \frac{dw_p}{dr} + \frac{m^2(m^2 - 4 + \beta t_2)}{r^4} w_p = 0, \quad (32)$$

где w_p — прогиб пластины, m — число волн в окружном направлении,

$$\beta = \frac{T_{1p}(1)}{\mu_p^4}, \quad \mu_p^4 = \frac{a_1^2}{12}, \quad (33)$$

a_1 — толщина пластины, $t_k = r^2 T_{kp}(r)/T_{kp}(1)$, $k = 1, 2$. В рассматриваемой задаче t_1 и t_2 определяются по формулам

$$t_{1,2} = \frac{r^2 \gamma \mp \delta r_1^2 K}{\gamma - \delta r_1^2 K}.$$

Параметр нагрузки β является искомой величиной.

Предположим, что $a_1^3 \ll h^{5/2}$. В этом случае, как показано в работе [5], условия сопряжения пластины с оболочкой в первом приближении можно заменить условиями жесткой заделки

$$w_p(1) = w'_p(1) = 0. \quad (34)$$

Условия сопряжения пластины и стержня имеют вид

$$\begin{aligned} M_1 = \frac{\sigma J}{a_1} w'_p, \quad Q_1 = \frac{\mu_p^4 \beta t_1}{r^2} w'_p, \quad J = \frac{a^3 b_1}{12}, \quad M_1 = \mu_p^4 \left(-w''_p - \frac{\nu}{r} w'_p + \frac{\nu m^2}{r^2} w_p \right), \\ Q_1 = \mu_p^4 \left[-w'''_p - \frac{w''_p}{r} + (2m^2 + 1 - \nu m^2) \frac{w'_p}{r^2} - m^2 (3 - \nu) \frac{w_p}{r^3} \right], \end{aligned} \quad (35)$$

где J — безразмерный момент инерции поперечного сечения.

Пусть безразмерная ширина пластинки мала, т. е. $\varepsilon = r_1 - 1 \ll 1$. Будем называть такую пластинку узкой. Для шпангоутов, которые используются в реальных конструкциях, условие $\varepsilon \ll 1$ обычно выполняется. В рассматриваемой задаче, как показано в работах [2] и [4], потеря устойчивости узкой пластинки сопровождается образованием большого числа волн m в окружном направлении. Предположим, что $m \sim 1/\varepsilon$. После замены переменной $r = 1 + \varepsilon x$ и отбрасывания малых слагаемых уравнения (32) граничные условия (34), (35) приобретают вид

$$\frac{d^4 w_p}{dx^4} - \varepsilon^2 (2m^2 + \beta t_1) \frac{d^2 w_p}{dx^2} + \varepsilon^4 m^2 (m^2 + \beta t_2) w_p = 0, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} w_p = w'_p = 0, \quad x = 0, \\ w''_p + c w'_p - m^2 \nu \varepsilon^2 w_p = 0, \quad w'''_p - \varepsilon^2 [m^2 (2 - \nu) + \beta t_1] w'_p = 0, \quad x = 1, \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$t_1 = 1 - \frac{\varepsilon a_1 x}{\varepsilon a_1 + S}, \quad t_2 = \frac{\nu S - a_1}{\varepsilon a_1 + S}, \quad c = \frac{12\varepsilon(1 - \nu^2)J}{a_1^3}.$$

В случае $S = 0$ краевая задача (36), (37) имеет аналитическое решение, приведенное в работе [4]. В общем случае ее решение можно найти методом прогонки. Пусть β_c — наименьшее положительное собственное значение задачи (36), (37). Тогда из равенств (31), (33) следует, что при $\varepsilon \ll 1$ безразмерный параметр критического давления λ_c можно найти по приближенной формуле

$$\lambda_c = \frac{\mu_p^4 \beta_c B_*}{\delta r_1^2 K - \gamma}. \quad (38)$$

Критическое давление p_c связано с λ_c следующим образом: $p_c = Eh\lambda_c/\sigma$.

Введем обозначение $f_p = p_c/p_0$, где p_0 — критическое давление для гладкой оболочки безразмерной толщины h_0 , которое определяется по формуле (11). Тогда относительное критическое давление, полученное с помощью пластиночной модели шпангоута, имеет вид

$$f_p = \frac{6^{3/2} l h}{4\sigma^{1/4} \pi h_0^{5/2}} \lambda_c. \quad (39)$$

Относительное критическое давление f_c для подкрепленной оболочки можно найти по приближенной формуле

$$f_c = \min(f_b, f_p),$$

где f_b и f_p соответствуют потере устойчивости по формам первого и второго типов.

4. Оптимальная форма поперечного сечения шпангоута. Использование стержневой модели шпангоута позволяет найти оптимальное значение a_* размера поперечного сечения шпангоута a , но не позволяет определить оптимальную форму поперечного сечения, которая зависит от относительной ширины шпангоута $k = b/a$, где b — ширина шпангоута.

Зафиксируем параметры $l, h_0, n_s, k_1, k_2, \nu$ и рассмотрим подкрепленную оболочку с оптимальными параметрами $a = a_*, d = d_*$. Обозначим $f_b^*(k) = nd_*^{5/2}(k)$ и $f_p^*(k)$ ее относительные критические давления, соответствующие потере устойчивости по формам первого и второго типов. Для вычисления $f_p^*(k)$ по формуле (39) выберем $a_1 = k_1 a_*, b_1 = k_1 b_*, b_* = ka_*, \varepsilon = b_* - b_1$.

Функция $f_b^*(k)$ возрастает, а функция $f_p^*(k)$ убывает, поэтому относительное критическое давление

$$f_c^*(k) = \min(f_b^*(k), f_p^*(k))$$

имеет максимум в точке $k = k_*$, где $f_b^*(k) = f_p^*(k)$. Следовательно, $k = k_*$ является оптимальным значением параметра k .

В качестве примера рассмотрим оболочку с параметрами $l = 10, h_0 = 0.01, n = 6, k_1 = k_2 = 0.2, \nu = 0.3$. Необходимые для расчетов значения величин h, b_* и ε имеются в таблице 2. Слева приводятся значения параметра a_* и функции f_b^* для стержневой модели шпангоута, справа — значения β_c и f_p^* для пластиночной модели при различных k и соответствующих им ε . В скобках указывается величина m , при которой β_c принимает наименьшее значение.

Таблица 2

стержневая модель		вычисляемые величины				пластиночная модель		
k	a_*	f_b^*	h	b_*	ε	β_c	$10^3 \lambda_c$	f_p^*
5	0.01253	5.703	0.00986	0.0627	0.05	624(41)	3.625	42.793
8	0.00883	5.833	0.00989	0.0706	0.056	566(37)	1.418	16.785
9	0.00809	5.843	0.00989	0.0728	0.058	547(36)	1.108	13.131
10	0.00747	5.850	0.0099	0.0747	0.06	528(35)	0.883	10.464
13	0.00614	5.868	0.00991	0.0799	0.064	500(32)	0.524	6.219
14	0.00581	5.873	0.00991	0.0814	0.065	494(32)	0.455	5.397
15	0.00552	5.877	0.00992	0.0828	0.066	488(32)	0.398	4.726
16	0.00526	5.881	0.00992	0.0842	0.067	482(31)	0.351	4.166

Зависимость функции f_c^* от ширины кольца ε демонстрирует рис. 3. Кривая f_b^* показывает зависимость, полученную с использованием стержневой модели шпангоута, и соответствует потере устойчивости по форме первого типа. Кривая f_p^* соответствует потере устойчивости по форме второго типа. Функция f_c^* достигает максимального значения для $\varepsilon = \varepsilon_* \simeq 0.0643$, которое является оптимальным.

5. Заключение. В задаче устойчивости впервые найдены оптимальные параметры для цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми пластинами, которые являются моделями шпангоутов с тавровым поперечным сечением. Для оболочки с

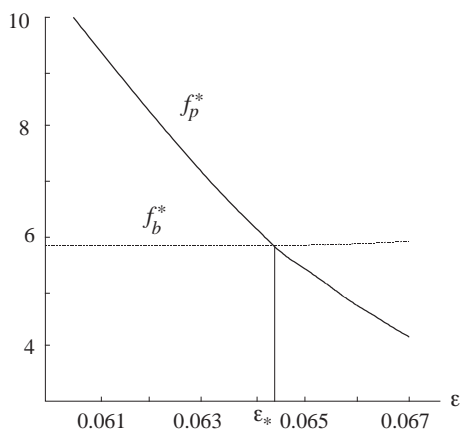


Рис. 3. Зависимость функции f_c от ширины кольца ε .

фиксированной массой оптимальным параметрам соответствует максимальное значение внешнего критического давления. Эффективный алгоритм определения оптимальных параметров разработан на основе применения асимптотических методов, что позволило в ряде случаев получить решение в явном виде. Численные методы определения оптимальных параметров подкрепленных оболочек даже при использовании современных компьютеров требуют больших затрат машинного времени. Это время можно существенно сократить, если в качестве начального приближения выбрать приближенные значения оптимальных параметров, найденные с помощью предложенного в данной работе асимптотического подхода.

Литература

1. Филиппов С. Б. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1999. 196 с.
2. Filippov S. B. Buckling of circular ring joint with cylindrical shell // Shell Structures Theory and Applications, Proc. of the 9th SSTA Conference. Poland: Jurata, 2010. P. 109–112.
3. Филиппов С. Б., Боярская М. Л., Кулаковский И. А. Приближенное определение оптимальных параметров в задачах устойчивости и колебаний подкрепленных цилиндрических оболочек // Шестые Поляховские чтения: Избранные труды Международной научной конференции по механике. СПб., 2012. С. 296–302.
4. Филиппов С. Б. Устойчивость кольцевой пластинки под действием радиальных растягивающих усилий на внутреннем контуре // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 112–121.
5. Filippov S. B. Optimal design of stiffened cylindrical shells based on an asymptotic approach // Technische Mechanik. 2004. Bd 24. Ht 3-4. P. 221–230.
6. Бауэр С. М., Смирнов А. Л., Товстик П. Е., Филиппов С. Б. Асимптотические методы в механике твердого тела. Ижевск: Изд-во «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 360 с.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

Сведения об авторах

Боярская Мария Леонидовна — аспирант; marusya1904@mail.ru

Филиппов Сергей Борисович — доктор физико-математических наук, профессор; s_b_filippov@mail.ru

BUCKLING OF CYLINDRICAL SHELL STIFFENED BY RINGS WITH T-SHAPED CROSS-SECTION

Maria L. Boyarskaya, Sergei B. Filippov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; marusya1904@mail.ru, s_b_filippov@mail.ru

Buckling under the action of the external lateral pressure of the cylindrical shell stiffened by the identical rings with T-shaped cross-sections is considered. If the rings are sufficiently narrow then the buckling mode is similar to the buckling mode of the shell without rings. To find this mode called the buckling mode of the first type one can use the beam model of the ring. By means of asymptotic methods the simple approximate formulae for calculation of the critical external pressure and the buckling modes of the first type are derived. The optimal parameters corresponding to the maximal value of the critical pressure of the stiffened shell with given mass are evaluated. If the width of a the ring grows the buckling mode of the first type is replaced with the buckling mode of the second type. Such buckling mode consists of many small pits formed on the surface of the ring. The cylindrical shell itself does not actually deform. The beam model can not be used for studying the stability of the wide ring which must be considered as an annular plate. In order to estimate the axisymmetric pre-buckling state an asymptotic method is applied. The axisymmetric deformations are found as a sum of slowly varying components and edge effect integrals. The same asymptotic approach is used for the solution of the buckling problem. In the first approximation we get the eigenvalue problem describing buckling of annular plate. The critical pressure and the buckling mode of the second type are obtained by means of the shooting procedure. Use both the beam and the plate models allows us to find the optimal value of a ring's width. Refs 6. Figs 3. Tables 2.

Keywords: buckling, cylindrical shell, ring of T-shaped cross-section, asymptotic methods.

References

1. Filippov S. B., *Theory of joint and stiffened shells*, (St.Petersburg Univ. Press, 1999) [in Russian].
2. Filippov S. B., "Buckling of circular ring joint with cylindrical shell", *Shell Structures Theory and Applications: Proc. of the 9th SSTA Conference* 109–112 (Jurata, Poland, 2010).
3. Filippov S. B., Boyarskaya M. L., Kulakovskiy I. A., "Evaluating optimal parameters in the problems of buckling and vibrations of stiffened cylindrical shells", *The Sixth Polyahov's Readings: Selected papers of International scientific conference on the mechanics*, 296–302 (St.Petersburg, 2012) [in Russian].
4. Filippov S. B., "Buckling of an annular plate subjected to the radial tension along the inner circle", *Vestn. S.-Peterb. un-ta. Series 1*, Issue 2, 112–111 (2009) [in Russian].
5. Filippov S. B., "Optimal design of stiffened cylindrical shells based on an asymptotic approach", *Technische Mechanik* **24**(3-4), 221–230 (2004).
6. Bauer S. M., Smirnov A. L., Tovstik P. E., Filippov S. B., *Asymptotic methods in mechanics of solids* (Isgevsk: Izdatelstvo "Regularnaya i khaoticheskaya dinamika", 2007) [in Russian].