

МАТЕМАТИКА

УДК 519.7

**ЗАДАЧА ДОСТИЖЕНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО КОНСЕНСУСА
ПРИ СТОИМОСТНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ****Н. О. Амелина, Ю. В. Иванский*Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

В статье рассматривается новая задача о достижении *дифференцированного консенсуса*. Задача состоит в том, чтобы в системе с несколькими классами консенсус достигался для каждого класса, причем значения консенсуса для разных классов могут различаться между собой. Исследуется дифференцированный консенсус в распределенной стохастической сети узлов (или агентов), в которую поступают задания с различными приоритетами обслуживания. Рассматривается сеть с переменной топологией, помехами и задержками в измерениях и определенной стоимостью связей в сети (топологии). Цель состоит в достижении балансировки загрузки сети (достижении консенсуса) при условии удовлетворения ограничениям на топологию связей для каждого класса приоритета. В статье предложен новый протокол управления, рандомизированно распределяющий ресурсы сети с соответствующими вероятностями для каждого приоритета. Показано, что предложенный протокол управления может быть использован для удовлетворения условий на топологию связей в сети и достижения приближенного консенсуса для каждого класса приоритета в сети. Библиогр. 14 назв. Ил. 1.

Ключевые слова: дифференцированный консенсус, переменная топология, балансировка загрузки.

1. Введение. К настоящему моменту задача достижения консенсуса широко используется для решения практических задач, таких как обмен информацией в многопроцессорных сетях, распределенное управление роботизированными сетями, оптимальное распределение заданий в группах беспилотных летательных аппаратов (БПЛА), распределение заданий в транспортных сетях, распределенные вычисления и т. д. [1–5]. В этих работах обычно рассматриваются сети из агентов, сотрудничающих для выполнения определенных задач. При этом агенты могут не быть идентичными, то есть они могут обладать различной мощностью или производительностью. По существу вопрос состоит в том, как распределить задания среди агентов таким образом, чтобы система в целом работала более эффективно.

В общем случае для сети, обрабатывающей входящие задания, можно использовать различные подходы для распределения этих заданий. В [6] было показано,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 15-08-02640, 13-07-00250).

что задача оптимального (или субоптимального) распределения заданий в сети среди агентов может быть переформулирована как задача достижения консенсуса в сети. На основании этого вывода одним из подходов является распределение заданий среди агентов в соответствии с их текущими загрузками с учетом их производительности [7]. Ограничением этого подхода является то, что он трактует все задания как одинаковые и не принимает в учет специфику заданий. Однако в реальных системах некоторые задания могут быть более важными или срочными, чем остальные, и в управляющей стратегии следует предусмотреть для них различные приоритеты [8, 9]. В частности, во многих сетевых системах есть дифференциация категории обслуживания. В этой ситуации требуется ввести понятие *дифференцированного консенсуса*, под которым понимается достижение консенсуса в системах с несколькими классами заданий, где цели достижения консенсуса ставятся для каждого класса и могут быть разными. В конечном счете цель управления в сети заключается в достижении консенсуса внутри каждого класса.

В [9] рассматривается сеть со стоимостными ограничениями на топологию сети, где для заданий введены строгие приоритеты и на каждом агенте, в случае наличия нескольких заданий, в первую очередь выполняются задания высшего приоритета. Для такой сети было предложено распределять задания среди агентов в соответствии с производительностью агента и текущей загрузкой по каждому приоритету на агенте. На практике стоимостные ограничения нужно учитывать, например, при выборе каналов для передачи данных. В [9] описана стратегия, предусматривающая поочередное выполнение заданий на каждом агенте в соответствии со строгими приоритетами для различных типов заданий. Она, однако, влечет известную «проблему голодания» для заданий низкого приоритета и может привести к снижению эффективности работы сети [10]. В настоящей работе предлагается управляющая стратегия, использующая вероятностные приоритеты [11]. Преимущество такой стратегии заключается в возможности более гибкого управления распределением ресурсов между разными классами заданий, что позволяет в определенной мере избавиться от «проблемы голодания». По сути, для каждого класса заданий вводится вероятность выбора его на исполнение. Более определенно, задания высокого приоритета выполняются с высокой вероятностью, но при этом вероятность выбора на исполнение заданий низкого приоритета не равна нулю. В результате, в зависимости от приоритета заданий, на их выполнение будет выделен различный объем ресурсов сети.

2. Постановка задачи. Пусть система образована n агентами, сотрудничающими друг с другом, и множеством заданий различных классов, которые должны быть выполнены системой. Задания поступают в систему на разных агентов в различные дискретные моменты времени $t = 0, 1, \dots$. Агенты выполняют приходящие задания параллельно. Задания могут быть перераспределены среди агентов за счет использования обратной связи. Заметим, что выполнение задания не может быть прервано после того, как оно было назначено агенту.

Пусть каждому агенту соответствует номер i , $i = 1, \dots, n$, $N = \{1, \dots, n\}$ — множество всех агентов в системе. Топология сети может изменяться со временем, и пусть она моделируется последовательностью ориентированных графов $\{(N, E_t)\}_{t \geq 0}$, где E_t — множество ребер в графе (N, E_t) в момент времени t . Соответствующие матрицы смежности обозначим $A_t = [a_t^{i,j}]$, где $a_t^{i,j} > 0$, если агент j соединен с агентом i , и $a_t^{i,j} = 0$ в противном случае. Здесь и далее верхний индекс обозначает номер соответствующего агента (а не возведение в степень). Матрица $A_t = [a_t^{i,j}]$ является матрицей смежности графа сети в момент времени t . Обозначим этот граф \mathcal{G}_{A_t} .

Будем использовать следующие определения из теории графов. *Взвешенная полустепень захода* узла i равна сумме i -й строки матрицы A : $d^i(A) = \sum_{j=1}^n a^{i,j}$; $D(A) = \text{diag}\{d^i(A)\}$ — соответствующая диагональная матрица; $d_{\max}(A)$ — максимальная полустепень захода в графе \mathcal{G}_A , $\mathcal{L}(A) = D(A) - A$ — *лапласиан* графа \mathcal{G}_A ; \cdot^T — операция векторного или матричного транспонирования; $\|A\|$ — евклидова норма: $\|A\| = \sqrt{\sum_i \sum_j (a^{i,j})^2}$; $\text{Re}(\lambda_2(A))$ — действительная часть второго по величине собственного числа матрицы A ; $\lambda_{\max}(A)$ — это наибольшее собственное число матрицы A . Орграф \mathcal{G}_B является подграфом \mathcal{G}_A , если $b^{i,j} \leq a^{i,j}$ для всех $i, j \in N$. Говорят, что граф \mathcal{G}_A содержит *остовное дерево*, если существует направленное дерево $\mathcal{G}_{tr} = (N, E_{tr})$, являющееся подграфом \mathcal{G}_A .

Предположим, что задачи (задания) относятся к различным классам (приоритетам) $k = 1, \dots, m$ и у каждого агента есть m очередей — по одной на задания каждого класса.

Поведение агента $i \in N$ задают две характеристики:

- вектор размерности m , состоящий из длин очередей заданий $\mathbf{q}_t^i = [q_t^{i,k}]$ в момент времени t , k -й элемент которого равен числу заданий k -го класса, $k = 1, \dots, m$;
- производительность p^i .

Агенты могут иметь разную производительность (то есть число операций, выполняемое агентом за единицу времени). Агенты должны распределить количество вычислительных операций между заданиями различных классов таким образом, чтобы, с одной стороны, обеспечить очередность выполнения заданий согласно их приоритетам, а с другой стороны (принимая во внимание «проблему голодания»), исключить ситуацию, при которой задания с низким приоритетом простаивают «бесконечно», дожидаясь своей очереди на исполнение. Такого эффекта можно добиться, введя вероятностные приоритеты. Каждому классу заданий поставим в соответствие долю производительности P_k , $k = 1, \dots, m$, одинаковую для конкретного класса k для всех агентов. На каждом агенте задания из очередей будем выбирать случайно с вероятностью, задаваемой следующей формулой:

$$\tilde{p}_t^{i,k} = \begin{cases} P_k / \sum_{q_t^{i,l} > 0} P_l, & \text{если } q_t^{i,k} > 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь $\tilde{p}_t^{i,k}$ — это вероятность выбора на исполнение агентом i задания класса k в момент времени t . Таким образом, чем больше P_k , тем выше вероятность выбрать на исполнение задание класса k . Отсюда, производительность агента распределяется между всеми классами заданий следующим образом: $p_{t,av}^{i,k} = \tilde{p}_t^{i,k} p^i$. Здесь $p_{t,av}^{i,k}$ обозначает число операций, выделяемое *в среднем* на агенте i для выполнения заданий класса k при текущей вероятности их выбора на исполнение в момент времени t . Обозначим $p_t^{i,k}$ количество операций, выделенное агентом i на задания класса k в момент времени t . Заметим, что по определению $\tilde{p}_t^{i,k}$, если в момент времени t' очередь из заданий класса k' на агенте i' оказалась пуста, то $p_{t',k'}^{i',k'}$ операций будут распределены между другими классами заданий в отношении, равном отношению их долей производительности P_k , $k \neq k'$.

Для всех $i \in N$, $t = 0, 1, \dots$ динамика сетевой системы имеет вид

$$\mathbf{q}_{t+1}^i = \mathbf{q}_t^i - \mathbf{p}_t^i + \mathbf{z}_t^i + \mathbf{u}_t^i, \quad (1)$$

где $\mathbf{p}_t^i = [p_t^{i,k}]$ и $\mathbf{z}_t^i = [z_t^{i,k}]$ — векторы размерности m , k -й элемент $z_t^{i,k}$ обозначает число новых заданий класса k , поступивших в систему на агента i в момент времени t ; $\mathbf{u}_t^i \in \mathbb{R}^m$ является вектором управляющих воздействий размерности m (состоит из перераспределенных на агента i заданий класса k в момент времени t), который следует выбирать, основываясь на информации о длинах очередей на соседних агентах \mathbf{q}_t^j , $j \in N_t^i$, где N_t^i — это множество $\{j \in N : a_t^{i,j} > 0\}$.

Определим теперь стоимость выбранной топологии $\{N_t^i, i \in N\}$:

$$C(\{N_t^i, i \in N\}) = \max_{i \in N} \sum_{j \in N_t^i} a_t^{i,j}. \quad (2)$$

Будем рассматривать протоколы управления, удовлетворяющие определенному ограничению на стоимость топологии для каждого отдельного уровня приоритета. Положим $p^i \neq 0 \forall i \in N$ и $P_k \neq 0$, $k = 1, \dots, m$. В [6] было доказано, что минимальное время работы системы достигается тогда, когда загрузка агентов, определяемая как отношение длины очереди к производительности, равна на всех агентах в сети. Следовательно, важно достичь следующей цели.

Цель управления состоит в том, чтобы поддерживать сбалансированную (равную) загрузку по всей сети для всех уровней приоритета, удовлетворяя при этом требованию на ограничение стоимости.

В такой постановке можно решать задачу достижения консенсуса для состояний агентов $\mathbf{x}_t^i = [x_t^{i,k}]$, где

$$x_t^{i,k} = \begin{cases} q_t^{i,k} / p_{t,av}^{i,k}, & \text{если } \tilde{p}_t^{i,k} > 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для балансировки загрузки сети (чтобы повысить общую производительность сети и уменьшить таким образом время завершения выполнения всех заданий) естественно использовать протокол перераспределения заданий во время работы сети.

Будем считать, что для формирования управляющей стратегии \mathbf{u}_t^i каждый агент $i \in N$ опирается на зашумленные данные о состояниях соседей, которые также могут приходиться с задержкой:

$$\mathbf{y}_t^{i,j} = \mathbf{x}_{t-s_t^{i,j}}^j + \mathbf{w}_t^{i,j}, \quad j \in N_t^i, \quad (3)$$

где $\mathbf{w}_t^{i,j}$ — вектор помех, $0 \leq s_t^{i,j} \leq \bar{s}$ — целочисленные задержки, а \bar{s} — максимально возможная задержка.

3. Стоимостные ограничения на топологию и рандомизированная декомпозиция топологии. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство, образованное пространством элементарных событий, набором всех возможных событий и вероятностной мерой соответственно, E — символ математического ожидания.

Предположим, что графы \mathcal{G}_{A_t} , $t = 1, \dots$, независимы и одинаково распределены, то есть случайные события появления ребра (j, i) независимы и случайно распределены для определенного (j, i) . Обозначим $a_{av}^{i,j}$ — средние значения (математические ожидания) $a_t^{i,j}$, A_{av} — соответствующую матрицу смежности. Предположим, что граф $\mathcal{G}_{A_{av}}$ содержит остовное дерево.

Задания обладают различными приоритетами и для каждого приоритета определена максимальная разрешенная стоимость сетевого графа. В каждый момент времени t будем рассматривать m способов (которые могут различаться и каждый из

которых соответствует одному уровню приоритета) выбрать подграф $\mathcal{G}_t^k : \mathcal{G}_t^m \subset \mathcal{G}_t^{m-1} \subset \dots \subset \mathcal{G}_t^1$ графа \mathcal{G}_{A_t} , позволяющий использовать протокол для перераспределения заданий приоритета k , $k = 1, \dots, m$. Обозначим B_t^k соответствующие матрицы смежности. Заметим, что один из возможных способов выбора \mathcal{G}_t^k — использовать \mathcal{G}_{A_t} для всех k .

Пусть c_k , $k = 1, \dots, m$, — максимальная средняя стоимость сетевых связей для заданий с приоритетом k . Положим $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_m > 0$.

Определение. Будем говорить, что декомпозиция топологии сети $\{\mathcal{G}_t^k\}$ удовлетворяет ограничениям на среднюю стоимость $\{c_k\}$, если для каждого класса приоритета k выполнено

$$d_{\max}(B_{av}^k) = Ed_{\max}(B_t^k) = E \max_{i \in N} \sum_{j \in N_t^{i,k}} b_t^{i,j,k} \leq c_k, \quad (4)$$

где $N_t^{i,k}$ — множество соседей агента i в момент времени t , образованное в соответствии с топологией \mathcal{G}_t^k .

Теорема 1. Если граф $\mathcal{G}_{A_{av}}$ содержит остовное дерево, тогда для любых ограничений на среднюю стоимость $\{c_k\}$, $c_k > 0$, существует декомпозиция топологии сети $\{\mathcal{G}_t^k\}$, удовлетворяющая ограничениям на среднюю стоимость $\{c_k\}$, и для которой все усредненные графы \mathcal{G}_{av}^k обладают остовными деревьями.

Доказательство приведено в [9].

4. Протокол управления. В [6, 9] исследуются свойства алгоритма управления, называемого протоколом локального голосования, для задачи балансировки загрузки в стохастической сети. Величина управляющего воздействия протокола локального голосования для каждого агента определялась взвешенной суммой разностей между информацией о состоянии самого агента и информацией о состоянии его соседей.

Рассмотрим следующее семейство протоколов. Для каждого $k = 1, \dots, m$ для декомпозиции топологии $\{\mathcal{G}_t^k\}$ для стоимостных ограничений $\{c_k\}$, $c_k > 0$, определим

$$u_t^{i,k} = \gamma p_{t,av}^{i,k} \sum_{j \in N_t^i} b_t^{i,j} (y_t^{i,j,k} - x_t^{i,k}), \quad (5)$$

где $\gamma > 0$ — это шаг протокола управления, а $\bar{N}_t^i \subset N_t^i$ — множество соседей узла i (заметим, что можно использовать не все доступные связи, а лишь некоторое их подмножество), $b_t^{i,j}$ — коэффициенты протокола. Используя протокол (5), система работает таким образом, что задания одного приоритета распределяются между агентами равномерно. Пусть $B_t = [b_t^{i,j}]$ — матрица протокола перераспределения заданий в момент времени t . Положим $b_t^{i,j} = 0$, когда $a_t^{i,j} = 0$ или $j \notin \bar{N}_t^i$. По построению матрицы B_t , соответствующий граф \mathcal{G}_{B_t} большую часть времени будет иметь такую же топологию, как граф \mathcal{G}_{A_t} , задаваемый матрицей A_t , или более разреженную.

Предположим, что $\bar{s} = 0$ и $p_{t,av}^{i,k}$ не зависит от t . Тогда динамика системы с обратными связями, функционирующей по протоколу (5), будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{X}_t + \gamma(B_t \otimes I_m)\mathbf{X}_t - \gamma(D(B_t) \otimes I_m)\mathbf{X}_t - \mathbf{R}_t + \mathbf{Z}_t + \gamma\mathbf{W}_t, \quad (6)$$

где векторы \mathbf{X}_t , \mathbf{R}_t , \mathbf{Z}_t , \mathbf{Y}_t и \mathbf{W}_t принадлежат пространству \mathbb{R}^{nk} и получены конкатенацией соответствующих векторов \mathbf{x}_t^i , $\tilde{\mathbf{r}}_t^i$, $\tilde{\mathbf{z}}_t^i$ и $\tilde{\mathbf{w}}_t^i$. Векторы $\tilde{\mathbf{r}}_t^i = [\tilde{r}_t^{i,k}]$ и $\tilde{\mathbf{z}}_t^i = [\tilde{z}_t^{i,k}]$ состоят из компонент

$$\tilde{r}_t^{i,k} = \begin{cases} p_t^{i,k} / p_{t,av}^{i,k}, & \text{если } \tilde{p}_t^{i,k} > 0; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \tilde{z}_t^{i,k} = \begin{cases} z_t^{i,k} / p_{t,av}^{i,k}, & \text{если } \tilde{p}_t^{i,k} > 0; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

и $\tilde{\mathbf{w}}_t^i = \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} \mathbf{w}_t^{i,j}$; $B_t \otimes I_m$ — кронекерово произведение, являющееся блочной матрицей размера $nm \times nm$.

В случае, если $\bar{s} > 0$, мы «искусственно» добавляем $n\bar{s}$ новых агентов в имеющуюся топологию сети. В каждый момент времени t новые «мнимые» агенты обладают состояниями, равными соответствующим состояниям «настоящих» агентов в предыдущие моменты времени $t-1, t-2, \dots, t-\bar{s}$. То же самое проделываем для каждого класса $k = 1, \dots, m$. Пусть $x_t^{i,k} \equiv 0, i \in N$ для $-\bar{s} \leq t < 0$. Обозначим $\bar{\mathbf{X}}_t \in \mathbb{R}^{\bar{n}}, \bar{n} = nm(\bar{s}+1)$, расширенный вектор состояния для $t = 0, 1, \dots$, состоящий из $\bar{s}+1$ (nm)-векторов $\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \dots, \mathbf{X}_{t-\bar{s}}$, то есть включающий все компоненты для задержек любой длины, не превышающей \bar{s} . Введем обозначение \tilde{n} для $n(\bar{s}+1)$. Введем расширенную матрицу протокола управления (5) \bar{B}_t размера $\tilde{n} \times \tilde{n}$, состоящую из нулей на всех местах, кроме $|\bar{N}_t^i|$ вхождений $\bar{b}_t^{i,j+n\bar{s}^{i,j}}$ для всех $i \in N, j \in \bar{N}_t^i$ из n первых строк, которые равны $b_t^{i,j}$ и $\bar{b}_t^{i,i-n} = 1/\gamma$ в следующих $n\bar{s}$ строках, $i = n+1, \dots, \tilde{n}$.

Можно переписать уравнение динамики системы согласно виду лапласовой матрицы $\mathcal{L}(\bar{B}_t \otimes I_m)$:

$$\bar{\mathbf{X}}_{t+1} = \bar{\mathbf{X}}_t - \gamma \mathcal{L}(\bar{B}_t \otimes I_m) \bar{\mathbf{X}}_t + \begin{pmatrix} -\mathbf{R}_t + \mathbf{Z}_t + \gamma \mathbf{W}_t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

5. Основной результат.

Предположения. Пусть выполнены следующие условия.

• A1. Граф $\mathcal{G}_{B_{av}}$ имеет остовное дерево (для того чтобы консенсус в системе был достижим [3]).

• A2. а) Для любых $i \in N, j \in \bar{N}_t^i$ векторы помех наблюдений $\mathbf{w}_t^{i,j}$ — центрированные, независимые и одинаково распределенные случайные векторы с ограниченной дисперсией: $E(\mathbf{w}_t^{i,j})^2 \leq \sigma_w^2$.

б) Для любых $i \in N, j \in N_{\max}^i = \cup_t \bar{N}_t^i$ появление «изменяющегося во времени» ребра (j, i) в графе \mathcal{G}_{B_t} — независимое случайное событие. Для всех $i \in N, j \in \bar{N}_t^i$ веса $b_t^{i,j}$ в протоколе управления — независимые случайные величины с математическим ожиданием $E b_t^{i,j} = b^{i,j}$ и ограниченной дисперсией $E(b_t^{i,j} - b^{i,j})^2 \leq \sigma_b^2$. Обозначим $B_{av} = EB_t$ соответствующую матрицу смежности.

с) Для любых $i \in N, j \in N^i$ существует конечная целая неотрицательная величина $\bar{s} \in \mathbb{Z}^+$: $s_t^{i,j} \leq \bar{s}$ с вероятностью 1, и целочисленные задержки $s_t^{i,j}$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, принимающими значения $l = 0, \dots, \bar{s}$ с вероятностью $S_t^{i,j}$.

д) Для любых $k = 1, \dots, m, i \in N, t = 0, 1, \dots$ случайные величины $z_t^{i,k}$ независимы и имеют математические ожидания $E z_t^{i,k} = \bar{z}^k$, не зависящие от i , и дисперсии $E(z_t^{i,k} - \bar{z}^k)^2 \leq \sigma_{z,k}^2$.

е) Для любых $i \in N, t = 0, 1, \dots$ случайные векторы \mathbf{r}_t^i независимы, одинаково распределены и состоят из независимых случайных компонент. Случайные величины $\tilde{r}_t^{i,k}, k = 1, \dots, m$, имеют математические ожидания $E \tilde{r}_t^{i,k} = \bar{r}^k$, не зависящие от i .

Кроме того, все упомянутые в предположениях A2,a-d независимые случайные величины и векторы не зависят друг от друга.

Заметим, если предположения A2,b,c выполняются, то усредненная матрица

$\bar{B}_{av} = E\bar{B}_t$ состоит из элементов

$$\bar{b}_{av}^{i,j,k} = \begin{cases} S_{j \div n}^{i,j \bmod n} b^{i,j \bmod n}, & \text{если } i \in N, j \bmod n \neq 0, \\ S_{j \div n}^{i,n} b^{i,n}, & \text{если } i \in N, j \bmod n = 0, \\ 1/\gamma_k, & \text{если } i = n+1, \dots, \bar{n}, j = i-n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8)$$

Здесь \bmod — операция взятия остатка от деления, а \div — деление без остатка. Если $\bar{s} = 0$, то $\bar{B}_{av} = B_{av}$.

• А3. Размер шага протокола управления $\gamma > 0$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\delta = |\operatorname{Re}(\lambda_2(\mathcal{L}(\bar{B}_{av} \otimes I_m)))| - \gamma \operatorname{Re}(\lambda_{\max}(Q)) > 0, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{\max\{d_{\max}(B_{av}), \delta\}}, \quad (9)$$

где $Q = EC_t^T C_t$, $C_t = \mathcal{L}(\bar{B}_{av} \otimes I_m) - \mathcal{L}(\bar{B}_t \otimes I_m)$.

Усредненная модель. Пусть \mathbf{x}_0^* — средневзвешенный вектор начальных состояний размерности m : $\mathbf{x}_0^* = \sum_i g_i \mathbf{x}_0^i / \sum_i g_i$, где g^T — левый собственный вектор матрицы B_{av} [4], и $\{\mathbf{x}_t^*\}$ — траектории усредненных систем

$$\mathbf{x}_{t+1}^* = \mathbf{x}_t^* + \bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{r}}, \quad \bar{\mathbf{z}} = [\bar{z}^k], \quad \bar{\mathbf{r}} = [\bar{r}^k]. \quad (10)$$

Заметим, что в случае сбалансированной топологии графа $\mathcal{G}_{B_{av}}$ $\mathbf{x}_0^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_0^i$.

Дифференцированный консенсус. Рассмотрим векторы $\bar{\mathbf{X}}_t^* \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$, $t = 0, 1, \dots$, состоящие из $\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{x}_t^*$, $\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{x}_{t-1}^*$, \dots , $\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{x}_{t-\bar{s}}^*$.

Теорема 2. Если для систем с обратными связями (6) и (10) выполнены предположения А1–А3, то справедливо следующее неравенство:

$$E\|\bar{\mathbf{X}}_t - \bar{\mathbf{X}}_0^*\|^2 \leq \frac{\Delta}{\gamma\delta} + (1 - \gamma\delta)^t \left(\|\bar{\mathbf{X}}_0 - \bar{\mathbf{X}}_0^*\|^2 - \frac{\Delta}{\gamma\delta} \right), \quad (11)$$

где

$$\Delta = 2m\sigma_w^2\gamma^2 (n^2\sigma_b^2 + \|B_{av}\|^2) + n \sum_{k=1}^m (\sigma_{z,k}^2 + (1 - P_k)^2),$$

то есть, если $E\|\bar{\mathbf{X}}_0 - \bar{\mathbf{X}}_0^*\|^2 < \infty$, то асимптотический среднеквадратичный ε -консенсус в (6) достигается с $\varepsilon \leq \Delta/\gamma\delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим векторы $\bar{\mathbf{X}}_t^* \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$, $t = 0, 1, \dots$, состоящие из $\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{x}_t^*$, $\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{x}_{t-1}^*$, \dots , $\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{x}_{t-\bar{s}}^*$ и удовлетворяющие уравнению

$$\bar{\mathbf{X}}_{t+1}^* = U\bar{\mathbf{X}}_t^* + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Z}} - \bar{\mathbf{R}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $\mathbf{1}_n$ — n -мерный вектор, состоящий из единиц, $\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{1}_n \otimes \bar{z}$, $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{1}_n \otimes \bar{r}$, а U — матрица размера $\bar{n} \times \bar{n}$:

$$U = \begin{pmatrix} I_{nm} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I_{nm} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_{nm} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_{nm} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\mathbf{1}_{\bar{n}}$ является правым собственным вектором лапласианов $\bar{\mathcal{L}}_t = \gamma \mathcal{L}(\bar{B}_t \otimes I_m)$ и $\tilde{\mathcal{L}} = \gamma \mathcal{L}(\bar{B}_{av} \otimes I_m)$, соответствующим нулевому собственному числу: $\bar{\mathcal{L}}_t \mathbf{1}_{\bar{n}} = \tilde{\mathcal{L}} \mathbf{1}_{\bar{n}} = 0$. Суммы по всем элементам в строках матриц $\bar{\mathcal{L}}_t$ или $\tilde{\mathcal{L}}$ равны нулю и, более того, все их диагональные элементы положительны и равны модулю суммы всех остальных элементов в строке.

По определению матрицы $\bar{\mathcal{L}}_t$ для разностей траекторий систем (7) и (12) $\nu_{t+1} = \bar{\mathbf{X}}_{t+1} - \bar{\mathbf{X}}_{t+1}^*$ имеем

$$\nu_{t+1} = \bar{\mathbf{X}}_t - \bar{\mathcal{L}}_t \bar{\mathbf{X}}_t + \begin{pmatrix} \mathbf{F}_t + \gamma \mathbf{W}_t \\ 0 \end{pmatrix} - U \bar{\mathbf{X}}_t^* - \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{F}} \\ 0 \end{pmatrix} = \nu_t - \bar{\mathcal{L}}_t \nu_t + \begin{pmatrix} \gamma \mathbf{W}_t + \mathbf{F}_t - \bar{\mathbf{F}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{F}_t = \mathbf{Z}_t - \mathbf{R}_t$ и $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{Z}} - \bar{\mathbf{R}}$.

Обозначим $\tilde{\mathcal{F}}_t$ σ -алгебру всех случайных событий, образованную случайными событиями $\mathbf{x}_0^i, \mathbf{w}_0^{i,j}, \dots, \mathbf{w}_{t-1}^{i,j}, \mathbf{z}_0^i, \dots, \mathbf{z}_{t-1}^i, s_0^{i,j}, \dots, s_{t-1}^{i,j}, \mathbf{p}_0^i, \dots, \mathbf{p}_{t-1}^i, b_0^{i,j}, \dots, b_{t-1}^{i,j}, i, j \in N$. Рассмотрим условное математическое ожидание квадрата нормы ν_{t+1} , добавляя и вычитая $\tilde{\mathcal{L}}\nu_t$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \|\nu_{t+1}\|^2 &= \|(I_{\bar{n}} - \tilde{\mathcal{L}})\nu_t\|^2 + 2\nu_t^T (I_{\bar{n}} - \tilde{\mathcal{L}})^T (\tilde{\mathcal{L}} - \bar{\mathcal{L}}_t) \nu_t + \\ &\quad + 2\nu_t^T (I_{\bar{n}} - \bar{\mathcal{L}}_t)^T \begin{pmatrix} \gamma \mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \mathbf{W}_t + \mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} (\mathbf{F}_t - \bar{\mathbf{F}}) \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &\quad + 2\gamma \mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \mathbf{W}_t^T (\mathbf{F}_t - \bar{\mathbf{F}}) + \nu_t^T (\tilde{\mathcal{L}} - \bar{\mathcal{L}}_t)^T (\tilde{\mathcal{L}} - \bar{\mathcal{L}}_t) \nu_t + \gamma^2 \mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \|\mathbf{W}_t\|^2 + \mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \|\mathbf{F}_t - \bar{\mathbf{F}}\|^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Согласно предположениям A2,d,e и независимости \mathbf{F}_t от σ -алгебры $\tilde{\mathcal{F}}_t$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} (\mathbf{F}_t - \bar{\mathbf{F}}) &= \mathbb{E}(\mathbf{F}_t - \bar{\mathbf{F}}) = 0, \\ \mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \|\mathbf{F}_t - \bar{\mathbf{F}}\|^2 &= \mathbb{E} \|\mathbf{F}_t - \bar{\mathbf{F}}\|^2 = n \sum_{k=1}^m \sigma_{z,k}^2 + (1 - P_k)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

По предположению A2,a взаимной независимости $w_t^{i,j}$, $i, j \in N$, и их независимости от \mathbf{F}_t и σ -алгебры $\tilde{\mathcal{F}}_t$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \sum_{j \in \bar{N}_t^1} b_t^{i,j} (\mathbf{w}_t^{i,i} - \mathbf{w}_t^{i,j}) &= \sum_{j \in \bar{N}_t^1} b_t^{i,j} \mathbb{E}(\mathbf{w}_t^{i,i} - \mathbf{w}_t^{i,j}) = 0, \\ \mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \sum_{j \in \bar{N}_t^1} b_t^{i,j} (\mathbf{w}_t^{i,i} - \mathbf{w}_t^{i,j}) (\mathbf{F}_t - \bar{\mathbf{F}}) &= \sum_{j \in \bar{N}_t^1} b_t^{i,j} \mathbb{E}(\mathbf{w}_t^{i,i} - \mathbf{w}_t^{i,j}) \mathbb{E}(\mathbf{F}_t - \bar{\mathbf{F}}) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

и

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \left(\sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} (\mathbf{w}_t^{i,i} - \mathbf{w}_t^{i,j}) \right)^2 = \sum_{j \in \bar{N}_t^i} (b_t^{i,j})^2 \left(\mathbb{E}(\mathbf{w}_t^{i,i})^2 + \mathbb{E}(\mathbf{w}_t^{i,j})^2 \right) = 2m\sigma_w^2 \sum_{j \in \bar{N}_t^i} (b_t^{i,j})^2. \quad (16)$$

Принимая во внимание выражения (14)–(16) и обозначив $\bar{\mathbf{b}}_t$ вектор, состоящий из компонент $\sum_{j \in \bar{N}_t^i} (b_t^{1,j})^2, \dots, \sum_{j \in \bar{N}_t^n} (b_t^{n,j})^2$, выводим из (13)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \|\nu_{t+1}\|^2 &= \|(I_{\bar{n}} - \tilde{\mathcal{L}})\nu_t\|^2 + 2\nu_t^T (I_{\bar{n}} - \tilde{\mathcal{L}})^T (\tilde{\mathcal{L}} - \bar{\mathcal{L}}_t) \nu_t + \\ &\quad + \nu_t^T (\tilde{\mathcal{L}} - \bar{\mathcal{L}}_t)^T (\tilde{\mathcal{L}} - \bar{\mathcal{L}}_t) \nu_t + 2m\sigma_w^2 \gamma^2 \bar{\mathbf{b}}_t + n \sum_{k=1}^m (\sigma_{z,k}^2 + (1 - P_k)^2). \end{aligned} \quad (17)$$

Обозначим \mathcal{F}_t σ -алгебру случайных событий, образованную $\tilde{\mathcal{F}}_t$ и случайными событиями $\mathbf{w}_t^{i,j}, \mathbf{z}_t^i, s_t^{i,j}, \mathbf{p}_t^i, b_t^{i,j}$, $i, j \in N$, совершившимися в момент времени t .

Рассмотрим условные математические ожидания обеих сторон уравнения (17). Согласно стохастическим свойствам неопределенностей A2,b,c и независимости \bar{B}_t и $\bar{\mathbf{b}}_t$ от σ -алгебры $\tilde{\mathcal{F}}_t$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathcal{F}_t} \|\nu_{t+1}\|^2 &= \|(I_{\bar{n}} - \tilde{\mathcal{L}})\nu_t\|^2 + \gamma^2 \nu_t^T Q \nu_t + 2m\sigma_w^2 \gamma^2 \mathbb{E}_{\mathcal{F}_t} \bar{\mathbf{b}}_t + n \sum_{k=1}^m (\sigma_{z,k}^2 + (1 - P_k)^2) \leq \\ &\leq (1 - \gamma\delta) \|\nu_t\|^2 + 2m\sigma_w^2 \gamma^2 \left(n^2 \sigma_b^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (b^{i,j})^2 \right) + n \sum_{k=1}^m (\sigma_{z,k}^2 + (1 - P_k)^2) = \\ &= (1 - \gamma\delta) \|\nu_t\|^2 + \Delta. \end{aligned}$$

Взяв безусловное математическое ожидание, получим неравенство $\mathbb{E} \|\nu_{t+1}\|^2 \leq (1 - \gamma\delta) \mathbb{E} \|\nu_t\|^2 + \Delta$, с помощью последовательного применения которого выводим неравенство (11) из теоремы 1. Второй вывод об асимптотическом среднеквадратичном ε -консенсусе следует из неравенства (11) при $t \rightarrow \infty$.

6. Имитационное моделирование. Рассмотрим сеть из пяти агентов с топологией $\{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 4), (4, 5), (5, 3)\}$. Предположим, что связи между агентами пропадают с вероятностью $1/5$, а «диагональные» связи могут появляться с такой же вероятностью. Максимальная задержка при информационном обмене \bar{b} равна 1, а вероятность появления задержки равна $1/3$ и одинакова для всех ребер. Пусть в системе присутствуют два класса заданий. Доли производительности равны $2 : 1$, то есть при условии, что все очереди непусты, производительность агентов будет разделена между классами следующим образом: $\frac{2}{2+1}p = \frac{2}{3}p$ и $\frac{1}{3}p$ соответственно. Пусть на топологию наложены ограничения $c_1 = 10, c_2 = 1.5$.

В этом случае B_{av} для приоритета 1 имеет вид

$$B_{av} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \cdot \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 \cdot \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 9 \cdot \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 1 \cdot \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & 9 \cdot \frac{4}{5} & 1 \cdot \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 \cdot \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что топология графа связей $\mathcal{G}_{B_{av}}$ сбалансированная.

Выберем $\gamma = 1/10$. Для B_{av} имеем $d_{\max}(B_{av}) = 42/5$.

Матрица \bar{B}_{av} выглядит следующим образом:

$$\bar{B}_{av} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}B_{av} & \frac{1}{3}B_{av} \\ 10I & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае $|\operatorname{Re}(\lambda_2(\mathcal{L}(\bar{B}_{av} \otimes I_m)))| = 1.5526$, $\operatorname{Re}(\lambda_{\max}(Q)) = 0.4963$. Видим, что оба неравенства $\delta = |\operatorname{Re}(\lambda_2(\mathcal{L}(\bar{B}_{av} \otimes I_m)))| - \gamma \operatorname{Re}(\lambda_{\max}(Q)) = 1.5526 - 0.1 \cdot 0.4963 = 1.5030 > 0$ и $1/10 = \gamma \leq \frac{1}{\max\{d_{\max}(B_{av}), \delta\}} = \frac{1}{\max\{42/5, 1.5030\}} = \frac{5}{42}$ выполнены, поэтому условия (9) удовлетворены в примере.

На рис. 1 показаны типичные зависимости длины очереди заданий $q_t^{i,k}$ всех приоритетов на агентах от времени. В примере на агентов поступают задания со сложностью в одну условную операцию, а производительности агентов равны одной условной операции за такт. Чем больше доля производительности для класса заданий,

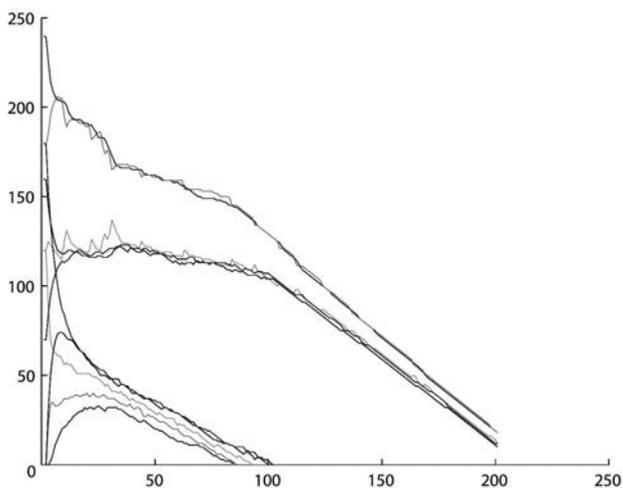


Рис. 1. Сходимость к консенсусным значениям загрузок агентов в примере для трех классов заданий.

тем быстрее уменьшаются соответствующие этому классу состояния агентов, что отражается на графике в виде угла наклона траектории, к которой сходятся длины очередей.

7. Заключение. В статье рассмотрена задача о достижении *дифференцированно-го консенсуса*. А именно, изучалось поведение распределенной стохастической сети с изменяющейся топологией, помехами и задержками при передаче данных, в которую поступают задания с различными приоритетами. Предложена новая управляющая рандомизированная стратегия распределения ресурсов сети для выполнения заданий различных уровней приоритета, которая позволяет удовлетворить задаваемым усредненным стоимостным ограничениям. Для иллюстрации полученных теоретических результатов проведено численное моделирование, показывающее работоспособность предложенного протокола управления.

В статье рассмотрены линейная постановка задачи и неопределенности статистической природы. Возможности алгоритма локального голосования в задаче с нелинейной постановкой изучались в [6], нелинейная версия алгоритма — в [12]. В будущем планируется исследовать работоспособность алгоритма *при ограниченных, а в остальном почти произвольных* неопределенностях, как в [13, 14].

Литература

1. Ren W., Beard R. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies // IEEE Transactions on Automatic Control 2005. Vol. 50, Issue 5. P. 655–661.
2. Bullo F., Cortés J., Martinez, S. Distributed control of robotic networks: a mathematical approach to motion coordination algorithms. Princeton University Press. 2009.
3. Чеботарев П. Ю., Агаев П. П. Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // Автоматика и телемеханика. 2009. №3. С. 136–151.
4. Lewis F. L., Zhang H., Hengster-Movric K., Das A. Cooperative Control of Multi-Agent Systems: Optimal and Adaptive Design Approaches (Communications and Control Engineering). Springer, 2014. P. 307.

5. *Granichin O., Skobelev P., Lada A., Mayorov I. and Tsarev A.* Comparing adaptive and non-adaptive models of cargo transportation in multi-agent system for real time truck scheduling // Proc. of the 4th International Conference on Computational Intelligence. P. 282–285 (Evolutionary Computation Theory and Applications, ECTA'2012, October 5–7, 2012, Barcelona, Spain).
6. *Amelina N., Fradkov A., Jiang Y., Vergados D. J.* Approximate Consensus in Stochastic Networks with Application to Load Balancing // IEEE Transactions on Information Theory. April 2015. Vol. 61, Issue 4. P. 1739–1752.
7. *Granichin O. N., Amelina N. O.* Simultaneous perturbation stochastic approximation for tracking under unknown but bounded disturbances // IEEE Trans. Automat. Contr. 2015. Vol. 60, Issue 6. June 2015. P. 1653–1658.
8. *Amelina N., Granichin O., Granichina O., Ivanskiy Y., Jiang Y.* Differentiated Consensus in a Stochastic Network with Priorities // Proc. of 2014 IEEE Multi-conference on Systems and Control. October 8–10. 2014. Antibes. France. P. 264–269.
9. *Amelina N., Granichin O., Granichina O., Jiang Y.* Differentiated Consensus in Decentralized Load Balancing Problem with Randomized Topology, Noise, and Delays // IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2014). 2014. P. 4613–4618.
10. *Dovrolis C., Ramanathan P.* A case for relative differentiated services and the proportional differentiation model // IEEE Network. 1999. Vol. 56, N 7. P. 3315–3326.
11. *Yuming J., Chen-Khong T., Chi-Chung K.* A probabilistic priority scheduling discipline for multi-service networks // Computer Communications. 2002. Vol. 25, N 13. P. 1243–1254.
12. *Amelina N., Fradkov A.* Analysis of Nonlinear Local Voting Protocol for Stochastic Dynamical Networks // Proc. of 2014 IEEE Multi-conference on Systems and Control. October 8–10. 2014. Antibes/Nice, France. P. 693–698.
13. *Granichin O. N.* Linear regression and filtering under nonstandard assumptions (Arbitrary noise) // IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 49. Oct. 2004. P. 1830–1835.
14. *Granichin O., Volkovich V., Toledano-Kitai D.* Randomized Algorithms in Automatic Control and Data Mining. Springer-Verlag: Heidelberg; New York; Dordrecht; London, 2015.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

Сведения об авторах

Амелина Наталья Олеговна — кандидат физико-математических наук; n.amelina@spbu.ru

Иванский Юрий Владимирович — аспирант; ivanskiy.yuriy@gmail.com

NEW DIFFERENTIATED CONSENSUSES PROBLEM FOR STOCHASTIC NETWORKS WITH PRIORITIES

Natalia O. Amelina, Yury V. Ivanskiy

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; n.amelina@spbu.ru, ivanskiy.yuriy@gmail.com

In this paper, a new consensus problem, termed differentiated consensus, is studied. This consensus problem is that, in a system with multiple classes, consensus is targeted for each class, which may be different among classes. Specifically, we investigate differentiated consensus in a distributed stochastic network system of nodes (or agents), where tasks, classified with different priorities, are serviced. The network system is assumed to have switched topology, noise and delay in measurement, and cost on the topology. The goal is to reach/maintain balanced (equal) load, i.e. consensus, across the network and at the same time to meet the topology cost constraint, both for every priority class. A control protocol is proposed. With this protocol, network resources are allocated in a randomized way with probabilities corresponding to each priority class. We prove that the proposed control protocol is able to meet the topology cost constraint and achieve approximate consensus for each of the priority classes in the network. Refs 14. Figs 1.

Keywords: differentiated consensus, switched topology, load balancing.

References

1. Ren W., Beard R., “Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies”, *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**(5), 655–661 (2005).
2. Bullo F., Cortés J., Martine S., *Distributed control of robotic networks: a mathematical approach to motion coordination algorithms* (Princeton University Press, 2009).
3. Chebotarev P. Yu., Agaev R. P., “Coordination in multiagent systems and Laplacian spectra of digraphs”, *Automation and Remote Control* **50**(3), 469–483 (2009) [in Russian].
4. Lewis F.L., Zhang H., Hengster-Movric K., Das A., *Cooperative Control of Multi-Agent Systems: Optimal and Adaptive Design Approaches (Communications and Control Engineering)* (Springer, 2014).
5. Granichin O., Skobelev P., Lada A., Mayorov I., Tsarev A., “Comparing adaptive and non-adaptive models of cargo transportation in multi-agent system for real time truck scheduling”, *Proc. of the 4th International Conference on Computational Intelligence*, 282–285 (Evolutionary Computation Theory and Applications, ECTA’2012, October 5–7, 2012, Barcelona, Spain).
6. Amelina N., Fradkov A., Jiang Y., Vergados D. J., “Approximate Consensus in Stochastic Networks with Application to Load Balancing”, *IEEE Transactions on Information Theory* **61**(4), 1739–1752 (2015).
7. Granichin O. N., Amelina N. O., “Simultaneous perturbation stochastic approximation for tracking under unknown but bounded disturbances”, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **60**(6), 1653–1658 (2015).
8. Amelina N., Granichin O., Granichina O., Ivanskiy Y., and Jiang Y., “Differentiated Consensus in a Stochastic Network with Priorities”, *Proc. of 2014 IEEE Multi-conference on Systems and Control*, Antibes, France, 264–269 (2014).
9. Amelina N., Granichin O., Granichina O., Jiang Y., “Differentiated Consensus in Decentralized Load Balancing Problem with Randomized Topology, Noise, and Delays” *IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2014)*, 4613–4618 (2014).
10. Dovrolis C., Ramanathan P., “A case for relative differentiated services and the proportional differentiation model”, *IEEE Network* **56**(7), 3315–3326 (1999).
11. Yuming J., Chen-Khong T., Chi-Chung K., “A probabilistic priority scheduling discipline for multi-service networks”, *Computer Communications* **25**(13), 1243–1254 (2002).
12. Amelina N., Fradkov A., “Analysis of Nonlinear Local Voting Protocol for Stochastic Dynamical Networks”, *Proc. of 2014 IEEE Multi-conference on Systems and Control*, Antibes/Nice, France, 693–698 (2014).
13. Granichin O. N., “Linear regression and filtering under nonstandard assumptions (Arbitrary noise)”, *IEEE Transactions on Automatic Control* **49**, 1830–1835 (2004).
14. Granichin O., Volkovich V., Toledano-Kitai D., *Randomized Algorithms in Automatic Control and Data Mining* (Springer-Verlag: Heidelberg New York Dordrecht London, 2015).