УДК 510.225 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 4

ОБ α-ДОСТИЖИМЫХ ОБЛАСТЯХ*

К. Ф. Амозова, Е. Г. Ганенкова

Петрозаводский государственный университет,
Российская Федерация, Республика Карелия, 185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33

Рассматривается класс A_ρ^α α-достижимых относительно нуля областей D, $\alpha \in [0;1]$, для которых $\min\limits_{p\in\partial D}\|p\| = \rho$, $\rho \in (0;+\infty)$. Такие области удовлетворяют условию конуса, то есть достижимы изнутри по конусу. Найдено максимальное множество точек, относительно которых все области из A_ρ^α будут β-достижимыми, $0 \le \beta \le \alpha$ (задача поставлена проф. С. И. Дудовым). Доказано, что если $\alpha = 1$, $\beta = 0$, то этим множеством является шар радиуса ρ с центром в нуле, в остальных случаях получаем замкнутый шар радиуса $\rho \sin\frac{(\alpha-\beta)\pi}{2}$ с центром в нуле.

Для α-достижимых относительно нуля областей $D \subsetneq \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0;1]$, получена точная оценка сверху отношения $\max\limits_{p\in\partial D}\|p\|/\min\limits_{p\in\partial D}\|p\|$ (задача поставлена проф. С. Р. Насыровым). Библиогр. 13 назв. Ил. 2.

Ключевые слова: α-достижимая область, условие конуса.

Пусть x, $y \in \mathbb{R}^n$, (x, y) — скалярное произведение. Обозначим $\mathbb{B}^n[x,R]$ и $\mathbb{B}^n(x,R)$ замкнутый и открытый евклидовы шары в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x и радиуса R.

Определение 1 [1]. *Пусть* $\alpha \in [0;1]$. *Область* $D \subset \mathbb{R}^n$ *называется* α-*достижимой относительно точки* $a \in D$, *если для каждой точки* $p \in \partial D$ *существует такое число* $r = r(p) > 0$, *что конус*

$$K_+(p,a,\alpha,r) = \left\{x \in \mathbb{B}^n[p,r]: \ \left(x-p, \frac{p-a}{\|p-a\|}\right) \ge \|x-p\|\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right\}$$

содержится в $\mathbb{R}^n \backslash D$.

В [1] было доказано, что α-достижимые области являются звездообразными и удовлетворяют *условию конуса*, важному для приложений, например таких, как теория интегральных представлений функции, теоремы вложения, вопросы граничного поведения функций, разрешимости задачи Дирихле (см., например, [2, гл. 1, § 8; 3–5]).

Отметим, что α-достижимые области подробно изучались в [1, 6–9].

Пусть A_ρ^α — класс α-достижимых относительно нуля областей D, таких, что

$$\min_{p\in\partial D}\|p\| = \rho,$$

где ρ — фиксированное число из интервала $(0;+\infty)$.

На 17-й Международной саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» (27 января — 3 февраля 2014 г.) профессором С. И. Дудовым была поставлена задача описания множества точек, относительно которых все области из A_ρ^α будут β-достижимыми, $0 \le \beta \le \alpha$. Решением этой задачи является теорема 1.

Обозначим через Ω_D^β множество, состоящее из тех точек области $D \in A_\rho^\alpha$, относительно которых D является β-достижимой, $0 \le \beta \le \alpha$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00510) и Программы стратегического развития ПетрГУ.

Теорема 1. *1) Если $\alpha \in [0;1), \beta \in [0;\alpha]$ или $\alpha = 1, \beta \neq 0$, то*

$$\bigcap_{D \in A_\rho^\alpha} \Omega_D^\beta = \mathbb{B}^n \left[0, \rho \sin \frac{(\alpha-\beta)\pi}{2}\right];$$

2) если $\alpha = 1$, $\beta = 0$, то $\bigcap\limits_{D \in A_\rho^1} \Omega_D^0 = \mathbb{B}^n(0,\rho)$.

Доказательство. Заметим, что классу A_ρ^1 принадлежит только шар $\mathbb{B}^n(0,\rho)$. Приведем доказательство этого факта методом от противного. Пусть $G \in A_\rho^1$. Предположим, что существуют p_1, $p_2 \in \partial G$ такие, что

$$\|p_1\| \neq \|p_2\|. \tag{1}$$

Рассмотрим сечение G_1 области G плоскостью, проходящей через 0, p_1 и p_2. Так как $\alpha > 0$, область G строго звездообразна относительно 0 (см. [1], о звездообразных областях см. также [10]), поэтому ∂G_1 можно задать уравнением $r = r(\varphi)$ в полярных координатах. Пусть p_1, p_2 имеют полярные координаты $(\varphi_1, r(\varphi_1))$ и $(\varphi_2, r(\varphi_2))$ соответственно. Обозначим через $M(\varphi)$ точку на ∂G_1 с полярными координатами $(\varphi, r(\varphi))$. Пусть $N(\varphi+\delta)$ — точка на границе неограниченного конуса

$$K_+^2(M(\varphi),0,1) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \ (x - M(\varphi), M(\varphi)) \geq 0\right\} \subset G_1,$$

лежащая на луче с началом в нуле, проходящим через точку $M(\varphi+\delta)$ (см. рис. 1).

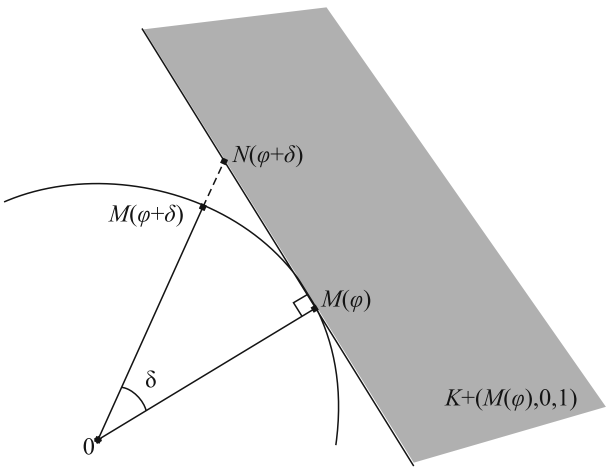

Рис. 1. Сечение G_1 области G плоскостью, проходящей через 0, p_1 и p_2.

Из определения α-достижимости области сечение G_1 α-достижимой области G само является α-достижимой областью, поэтому граничная точка $M(\varphi+\delta)$ области G_1 не лежит внутри конуса $K_+(M(\varphi),0,1)$, тогда из прямоугольного треугольника $N(\varphi+\delta)$, $M(\varphi)$, 0 имеем

$$r(\varphi+\delta) \leq r(\varphi)\frac{1}{\cos\delta}.$$

Следовательно, найдется константа $C(\varphi)$, для которой

$$r(\varphi+\delta) - r(\varphi) \leq r(\varphi)\left(\frac{1}{\cos\delta} - 1\right) \leq C(\varphi)\delta^2$$

при достаточно малых δ. Поскольку при $\alpha > 0$ α-достижимая область ограничена (см. [1]), $C = \sup\limits_{\varphi} C(\varphi) < \infty$.

Пусть $\varphi_2 > \varphi_1$. Тогда для $n \in \mathbb{N}$

$$r(\varphi_2) - r(\varphi_1) = \left(r\left(\varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{n} \cdot n\right) - r\left(\varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{n} \cdot (n-1)\right)\right) +$$
$$+ \left(r\left(\varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{n} \cdot (n-1)\right) - r\left(\varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{n} \cdot (n-2)\right)\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left(r\left(\varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{n}\right) - r\left(\varphi_1\right)\right) \leq n \cdot C \cdot \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n} \cdot C \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)^2 .$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим, что $r(\varphi_2) \leq r(\varphi_1)$ для любых $\varphi_2 > \varphi_1$. Меняя φ_1 и φ_2 ролями, получим, что $r(\varphi) \equiv \mathrm{const}$. Противоречие с (1). То есть $A^1_\rho = \mathbb{B}^n(0, \rho)$.

Если $D \in A^\alpha_\rho$, $\alpha \in [0; 1]$, то по свойствам унитарных преобразований U

$$UD \in A^\alpha_\rho.$$

Следовательно, $\bigcap\limits_{D \in A^\alpha_\rho} \Omega^\beta_D$ — шар.

1. Пусть $\alpha \in [0; 1), \beta \in [0; \alpha]$ или $\alpha = 1, \beta \neq 0$.

Покажем, что $\mathbb{B}^n \left[0, \rho \sin \dfrac{(\alpha - \beta)\pi}{2}\right] \subset \Omega^\beta_D$ для любого $D \in A^\alpha_\rho$.

В [1] было показано, что область D является α-достижимой относительно точки $a \in D$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $q \in \partial D$ неограниченный конус

$$K_+(q, a, \alpha) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \left(x - q, \frac{q - a}{\|q - a\|}\right) \geq \|x - q\| \cos \frac{\alpha\pi}{2}\right\}$$

содержится в $\mathbb{R}^n \backslash D$.

Пусть $D \in A^\alpha_\rho$. Зафиксируем $p \in \partial D$. Тогда $K_+(p, 0, \alpha) \subset \mathbb{R}^n \backslash D$.

Покажем, что для всех точек a, принадлежащих пересечению области D с конусом

$$K_-(p, 0, \alpha - \beta) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \left(x - p, \frac{-p}{\|p\|}\right) \geq \|x - p\| \cos \frac{(\alpha - \beta)\pi}{2}\right\},$$

справедливо включение $K_+(p, a, \beta) \subset K_+(p, 0, \alpha)$. Фиксируем $a \in K_-(p, 0, \alpha - \beta) \cap D$, тогда

$$\left(a - p, \frac{-p}{\|p\|}\right) \geq \|a - p\| \cos \frac{(\alpha - \beta)\pi}{2},$$

что равносильно

$$\arccos\left(\frac{p - a}{\|p - a\|}, \frac{p}{\|p\|}\right) \leq \frac{(\alpha - \beta)\pi}{2}. \tag{2}$$

Пусть $x \in K_+(p, a, \beta)$, $x \neq p$, то есть

$$\arccos\left(\frac{x - p}{\|x - p\|}, \frac{p - a}{\|p - a\|}\right) \leq \frac{\pi\beta}{2}. \tag{3}$$

Из (2), (3) и сферического неравенства треугольника следует

$$\arccos\left(\frac{x-p}{\|x-p\|}, \frac{p}{\|p\|}\right) \le \arccos\left(\frac{x-p}{\|x-p\|}, \frac{p-a}{\|p-a\|}\right) + \arccos\left(\frac{p-a}{\|p-a\|}, \frac{p}{\|p\|}\right) \le$$
$$\le \frac{\pi\beta}{2} + \frac{(\alpha-\beta)\pi}{2} = \frac{\pi\alpha}{2}.$$

Значит $x \in K_+(p,0,\alpha)$. Следовательно, $K_+(p,a,\beta) \subset K_+(p,0,\alpha) \subset \mathbb{R}^n \backslash D$. Таким образом, множество точек $a \in D$, для которых $K_+(p,a,\beta) \subset \mathbb{R}^n \backslash D$, содержит множество $K_-(p,0,\alpha-\beta) \cap D$.

Радиус $R(p)$ шара с центром в точке 0, вписанного в $K_-(p,0,\alpha-\beta)$, равен

$$R(p) = \|p\| \sin\frac{(\alpha-\beta)\pi}{2}.$$

Обозначим

$$R = \min_{p\in\partial D} R(p) = \rho \sin\frac{(\alpha-\beta)\pi}{2}.$$

Тогда шар $\mathbb{B}^n[0,R]$ содержится в $K_-(p,0,\alpha-\beta) \cap D$ для любого $p \in \partial D$. Следовательно, $\mathbb{B}^n[0,R] \subset \Omega_D^\beta$ для любого $D \in A_\rho^\alpha$.

Покажем, что в последнем включении константу R увеличить нельзя. Для этого в классе A_ρ^α достаточно найти область D_0 такую, что $\mathbb{B}^n[0,R] \subset \Omega_{D_0}^\beta$, но для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{B}^n[0,R+\varepsilon] \not\subseteq \Omega_{D_0}^\beta.$$

а) Пусть $\alpha \in (0;1)$, $\beta \in [0;\alpha]$. Сначала рассмотрим случай $n=2$. Рассмотрим область $V_\alpha \subset \mathbb{C}$, ограниченную дугами логарифмических спиралей

$$\gamma_\alpha(\varphi) = \rho\, e^{i\varphi}\, e^{(\pi-\varphi)\operatorname{tg}\left((1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right)} \text{ и } \overline{\gamma_\alpha(\varphi)}, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$

В [11] было показано, что эта область является $(1-\alpha)$-звездообразной, что влечет ее α-достижимость относительно нуля (см. [12, теорема 3] и [13, теорема 4]). При этом

$$\min_{p\in\partial V_\alpha} \|p\| = \min_{0\le\varphi\le\pi} \rho e^{(\pi-\varphi)\operatorname{tg}\left((1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right)} = \rho.$$

Этот минимум достигается в точке $M = -\rho \in \partial V_\alpha$.

Так как V_α α-достижима относительно нуля, $K_+(M,0,\alpha) \cap V_\alpha = \varnothing$. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ конус $K_+(M,0,\alpha+\varepsilon)$ пересекает V_α. Для этого найдем тангенс угла θ наклона касательной к $\gamma_\alpha(\varphi)$ в точке M. Так как

$$\theta = \arg\{\gamma'_\alpha(\varphi)\}\Big|_{\varphi=\pi} = \arg\left\{\rho\left(\operatorname{tg}\frac{(1-\alpha)\pi}{2} - i\right)\right\},$$

получаем

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{\operatorname{tg}\left((1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

Поэтому $\theta = -\dfrac{\alpha\pi}{2}$ и $K_+(M,0,\alpha+\varepsilon) \cap V_\alpha \ne \varnothing$ для любого $\varepsilon > 0$. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ оба луча, составляющих границу конуса $K_+(M,0,\alpha+\varepsilon)$, пересекают V_α.

Перейдем от плоского случая к $\mathbb{R}^n$. Пусть V_α лежит в плоскости

$$\Pi = \{x = (x_1, x_2, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}) \in \mathbb{R}^n\},$$

точка $M = -\rho$ лежит на оси Ox_1 и V_α симметрична относительно оси Ox_1. Обозначим D_0 множество, полученное «вращением» V_α вокруг оси Ox_1, то есть,

$$D_0 = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_1} U(V_\alpha),$$

где $\mathcal{U}_1$ — все унитарные преобразования, сохраняющие неподвижной ось Ox_1. Докажем, что D_0 — α-достижимая относительно нуля область. Пусть $p \in \partial D_0$. Покажем, что

$$K_+(p, 0, \alpha) \subset \mathbb{R}^n \backslash D_0. \tag{4}$$

Из определения области D_0 и сохранения скалярного произведения при унитарных преобразованиях следует, что (4) достаточно проверить для точек p, принадлежащих полуплоскости $\Pi^+ = \{x = (x_1, x_2, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}) : x_2 \geq 0\}$. Обозначим $p = (p_1, p_2, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2})$. Так как $p \in \partial V_\alpha$ и V_α α-достижима относительно нуля, плоский конус

$$K_+^2(p, 0, \alpha) = K_+(p, 0, \alpha) \cap \Pi$$

содержится в $\Pi \backslash V_\alpha$.

Если l — кривая в полуплоскости Π^+, описываемая уравнением $F(x_1, x_2) = 0$, то уравнение множества, полученного «вращением» l вокруг оси Ox_1 имеет вид

$$F(x_1, \sqrt{{x_2}^2 + \dots + {x_n}^2}) = 0.$$

Рассмотрим множество K, полученное «вращением» конуса $K_+^2(p, 0, \alpha)$ вокруг оси Ox_1. Так как $\partial K_+^2(p, 0, \alpha)$ описывается уравнением

$$(x_1 - p_1)p_1 + (x_2 - p_2)p_2 - \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2}\sqrt{{p_1}^2 + {p_2}^2} \cos\frac{\alpha\pi}{2} = 0,$$

все точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in \partial K$ будут удовлетворять условию

$$A = (x_1 - p_1)p_1 + (\sqrt{{x_2}^2 + \dots + {x_n}^2} - p_2)p_2 - \\ - \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (\sqrt{{x_2}^2 + \dots + {x_n}^2} - p_2)^2}\sqrt{{p_1}^2 + {p_2}^2} \cos\frac{\alpha\pi}{2} = 0.$$

Отсюда и из определения конуса $K_+(p, 0, \alpha)$ следует, что множеству K принадлежат все точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, для которых $A \geq 0$. По определению D_0 и K множество K содержится в $\mathbb{R}^n \backslash D_0$, так как плоская область V_α α-достижима относительно нуля.

Покажем, что $K_+(p, 0, \alpha) \subset K$. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in K_+(p, 0, \alpha)$, то есть

$$(x - p, p) \geq \|x - p\| \cdot \|p\| \cos\frac{\alpha\pi}{2},$$

что равносильно

$$\begin{aligned} B = (x_1 - p_1)p_1 + (x_2 - p_2)p_2 - \\ - \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 + {x_3}^2 + \dots + {x_n}^2}\sqrt{{p_1}^2 + {p_2}^2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} A = (x_1 - p_1)p_1 + (\sqrt{{x_2}^2 + \dots + {x_n}^2} - p_2)p_2 - \\ - \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + {x_2}^2 + \dots + {x_n}^2 + p_2^2 - 2p_2\sqrt{{x_2}^2 + \dots + {x_n}^2}} \times \\ \times \sqrt{{p_1}^2 + {p_2}^2} \cdot \cos\frac{\alpha\pi}{2} \geq (x_1 - p_1)p_1 + (x_2 - p_2)p_2 - \\ - \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + {x_3}^2 + \dots + {x_n}^2 + ({x_2}^2 - 2p_2\sqrt{{x_2}^2 + \dots + {x_n}^2} + {p_2}^2)} \times \\ \times \sqrt{{p_1}^2 + {p_2}^2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} \geq (x_1 - p_1)p_1 + (x_2 - p_2)p_2 - \\ - \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + {x_3}^2 + \dots + {x_n}^2 + (x_2 - p_2)^2}\sqrt{{p_1}^2 + {p_2}^2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} = B \geq 0 \end{gathered}$$

по условию (5). Получили, что $x \in K$. Значит,

$$K_+(p, 0, \alpha) \subset K \subset \mathbb{R}^n \backslash D_0.$$

Следовательно, D_0 — α-достижимая относительно нуля область.

Заметим, что $\min\limits_{p \in \partial D_0} \|p\| = \rho$ и он достигается в точке $p^* = (-\rho, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1})$. Значит, $D_0 \in A_\rho^\alpha$.

Покажем, что $\mathbb{B}^n \left[0, \rho\sin\frac{(\alpha - \beta)\pi}{2}\right]$ — максимальный шар, содержащийся в $\Omega_{D_0}^\beta$. Рассмотрим сечение области D_0 плоскостью Π — плоскую область V_α. Пусть $M = (-\rho, 0, \dots, 0) \in \partial V_\alpha$, $\delta \in (0, 1 - \alpha + \beta)$ и

$$\mathbb{B}^2 \left[0, \rho\sin\frac{(\alpha - \beta + \delta)\pi}{2}\right] = \mathbb{B}^n \left[0, \rho\sin\frac{(\alpha - \beta + \delta)\pi}{2}\right] \cap \Pi.$$

Пусть $a^* \in \partial\mathbb{B}^2 \left[0, \rho\sin\frac{(\alpha - \beta + \delta)\pi}{2}\right] \cap K_-(p^*, 0, \alpha - \beta + \delta) \cap \Pi^+$ (см. рис. 2).

Покажем, что $a^* \notin \Omega_{D_0}^\beta$. По определению a^*

$$\operatorname{Arg}(a^* - M) - \operatorname{Arg}(-M) = \frac{(\alpha - \beta + \delta)\pi}{2}. \quad (6)$$

Здесь и далее значения аргументов будем выбирать так, чтобы их разность принадлежала полуинтервалу $(-\pi; \pi]$.

Покажем, что $K_+(p^*, a^*, \beta) \cap D_0 \neq \varnothing$. Пусть

$$K_+^2(M, a^*, \beta) = K_+(p^*, a^*, \beta) \cap \Pi.$$

Обозначим через l луч, состоящий из точек $w \in \partial K_+^2(M, a^*, \beta)$, $w \neq M$, таких, что

$$\operatorname{Arg}(w - M) - \operatorname{Arg}(M - a^*) = \frac{\beta\pi}{2}.$$

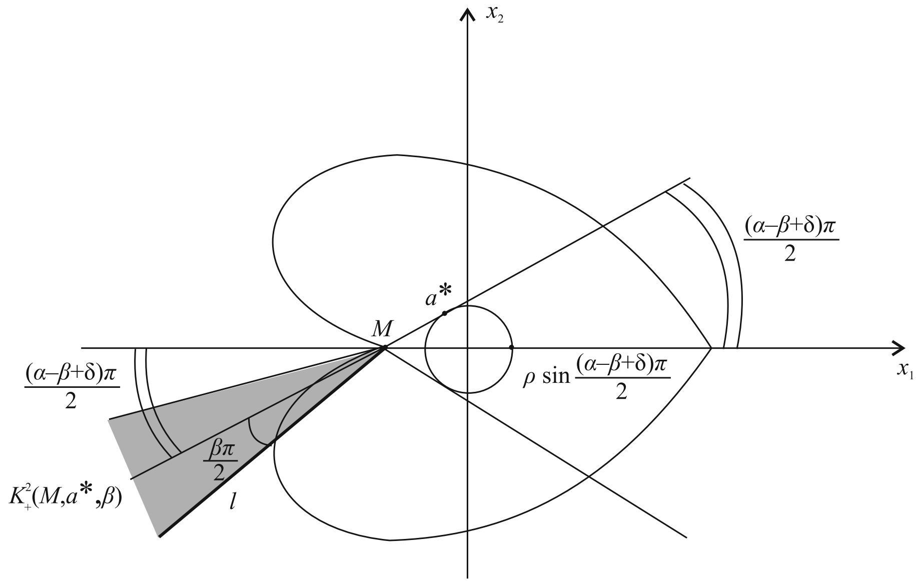

Рис. 2. Плоская область V_α, полученная сечением области D_0 плоскостью П.

Тогда отсюда и из (6) для любого $w \in l$

$$\operatorname{Arg}(w-M) - \operatorname{Arg} M = (\operatorname{Arg}(w-M) - \operatorname{Arg}(M-a^*)) + (\operatorname{Arg}(M-a^*) - \operatorname{Arg} M) =$$
$$= \frac{\beta\pi}{2} + \frac{(\alpha-\beta+\delta)\pi}{2} = \frac{(\alpha+\delta)\pi}{2}.$$

Следовательно, l — один из лучей, составляющих границу конуса $K_+^2(M, 0, \alpha+\delta)$. Как показано в п. 1,а, для любого $\delta > 0$

$$l \cap V_\alpha \neq \varnothing.$$

Значит, $K_+^2(M, a^*, \beta) \cap V_\alpha \neq \varnothing$. Тогда и $K_+(p^*, a^*, \beta) \cap D_0 \neq \varnothing$. В силу произвольности $\delta > 0$ получаем, что $\mathbb{B}^n\left[0, \rho\sin\left((\alpha-\beta)\frac{\pi}{2}\right)\right]$ — максимальный шар, содержащийся в $\Omega^\beta_{D_0}$.

б) Пусть $\alpha = 0$. Возьмем $D_0 = \mathbb{R}^n \backslash l_\rho \in A^0_\rho$, где $l_\rho = \Big\{(\rho t, 0, \ldots, 0),\ t \in [1; \infty)\Big\}$. Множеству $\Omega^0_{D_0}$ принадлежат все точки $a \in D_0$, для которых для любого $p = (\rho\tau, 0, \ldots, 0)$, $\tau \in [1; \infty)$, луч $K_+(p, a, 0) = \{p + (p-a)\tau,\ \tau \geq 0\}$ содержится в l_ρ. Следовательно, $\Omega^0_{D_0} = \{(\rho k, 0, \ldots, 0), k < 1\}$. Поэтому $\mathbb{B}^n[0, \varepsilon] \nsubseteq \Omega^0_{D_0}$ для любого $\varepsilon > 0$. Таким образом $\bigcap\limits_{D \in A^0_\rho} \Omega^0_D = \{0\}$.

в) Пусть $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$. Повторяя рассуждения пункта п. 1,а доказательства с заменой D_0 на $\mathbb{B}^n(0, \rho)$, получим

$$\Omega^\beta_{\mathbb{B}^n(0,\rho)} = \mathbb{B}^n\left[0, \rho\sin\left((1-\beta)\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

2. Пусть $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Так как $A^1_\rho = \{\mathbb{B}^n(0, \rho)\}$ и шар $\mathbb{B}^n(0, \rho)$ является звездообразной (то есть 0-достижимой) областью (см., например, [7]) относительно любого $a \in \mathbb{B}^n(0, \rho)$,

$$\Omega^0_{\mathbb{B}^n(0,\rho)} = \mathbb{B}^n(0, \rho). \qquad \square$$

На международной конференции «Комплексный анализ и теория приближений», посвященной 80-летию профессора Е. П. Долженко (29–30 сентября 2014 г.), профессор С. Р. Насыров предложил оценить сверху отношение R_D/r_D, где $R_D = \max\limits_{p\in\partial D}\|p\|$, $r_D = \min\limits_{p\in\partial D}\|p\|$, для α-достижимых относительно нуля областей D, $D \neq \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0;1]$. В [1] было показано, что для указанных $\alpha \in (0;1]$ α-достижимая область D, $D \neq \mathbb{R}^n$, ограничена, поэтому $\max\limits_{p\in\partial D}\|p\|$ существует. Эту оценку дает теорема 2.

Замечание. *В случае $\alpha = 0$ существуют области $D \neq \mathbb{R}^n$, для которых $\sup\limits_{p\in\partial D}\|p\|/\min\limits_{p\in\partial D}\|p\| = \infty$. Примером является область D_0 из пункта п. 1,б доказательства теоремы 1.*

Теорема 2. *Пусть D — α-достижимая относительно нуля область, $\alpha \in (0;1]$, $D \neq \mathbb{R}^n$. Обозначим $R_D = \max\limits_{p\in\partial D}\|p\|$, $r_D = \min\limits_{p\in\partial D}\|p\|$, тогда справедливо точное неравенство*

$$\frac{R_D}{r_D} \leq e^{\pi \operatorname{tg}\left((1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right)}. \tag{7}$$

Доказательство. В случае $\alpha = 1$ D — шар и (7) является очевидным равенством.

Пусть $\alpha \in (0;1)$. Предположим, что найдется такая α-достижимая относительно нуля область G, $G \neq \mathbb{R}^n$, для которой $\dfrac{R_G}{r_G} > e^{\pi \operatorname{tg}\left((1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right)}$. Пусть $p_1, p_2 \in \partial G$ такие, что $\|p_1\| = R_G$ и $\|p_2\| = r_G$. Через точки $p_1, 0, p_2$ проведем плоскость P. Тогда $G^* = G \cap P$ — плоская α-достижимая относительно нуля область и

$$\frac{R_{G^*}}{r_{G^*}} > e^{\pi \operatorname{tg}\left((1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right)}. \tag{8}$$

В [12, 13] Я. Станкевич рассматривал класс $S_{1-\alpha}$, состоящий из $(1-\alpha)$-звездообразных, $0 \leq \alpha \leq 1$, аналитических в единичном круге $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций вида $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, удовлетворяющих условию

$$\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{(1-\alpha)\pi}{2}, \quad \text{для любого} \quad z \in \Delta.$$

В [12, теорема 3] и [13, теорема 3] было показано, что если $f \in S_{1-\alpha}$, то $f(\Delta)$ — α-достижимая относительно нуля область. С другой стороны, если область D^* α-достижима относительно нуля и аналитическая в Δ функция $g(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ однолистно отображает Δ на D^*, то $f(z) = g(z)/a_1 \in S_{1-\alpha}$ (см. [13, теорема 4]). Таким образом, каждая α-достижимая плоская область, $0 \leq \alpha \leq 1$, может быть представлена в виде $\mathrm{const}\cdot f(\Delta)$, где f — некоторая функция из $S_{1-\alpha}$.

В [13, теорема 7] доказано, что для $f \in S_{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, область $f(\Delta)$ содержит круг $\mathbb{B}^2(0, r_\alpha)$, где

$$r_\alpha = \exp\int\limits_0^1 \left(\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^\alpha - 1\right)\frac{dt}{t} = \exp\left\{\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}\right\},$$

и $f(\Delta)$ содержится в круге $\mathbb{B}^2\left(0, r_\alpha \exp\left\{\pi \operatorname{tg}\left((1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right)\right\}\right)$. Следовательно, для любой плоской α-достижимой области D, $\alpha \in (0;1)$, имеем

$$\frac{R_{D^*}}{r_{D^*}} \le \frac{r_\alpha \exp\left\{\pi \operatorname{tg}\left((1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right)\right\}}{r_\alpha} = \exp\left\{\pi \operatorname{tg}\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\right\}. \tag{9}$$

Неравенство (8) противоречит (9). Следовательно, для любой α-достижимой относительно нуля области D, $\alpha \in (0;1]$, выполняется неравенство (7).

Покажем, что неравенство (7) точное. Рассмотрим α-достижимую область D_0 из п. 1,а доказательства теоремы 1. Для нее

$$R_{D_0} = \max_{p\in\partial D_0}\|p\| = \max_{\varphi\in[0;\pi]}|\gamma_\alpha(\varphi)| = \rho e^{\pi \operatorname{tg}\left((1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right)}$$

и

$$\frac{R_{D_0}}{r_{D_0}} = e^{\pi \operatorname{tg}\left((1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right)}.$$

$\square$

Авторы благодарят П. А. Бородина, О. Н. Косухина и Н. А. Широкова за участие в обсуждении статьи.

Литература

1. *Liczberski P., Starkov V. V.* Domains in $\mathbb{R}^n$ with conical accessible boundary // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 408, N 2. P. 547–560. DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.06.029.

2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.

3. *Долженко Е. П.* Граничные свойства произвольных функций // Изв. АН СССР, Сер. матем. 1967. Т. 31. С. 3–14. DOI: 10.1070/IM1967v001n01ABEH000543.

4. *Adams R. A., Fournier J.* Cone conditions and properties of Sobolev spaces // J. Math. Anal. Appl. 1977. Vol. 61. P. 713–734. DOI: 10.1016/0022-247X(77)90173-1.

5. *Zaremba S.* Sur le principe de Direchlet // Acta Math. 1911. Vol. 34. P. 293–316. DOI: 10.1007/BF02393130.

6. *Амозова К. Ф., Старков В. В.* α-достижимые области, негладкий случай // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. Вып. 3. С. 3–8.

7. *Амозова К. Ф.* Достаточные условия α-достижимости области в негладком случае // Проблемы анализа. Изд. ПетрГУ. 2013. Т. 2(20), № 1, С. 3–11. DOI: 10.15393/j3.art.2013.2321.

8. *Anikiev A. N.* Plane domains with special cone condition // Probl. Anal. Issues Anal. 2014. Vol. 3(21), N 2. P. 16–31. DOI: 10.15393/j3.art.2014.2609.

9. *Amozova K. F., Ganenkova E. G.* About planar (α, β)-accessible domains // Probl. Anal. Issues Anal. 2014. Vol. 3(21), N 2. P. 3–15. DOI: 10.15393/j3.art.2014.2689.

10. *Старков В. В.* Условия звездообразности областей в $\mathbb{R}^n$ // Труды ПетрГУ. Сер. матем. 2011. Вып. 18. С. 70–82.

11. *Sugawa T.* A self-duality of strong starlikeness // Kodai Math. J. 2005. Vol. 28. P. 382–389. DOI: 10.2996%2Fkmj%2F1123767018.

12. *Stankiewicz J.* Quelques problèmes extrémaux dans les classes α-angulairement étoilées // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. 1966. Vol. 20. P. 59–75.

13. *Stankiewicz J.* Some remarks concerning starlike functions // Bulletin de l'academie Polonaise des sciences. Série des sciences math., astr. et phys. 1970. Vol. 18, N 3. P. 143–146.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

Сведения об авторах

Амозова Кира Федоровна — преподаватель; amokira@rambler.ru

Ганенкова Екатерина Геннадьевна — кандидат физико-математических наук, доцент; g_ek@inbox.ru

ABOUT α-ACCESSIBLE DOMAINS

Kira F. Amozova, Ekaterina G. Ganenkova

Petrozavodsk State University, pr. Lenina, 33, Petrozavodsk, 185910, Republic of Karelia, Russian Federation; amokira@rambler.ru, g_ek@inbox.ru

The article is devoted to the class A_ρ^α of α-accessible with respect to the origin domains $D \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in [0;1]$, possessing the property $\rho = \min\limits_{p\in\partial D} \|p\|$, where $\rho \in (0;+\infty)$ is a fixed number. Such domains satisfy the so-called „cone condition“, i. e. domains are conically accessible from the interior. We find the maximal set of points a such that all domains $D \in A_\rho^\alpha$ are β-accessible with respect to a, $0 \le \beta \le \alpha$. This problem was posed by Professor S. I. Dudov. This set is proved to be the open ball of center 0 and radius ρ if $\alpha = 1$, $\beta = 0$, or the closed ball of center 0 and radius $\rho \sin \frac{(\alpha-\beta)\pi}{2}$ otherwise.

In the paper we also give the answer to the question of Professor S. R. Nasyrov. For α-accessible with respect to the origin domains $D \subsetneq \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0;1]$, we obtain the sharp upper bound for $\max\limits_{p\in\partial D} \|p\| / \min\limits_{p\in\partial D} \|p\|$.

Refs 13. Figs 2.

Keywords: α-accessible domain, cone condition.

References

1. Liczberski P., Starkov V. V., “Domains in $\mathbb{R}^n$ with conical accessible boundary”, *J. Math. Anal. Appl.* **408**(2), 547–560 (2013). DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.06.029.

2. Besov O. V., Il’in V. P., Nikolskii S. M., *Integral Representations of Functions and Imbedding Theorems* (John Wiley & Sons, New York, 1978, 1979, **1**, **2**).

3. Dolženko E. P., “Boundary properties of arbitrary functions”, *Math. USSR Izv.* **1**(1), 1–12 (1967) [in Russian]. DOI: 10.1070/IM1967v001n01ABEH000543.

4. Adams R. A., Fournier J., “Cone conditions and properties of Sobolev spaces”, *J. Math. Anal. Appl.* **61**, 713–734 (1977). DOI: 10.1016/0022-247X(77)90173-1.

5. Zaremba S., “Sur le principe de Direchlet”, *Acta Math.* **34**, 293–316 (1911). DOI: 10.1007/BF02393130.

6. Amozova K. F., Starkov V. V., “α-accessible domains, a nonsmooth case (α-dostizhimye oblasti, negladkij sluchaj)”, *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.* **13**(3), 3–8 (2013). [in Russian].

7. Amozova K. F., “Sufficient conditions of α-accessibility of domain in nonsmooth case”, *Probl. Anal. Issues Anal.* **2** (**20**)(1), 3–13 (2013) [in Russian]. DOI: 10.15393/j3.art.2013.2321.

8. Anikiev A. N., “Plane domains with special cone condition”, *Probl. Anal. Issues Anal.* **3**(**21**)(2), 16–31 (2014). DOI: 10.15393/j3.art.2014.2609.

9. Amozova K. F., Ganenkova E. G., “About planar (α, β)-accessible domains”, *Probl. Anal. Issues Anal.* **3**(**21**)(2), 3–15 (2014). DOI: 10.15393/j3.art.2014.2689.

10. Starkov V. V., “Starlikeness criteria for domains of $\mathbb{R}^n$”, *Tr. Petrozavodsk. Gos. Univ. Ser. Mat.* **18**, 70–82 (2011) [in Russian].

11. Sugawa T., “A self-duality of strong starlikeness”, *Kodai Math. J.* **28**, 382–389 (2005). DOI: 10.2996%2Fkmj%2F1123767018.

12. Stankiewicz J., “Quelques problèmes extrémaux dans les classes α-angulairement étoilées”, *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska* **20**, 59–75 (1966).

13. Stankiewicz J., “Some remarks concerning starlike functions”, *Bulletin de l’academie Polonaise des sciences. Série des sciences math., astr. et phys.* **18**(3), 143–146 (1970).