УДК 517.977 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 4

ПРЕВАЛЕНТНОСТЬ ЛОКАЛЬНО ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ИДЕНТИФИЦИРУЕМЫХ СИСТЕМ*

Н. А. Бодунов[1], *С. А. Колбина*[1], *С. Ю. Пилюгин*[2]

[1] С.-Петербургский государственный электротехнический университет, Российская Федерация, 197376, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5
[2] Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Мы рассматриваем задачу о локальной параметрической идентифицируемости системы «вход-выход». Изучается множество $\mathcal{LI}$, состоящее из систем, у которых свойство локальной параметрической идентифицируемости выполняется для почти всех значений входного сигнала и параметра как в топологическом, так и в метрическом смыслах.

Указаны достаточные условия, при которых множество $\mathcal{LI}$ содержит превалентное подмножество. Доказательство опирается на превалентную теорему трансверсальности, доказанную Калошиным.

Рассмотрены системы, характеризующиеся некоторым набором («структурных») параметров a и «управляющим блоком», в который вводится управление. Показано, что если размерность множества параметров a достаточно велика («структура системы достаточно богата»), то в типичном случае система f_a принадлежит классу $\mathcal{LI}$ для множества параметров a, имеющего полную меру. Библиогр. 8 назв.

Ключевые слова: система управления, параметрическая идентифицируемость, превалентность.

1. Введение. В предлагаемой заметке мы продолжаем исследование свойства типичности локальной параметрической идентифицируемости для систем типа «вход-выход», начатое в работе [1].

В современной математике существуют две принципиально различных трактовки свойства типичности. В первой из них, топологической, типичным считается свойство, которым обладают все элементы некоторого множества II категории по Бэру. Во второй, обычно называемой метрической, типичным считается свойство, которым обладают почти все элементы (с метрической точки зрения).

Иногда эти два понятия типичности выделяют существенно различные множества. Так, В. И. Арнольд отмечал [2], что структурно устойчивые диффеоморфизмы окружности, сохраняющие ориентацию, образуют открытое и плотное множество (то есть они топологически типичны). В то же время в семействе диффеоморфизмов вида

$$x \mapsto x + \alpha + \epsilon \sin x$$

мера множества тех α, при которых диффеоморфизм структурно устойчив, стремится к 0 при $\epsilon \to 0$.

Основной результат работы [1] указывал условия, при которых локальная параметрическая идентифицируемость систем, моделируемых отображениями

$$f:\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m,$$

где $p \in \mathbb{R}^l$ — подлежащий идентификации параметр, топологически типична относительно тонкой топологии Уитни пространства $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m)$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-03797а) и СПбГУ (шифр ИАС 6.38.223.2014).

В данной работе мы исследуем тот же вопрос с точки зрения метрической типичности. Известно, что не существует естественного обобщения меры Лебега на бесконечномерный случай [3]. Так как пространство изучаемых систем во всех содержательных случаях бесконечномерно, требуется использовать более сложные конструкции. Мы используем понятие превалентности, изученное В. Ю. Калошиным в работе [4] (более ранние варианты этого понятия рассматривались в работах [5] и [6]).

Отметим, что близкая к нашей по идеологии задача о наблюдаемости бесконечномерных динамических систем изучена в работе [7] (в которой использовано понятие превалентности, введенное Хантом, Сауэром и Йорком в [8]).

Структура статьи такова. В п. 2 мы определяем превалирующие множества. В п. 3 указаны условия, при которых локальная параметрическая идентифицируемость превалентна (метрически типична). В п. 4 рассмотрен случай систем, структура которых описывается конечным числом параметров и идентифицируются сигналы, поступающие в управляющий блок.

2. Превалирующие множества. Дадим определение превалирующих множеств, следуя работе Калошина [4].

Для определенности будем рассматривать пространство $C^\infty(M,N)$ отображений класса C^∞ из гладкого многообразия M в гладкое многообразие N. Будем считать, что пространство $C^\infty(M,N)$ наделено тонкой C^∞-топологией Уитни.

Фиксируем натуральное число n и обозначим через B^n замкнутый единичный шар пространства $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле.

Также будем рассматривать пространство $C^\infty(M \times B^n, N)$ с тонкой C^∞-топологией Уитни как пространство n-параметрических семейств отображений $\{f_a : a \in B^n\}$ из $C^\infty(M,N)$, C^∞-гладко зависящих от параметра a. При этом будем считать, что семейства f_a определены в окрестностях шара B^n и принадлежат там классу C^∞.

Определение 1. Множество $P \subset C^\infty(M,N)$ называется *строго n-превалирующим*, если существует открытое всюду плотное множество n-параметрических семейств $\mathrm{Fm}(P) \subset C^\infty(M \times B^n, N)$, обладающее следующими двумя свойствами:

1) для любого n-параметрического семейства $\{f_a : a \in B^n\} \in \mathrm{Fm}(P)$ выполнено равенство
$$\mathrm{mes}\{a \in B^n : \ f_a \notin P\} = 0, \tag{1}$$
где mes — n-мерная мера Лебега;

2) для любого отображения $f \in C^\infty(M,N)$ существует такое семейство $\{f_a : a \in B^n\} \in \mathrm{Fm}(P)$, что $f_0 = f$.

Определение 2. Множество $P \subset C^\infty(M,N)$ называется *n-превалирующим*, если P может быть представлено в виде пересечения счетного числа строго n-превалирующих множеств.

3. Превалентность локальной параметрической идентифицируемости. Введем следующие обозначения.

Рассмотрим систему
$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m) \tag{2}$$
типа «вход-выход», в которой паре (x,p), где $x \in \mathbb{R}^k$ — входной сигнал, а $p \in \mathbb{R}^l$ — подлежащий определению параметр, сопоставляется выходной сигнал $y = f(x,p) \in \mathbb{R}^m$.

Мы будем изучать свойство локальной параметрической идентифицируемости системы, формулируемое следующим образом.

Две пары $(x_1, p_1), (x_2, p_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ называются различимыми по наблюдению, если

$$f(x_1, p_1) \neq f(x_2, p_2).$$

Будем говорить, что система локально параметрически идентифицируема в точке $p_0 \in \mathbb{R}^l$ при входном сигнале $x_0 \in \mathbb{R}^k$, если существует такое $\epsilon > 0$, что пары (x_0, p_0) и (x_0, p) различимы по наблюдению при всех p, удовлетворяющих неравенству $0 < |p - p_0| < \epsilon$.

Пусть f — система вида (1). Обозначим через $\mathcal{M}(f)$ множество таких точек (x_0, p_0) пространства $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$, что система локально параметрически идентифицируема в точке p_0 при входном сигнале x_0.

Будем писать $f \in \mathcal{LI}$, если выполнены следующие условия:

1) множество $\mathcal{M}(f)$ — множество II категории по Бэру, то есть оно представимо как счетное пересечение открытых и плотных подмножеств $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$;

2)
$$\operatorname{mes}\left(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \setminus \mathcal{M}(f)\right) = 0. \tag{3}$$

Таким образом, $\mathcal{LI}$ — множество систем, у которых свойство локальной параметрической идентифицируемости выполняется для почти всех значений входного сигнала и параметра как в топологическом, так и в метрическом смыслах.

Теорема 1. *Если*

$$l \leq m \tag{4}$$

и

$$n > m(1 + k + l), \tag{5}$$

то множество $\mathcal{LI}$ содержит n-превалирующее подмножество.

Доказательство. В [1] показано, что если система вида (1) не является локально параметрически идентифицируемой в точке p_0 при входном сигнале x_0, то

$$\operatorname{rank} \frac{\partial f}{\partial p}(x_0, p_0) < l. \tag{6}$$

Так же как в [1], рассмотрим 1-струйное расширение f, то есть отображение

$$F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mk} \times \mathbb{R}^{ml},$$

которое сопоставляет точке (x, p) тройку

$$F(x,p) = \left(f(x,p), \frac{\partial f}{\partial x}(x,p), \frac{\partial f}{\partial p}(x,p)\right) \tag{7}$$

(мы естественным образом отождествляем матрицы

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,p) \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial p}(x,p)$$

с элементами евклидовых пространств соответствующих размерностей).

Пусть Δ^* — подмножество пространства $\mathbb{R}^{ml}$, соответствующее матрицам ранга, меньшего l. Тогда

$$\Delta^* = \Delta_0^* \cup \ldots \cup \Delta_{l-1}^*,$$

где Δ_j^* — подмножество $\mathbb{R}^{ml}$, соответствующее матрицам ранга j.

В [1] показано, что при выполнении условия (3) произведения

$$\Delta_j = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mk} \times \Delta_j^*, \quad j = 0, \ldots, l-1,$$

являются гладкими подмногообразиями пространства $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mk} \times \mathbb{R}^{ml}$ положительной коразмерности.

Пусть K — гладкое подмногообразие пространства 1-струй $j^1C^\infty(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m)$ (которое мы отождествили с $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mk} \times \mathbb{R}^{ml}$).

Обозначим через $\mathcal{L}(K)$ множество тех отображений $f \in C^\infty(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m)$, у которых 1-струйное расширение F трансверсально к K.

Из превалентной теоремы трансверсальности [4] следует, что если число n больше, чем размерность пространства 1-струй $j^1C^\infty(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m)$, то множество $\mathcal{L}(K)$ n-превалирующее.

В нашем случае

$$\dim j^1C^\infty(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m) = \dim(\mathbb{R}^{m+mk+ml}) = m(1+k+l)$$

и из условия (4) следует, что каждое из множеств

$$\mathcal{L}_j = \mathcal{L}(\Delta_j), \quad j = 0, \ldots, l-1,$$

является n-превалирующим.

В этом случае и множество

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cap \ldots \cap \mathcal{L}_{l-1}$$

n-превалирующее.

Так как для любого $f \in \mathcal{L}$ 1-струя F трансверсальна к каждому из подмногообразий Δ_j пространства $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mk} \times \mathbb{R}^{ml}$ положительной коразмерности, множество

$$\mathcal{M}' = F^{-1}(\Delta_0) \cup \ldots \cup F^{-1}(\Delta_{l-1})$$

является объединением конечного набора гладких подмногообразий пространства $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ положительной коразмерности.

Тогда у любой точки пространства $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ есть такая маленькая шаровая окрестность U, что множество $U \cap \mathcal{M}'$ является объединением конечного набора дисков положительной коразмерности (а значит, его дополнение в U открыто, плотно и имеет полную меру).

Ясно, что в этом случае само множество $\mathcal{M}'$ имеет нулевую меру, а его дополнение

$$\mathcal{M} = (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l) \setminus \mathcal{M}'$$

является множеством II категории.

Если $f \in \mathcal{L}$, а $(x_0, p_0) \in \mathcal{M}$, то

$$\frac{\partial f}{\partial p}(x_0, p_0) \notin \Delta_0^* \cup \ldots \cup \Delta_{l-1}^*,$$

а из этого следует, как было отмечено в начале доказательства, что система f локально параметрически идентифицируема в точке p_0 при входном сигнале x_0.

Таким образом, $\mathcal{L} \subset \mathcal{LI}$, что и завершает доказательство теоремы 1. $\square$

Замечание 1. В работе [1] показано, что при выполнении условия (3) в топологически типичной системе вида (1) свойство локальной параметрической идентифицируемости выполняется для почти всех значений входного сигнала и параметра в топологическом смысле. Легко понять, что рассуждения, примененные при доказательстве теоремы 1, показывают, что то же самое верно и в метрическом смысле (т. е. свойство локальной параметрической идентифицируемости выполняется для множества значений входного сигнала и параметра, мера дополнения которого нулевая).

4. Системы с конечномерной структурой. Рассмотрим теперь несколько модифицированную постановку изучаемой задачи. Предположим, что система характеризуется некоторым набором («структурных») параметров a и «управляющим блоком», в который вводится управление p.

Таким образом, мы фиксируем структуру системы, выбрав параметр a, и хотим идентифицировать параметр p по выходу $f_a(x, p)$.

Для определенности будем предполагать, что $a \in B^n$ и

$$f_a \in C^\infty(\mathbb{R}^k \times R^l, \mathbb{R}^m),$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ и $p \in \mathbb{R}^l$.

Следующий результат показывает, что если число n достаточно велико («структура системы достаточно богата»), то в типичном случае система f_a принадлежит классу $\mathcal{LI}$ для множества параметров a, имеющего полную меру в B^n.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{F}$ — множество n-параметрических семейств отображений f_a, C^∞-гладко зависящих от параметра $a \in B^n$. Предположим, что множество $\mathcal{F}$ открыто в $C^\infty(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \times B^n, \mathbb{R}^m)$ и выполнены соотношения* (3) *и* (4).

Тогда $\mathcal{F}$ содержит такое подмножество $\mathcal{H}$ II категории по Бэру (*относительно топологии пространства $C^\infty(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \times B^n, \mathbb{R}^m)$*), *что если $\{f_a\} \in \mathcal{H}$, то*

$$\operatorname{mes}\{a \in B^n : \ f_a \notin \mathcal{LI}\} = 0.$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что при наших условиях множество $\mathcal{LI}$ содержит n-превалирующее подмножество. Следовательно, существует такой счетный набор строго n-превалирующих множеств P_j, $j \in \mathbb{Z}$, что

$$\mathcal{LI} \supset \cap_{j \in \mathbb{Z}} P_j. \tag{8}$$

Найдем для каждого из множеств P_j соответствующее открытое и плотное множество $\operatorname{Fm}(P_j)$ (см. определение 1).

Каждое из множеств

$$H_j = \operatorname{Fm}(P_j) \cap \mathcal{F}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

открыто и плотно в $\mathcal{F}$, поэтому множество

$$\mathcal{H} = \cap_{j \in \mathbb{Z}} H_j$$

является множеством II категории по Бэру в $\mathcal{F}$.

Если $\{f_a\} \in \mathcal{H}$, то
$$\{f_a\} \in H_j, \quad j \in \mathbb{Z},$$
поэтому
$$\{f_a\} \in \mathrm{Fm}(P_j), \quad j \in \mathbb{Z}.$$
Следовательно,
$$\mathrm{mes}\{a \in B^n : \ f_a \notin P_j\} = 0, \quad j \in \mathbb{Z}.$$
Для завершения доказательства осталость отметить, что из (10) следует включение
$$\{a \in B^n : \ f_a \notin \mathcal{LI}\} \subset \cup_{j \in \mathbb{Z}}\{a \in B^n : \ f_a \notin P_j\}. \qquad \square$$

Литература

1. *Бодунов Н. А., Колбина С. А., Пилюгин С. Ю.* Локально параметрически идентифицируемые системы типичны // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 2. С. 16–20.

2. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

3. *Судаков В. Н.* Линейные множества с квазиинвариантной мерой // ДАН СССР. 1969. Т. 15. С. 524–525.

4. *Калошин В. Ю.* Некоторые превалентные свойства гладких динамических систем // Труды МИАН. 1997. Т. 213. С. 123–151.

5. *Вишик М. И., Куксин С. Б.* Возмущения квазилинейных эллиптических уравнений и фредгольмовы многообразия // Матем. сборник. 1986. Т. 130(172). С. 222–242.

6. *Quinn F., Sard A.* Hausdorff conulity of critical images of Fredholm maps // Amer. J. Math. 1972. Vol. 94. P. 1101–1110.

7. *Lin J., Ott W.* Observing infinite-dimensional dynamical systems // SIAM J. Appl. Dynam. Syst. 2010. Vol. 9. P. 1229–1243.

8. *Hunt B., Sauer T., Yorke J. A.* Prevalence: A translation-invariant almost every for infinite-dimensional spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. Vol. 27. P. 217–238.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

Сведения об авторах

Бодунов Николай Александрович — доктор физико-математических наук, зав. кафедрой; nick.bodunov@gmail.com

Колбина Светлана Анатольевна — кандидат физико-математических наук, доцент; kafedravm1@gmail.com

Пилюгин Сергей Юрьевич — доктор физико-математических наук, профессор; sp@sp1196.spb.edu

PREVALENCE OF LOCALLY PARAMETER IDENTIFIABLE SYSTEMS

Nikolay A. Bodunov[1], *Svetlana A. Kolbina*[1], *Sergey Yu. Pilyugin*[2]

[1] St.Petersburg State Electrotechnical University, ul. Professora Popova, 5, St.Petersburg, 197376, Russian Federation;
nick.bodunov@gmail.com, kafedravm1@gmail.com

[2] St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation;
sp@sp1196.spb.edu

We consider the problem of local parameter identifiability for an «input-output» system. We study the set of systems $\mathcal{LI}$ for which the property of locally parameter identifiability holds for almost all values of input signals and parameters both in the topological and metrical senses.

We give sufficient conditions under which the set $\mathcal{LI}$ contains a prevalent subset. The proof is based on the prevalent transversality theorem proved by Kaloshin.

We also consider systems that are characterized by a family of («structural») parameters a and a «control block». It is shown that if the dimension of the set of parameters a is large enough («the structure of the system is rich enough»), then, generically, the system f_a belongs to the class $\mathcal{LI}$ for a set of parameters a having full measure. Refs 8.

Keywords: control system, parameter identifiability, prevalence.

References

1. Bodunov N. A., Kolbina S. A., Pilyugin S. Yu., "Locally parameter identifiable systems are generic", *Vestnik St.Petersburgskogo Universiteta. Ser. 1.* Issue 2, 16–20 (2012) [in Russian].

2. Arnold V. I., *Complementary chapters of ordinary differential equations* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].

3. Sudakov V. N., "Linear sets with quasiinvariant measure", *Doklady AN SSSR* **15**, 524–525 (1969) [in Russian].

4. Kaloshin V. Yu., "Some prevalent properties of smooth dynamical systems", *Trudy MIAN* **213**, 123–151 (1997) [in Russian].

5. Vishik M. I., Kuksin S. B., "Perturbations of quasilinear elliptic equations and Fredholm manifolds", *Matem. Sbornik* **130**(172), 222–242 (1986) [in Russian].

6. Quinn F., Sard A., "Hausdorff conulity of critical images of Fredholm maps", *Amer. J. Math.* **94**, 1101–1111 (1972).

7. Lin J., Ott W., "Observing infinite-dimensional dynamical systems", *SIAM J. Appl. Dynam. Syst.* **9**, 1229–1243 (2010).

8. Hunt B., Sauer T., Yorke J. A., "Prevalence: A translation-invariant almost every for infinite-dimensional spaces", *Bull. Amer. Math. Soc.* **27**, 217–238 (1992).