УДК 517.938 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 4

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПО ВЫХОДУ НЕКОТОРОГО КЛАССА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ*

И. Е. Зубер, А. Х. Гелиг

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = A(\cdot)x + B(\cdot)u,$$
$$\frac{dy}{dt} = A(\cdot)y + B(\cdot)u + D(C^*y - v),$$

где

$$v = C^*x \text{ — выход},$$
$$u = S^*y \text{ — управление},$$

$A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times(n-p)}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times(n-p)}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times(n-p)}$.

Элементы $\alpha_{ij}(\cdot)$, $\beta_{ij}(\cdot)$ матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ являются произвольными функционалами, удовлетворяющими условиям

$$\sup_{(\cdot)} |\alpha_{ij}(\cdot)| < \infty\ (i, j \in \overline{1, n}), \quad \sup_{(\cdot)} |\beta_{ij}(\cdot)| < \infty\ (i \in \overline{1, n}; j \in \overline{1, n-p}).$$

Предполагается, что $A(\cdot) \in Z_1 \cup Z_3$, $A^*(\cdot) \in Z_1 \cup Z_3$, где Z_1 — класс матриц, у которых первые p элементов k-й наддиагонали знакоопределенные, а элементы, стоящие выше них, достаточно малы. Класс Z_3 отличается от класса Z_1 тем, что достаточно малы элементы, стоящие ниже этой наддиагонали до $(k+1)$-й строки. Если $k > p$, то достаточно малы также элементы $(p \times p)$-квадрата, расположенного в верхнем левом углу матрицы. С помощью специальных квадратичных функций Ляпунова сначала находится матрица D, при которой $y(t) - x(t) \to 0$ экспоненциально при $t \to \infty$, а затем определяется матрица S, при которой $x(t)$ и $y(t)$ обладают этим же свойством. Библиогр. 3 назв.

Ключевые слова: неопределенные системы, стабилизация по выходу, глобальная экспоненциальная устойчивость, наблюдатель.

1. Введение. Стабилизация неопределенных систем по выходу рассматривалась в [1, 2]. В этих работах неопределенная матрица объекта управления являлась обобщенной матрицей Фробениуса. В настоящей статье предложен синтез стабилизирующего управления по выходу для других классов неопределенных систем [3].

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = A(\cdot)x + B(\cdot)u, \quad t \geq t_0. \tag{1}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, а управление u определяется формулой

$$u = S^*x, \tag{2}$$

где $S \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $*$ — знак транспонирования (все величины вещественные). Элементы матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ являются произвольными функционалами, значения которых в момент t не зависят от $x(\lambda)$ при $\lambda > t$. Например, они могут быть функциями от t,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-01-00107а) и СПбГУ (тема 6.38.230.2015).

$x(t)$, $x(t-\tau)$, $\int_0^t |x(\lambda)|^2 d\lambda$ и т. п. Предполагается ограниченность всех элементов $\alpha_{ij}(\cdot)$ и $\beta_{ij}(\cdot)$ матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$:

$$\sup_{(\cdot)} |\alpha_{ij}(\cdot)| < \infty \quad (i, j \in \overline{1,n}), \quad \sup_{(\cdot)} |\beta_{ij}(\cdot)| < \beta_0 \quad (i \in \overline{1,n}; j \in \overline{1,m}). \tag{3}$$

Также предполагается справедливость теоремы существования решения и продолжимости при $t \in [t_0, \infty)$ любого решения, остающегося в ограниченной области. В [3] были определены классы Z_1 и Z_3 матриц $A(\cdot)$, для которых построено управление (2), робастное по отношению к коэффициентам матрицы $A(\cdot)$, при котором замкнутая система (1), (2) глобально экспоненциально устойчива. Класс Z_1 образуют матрицы $A(\cdot)$, у которых первые p элементов верхней части какой-либо наддиагонали являются знакоопределенными, а элементы, стоящие выше них, достаточно малы. Иными словами, для некоторого $k > 1$ имеют место оценки

$$\inf_{(\cdot)} |\alpha_{i,i+k-1}(\cdot)| > 0, \quad i \in \overline{1,p}, \tag{4}$$

$$\sup_{(\cdot)} |\alpha_{i,j}(\cdot)| < \delta_A \quad \text{при} \quad i \in \overline{1,p};\ j \in \overline{k+i, k+p-1}. \tag{5}$$

Матрицы $A(\cdot)$, входящие в класс Z_3, обладают следующим свойством. Первые p элементов верхней части какой-либо наддиагонали являются знакоопределенными, то есть для некоторого $k > 1$ справедлива оценка (4). Если $k \leq p$, то элементы, стоящие *левее* этой наддиагонали до $(k-1)$-го столбца достаточно малы, то есть удовлетворяют оценке (5). Если $k > p$, то достаточно малы еще и элементы, заполняющие $(p \times p)$-квадрат, расположенный в левом верхнем углу. Иными словами, оценка (5) справедлива для элементов $\alpha_{ij}(\cdot)$ с индексами $i \in \overline{1,p}$, $j \in \overline{k, k+i-2}$, если $k \leq p$, и с индексами i, j, принадлежащими множеству

$$\{i \in \overline{1,p};\ j \in \overline{k, k+i-2}\} \cup \{i \in \overline{1,p};\ j \in \overline{1,p}\}, \quad \text{если } k > p.$$

В настоящей статье будет синтезировано стабилизирующее управление для системы (1) при $m = n - p$ не по формуле (2), а по выходу v, определяемому формулой

$$v = C^* x, \quad \text{где} \quad C \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}. \tag{6}$$

3. Формулировка результата. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = A(\cdot)x + B(\cdot)S^* y, \tag{7}$$

$$\frac{dy}{dt} = A(\cdot)y + B(\cdot)S^* y + f, \tag{8}$$

где

$$f = DC^* z, \quad z = y - x, \quad D \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}. \tag{9}$$

Из (8), (9) вытекает следующее уравнение для ошибки наблюдения z:

$$\frac{dz}{dt} = A(\cdot)z + DC^* z. \tag{10}$$

Для нахождения матрицы D, при которой $z(t)$ экспоненциально стремится к нулю при $t \to \infty$, рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(z) = z^* H z, \tag{11}$$

в которой элементы h_{ij} матрицы H определяются следующим образом: $h_{ii} = h_i > 0$ $(i \in \overline{1,n})$, $h_{ij} = h_{ji} = -0,5\sqrt{h_i h_j}\,\mathrm{sign}\,\alpha_{ij}(\cdot)$ при $i \in \overline{1,p}$; $j = k+i-1$. Остальные h_{ij} равны нулю. Известно [3], что $H > 0$. Представим матрицу $A(\cdot)$ в виде

$$A(\cdot) = A_1(\cdot) + A_2(\cdot),$$

где $A_1(\cdot)$ получается из $A(\cdot)$ обнулением всех элементов, удовлетворяющих оценке (5).

Производную dV/dt, взятую в силу системы (10), можно представить следующим образом:

$$\frac{dV}{dt} = z^* Q z - \alpha |z|^2, \tag{12}$$

где $\alpha > 0$, $Q = Q_1 + Q_2$,

$$\begin{aligned} Q_1 &= A_1^*(\cdot)H + HA_1(\cdot) + CD^*H + HDC^* + 2\alpha I, \\ Q_2 &= A_2^*(\cdot)H + HA_2(\cdot) - \alpha I, \end{aligned}$$

I — единичная $(n \times n)$-матрица. Положим

$$D = \lambda H^{-1} C. \tag{13}$$

Тогда матрица Q_1 примет вид

$$Q_1 = A_1^*(\cdot)H + HA_1(\cdot) + 2\lambda CC^* + 2\alpha I.$$

Предположим, что матрица C имеет форму

$$C = \begin{pmatrix} 0_p^{n-p} \\ C_1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $C_1 \in \mathbb{R}^{(n-p)\times(n-p)}$, 0_p^{n-p} — нулевая $p \times (n-p)$-матрица, и выполнено предположение

$$\det C_1 \neq 0. \tag{15}$$

Если $A_1^*(\cdot) \in Z_1$, то выполнение неравенства

$$Q_1 < 0, \tag{16}$$

следуя [3], обеспечим следующим образом. У матрицы H фиксируются положительные параметры $h_1, h_{p+2}, \ldots, h_n$, а параметры $h_2, \ldots, h_{p+1}$ выбираются последовательно таким образом, чтобы главные диагональные миноры Δ_i матрицы Q_1, отсчитываемые *сверху*, при $i \in \overline{1,p}$ обладали свойством $\mathrm{sign}\,\Delta_i = (-1)^i$. Затем с помощью леммы Шура выбирается $\lambda \ll -1$, при котором $Q_1 < 0$.

Если $A_1^*(\cdot) \in Z_3$, то фиксируются $h_{p+1}, \ldots, h_n$, а параметры $h_p, h_{p-1}, \ldots, h_1$ последовательно выбираются таким образом, чтобы был нужный знак у отсчитываемых *снизу* главных диагональных миноров $(p \times p)$-матрицы, стоящей в левом верхнем углу матрицы Q_1. Затем с помощью леммы Шура находится $\lambda \ll -1$, при котором справедливо неравенство (15).

Найдем оценку для δ_A в неравенстве (5), обеспечивающую наличие свойства

$$Q_2 < 0. \tag{17}$$

Неравенство (17) выполняется, если максимальное собственное число матрицы $M = A_2^*(\cdot)H + HA_2(\cdot)$ удовлетворяет оценке $\lambda_{\max}(M) < \alpha$. Ввиду симметрии матрицы M $\lambda_{\max}(M) = \|M\|$, где $\|M\|$ — спектральная норма матрицы M. В силу предположения (5) $\|A_2(\cdot)\| \le \delta_A \varkappa$,где

$$\varkappa = \begin{cases} \sqrt{0,5p(p-1)}, & \text{если} \quad k \le p, \\ \sqrt{0,5p(p-1)} + p, & \text{если} \quad k > p, \end{cases}$$

поскольку $\|M\| \le 2\|A_2(\cdot)\|\,\|H\|$ и $\|A_2(\cdot)\| \le |A_2(\cdot)|$, где $|A_2(\cdot)|$ — эвклидова норма матрицы $A_2(\cdot)$. Поэтому неравенство (16) справедливо, если

$$\delta_A < \frac{\alpha}{2\varkappa\lambda_{\max}(H)}. \tag{18}$$

Из (12), (16) и (17) при некотором $\varepsilon > 0$ вытекает оценка

$$|z(t)| < \varkappa_1 |z(t_0)| \exp(-\varepsilon(t - t_0)) \tag{19}$$

при условии, что $A^*(\cdot) \in Z_1 \cup Z_3$ и выполнены соотношения (13), (14), (15), (18). Здесь и далее $\varkappa_i$ — абсолютные константы.

Обратимся теперь к уравнению наблюдателя (8). Из (9), (19) вытекает оценка

$$|f(t)| < \varkappa_2 |z(t_0)| \exp(-\varepsilon(t - t_0)). \tag{20}$$

Предположим, что $A(\cdot) \in Z_1 \cup Z_3$, а матрица $B(\cdot)$ имеет вид

$$B(\cdot) = \begin{pmatrix} B_1(\cdot) \\ B_2(\cdot) \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где $B_1(\cdot) \in \mathbb{R}^{p\times(n-p)}$, $B_2(\cdot) \in \mathbb{R}^{(n-p)\times(n-p)}$,

$$\inf_{(\cdot)} |\det B_2(\cdot)| > 0. \tag{22}$$

Предположим также, что элементы $\beta_{ij}(\cdot)$ матрицы $B_1(\cdot)$ удовлетворяют оценке

$$\sup_{(\cdot)} |\beta_{ij}(\cdot)| < \delta_B, \tag{23}$$

где

$$\delta_B < \frac{\alpha}{2|\lambda|\beta_0 p\sqrt{p(n-p)}}.$$

В этом случае, как показано в [3] с помощью функции Ляпунова $V = y^* H^{-1} y$, для

$$S = \lambda B(\cdot)B^*(\cdot), \quad \lambda \ll -1, \tag{24}$$

решение $y_0(t)$ системы (8) при условии $f \equiv 0$ обладает свойством

$$|y_0(t)| < \varkappa_3 |y(t_0)| \exp(-\varepsilon(t - t_0)).$$

Отсюда и из (20) следует, что для $y(t)$ справедлива оценка

$$|y(t)| \le \varkappa_4(|y(t_0)| + |z(t_0)|) \exp(-\varepsilon(t - t_0)). \tag{25}$$

Положим $y(t_0) = 0$. Тогда $|z(t_0)| = |x(t_0)|$ и из (19), (25) вытекает неравенство

$$|x(t)| \leq \varkappa_5 |x(t_0)| \exp(-\varepsilon(t - t_0)). \tag{26}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема. *Предположим, что матрицы* $A(\cdot)$ *и* $A^*(\cdot)$ *принадлежат классу* Z_1 *либо классу* Z_3 *и выполнены условия* (13)–(15), (18), (23), (24). *Тогда существует такое* $\lambda_* > 0$, *что при* $\lambda < -\lambda_*$ *справедлива оценка* (26).

Замечание. Равномерные оценки (5), (18), (22), (23) исключают из рассмотрения системы, у которых коэффициенты являются неограниченными функциями от $x \in \mathbb{R}^n$. Однако, если эти оценки справедливы при $|x| < \nu$, то свойство (26) будет иметь место при $|x(t_0)| < \nu/\varkappa_5$.

4. Заключение. Рассмотрены системы, матрицы коэффициентов объекта управления которых являются неопределенными и принадлежат некоторому классу. В предположении, что измеряется выход системы, с помощью наблюдателя синтезировано управление по выходу, при котором замкнутая система становится глобально экспоненциально устойчивой.

Литература

1. *Zhai Jun-yong, Ai Wei-ging, Fei Shu-min.* Global output feedback stabilization for a class of uncertain nonlinear systems // IET Control Theory Appl. 2013. Vol. 7, Issue 2. P. 305–313.
2. *Li Ji, Qian Chunjiang, Ding Shihong.* Global finite-time stabilization by output feedback for a class of uncertain nonlinear systems // International Journal of Control, http://dx.doi.org|10.1080|00207179.2010.511658.
3. *Zakharenkov M., Zuber I., Gelig A.* Stabilization of New Classes of Uncertain Systems // MICNON-2015. Saint Petersburg, June, 24–26, 2015.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

Сведения об авторах

Зубер Ирина Ефремовна — доктор технических наук, ведущий научный сотрудник; zuber-yanikum@mail.ru

Гелиг Аркадий Хаимович — доктор физико-математических наук, профессор; agelig@yandex.ru

STABILIZATION BY OUTPUT FEEDBACK FOR A CLASS OF UNCERTAIN SYSTEMS

Irina E. Zuber, Arkadiy Kh. Gelig

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; zuber-yanikum@mail.ru, agelig@yandex.ru

Consider the system

$$\frac{dx}{dt} = A(\cdot)x + B(\cdot)u,$$
$$\frac{dy}{dt} = A(\cdot)y + B(\cdot)u + D(C^*y - v),$$

where

$$v = C^*x \text{ — output},$$
$$u = S^*y \text{ — control},$$

$A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times(n-p)}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times(n-p)}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times(n-p)}$.

Elements $\alpha_{ij}(\cdot)$ and $\beta_{ij}(\cdot)$ of matrices $A(\cdot)$ and $B(\cdot)$ are arbitrary functionals for wich the following conditions are fulfilled:

$$\sup_{(\cdot)} |\alpha_{ij}(\cdot)| < \infty \ (i, j \in \overline{1, n}), \quad \sup_{(\cdot)} |\beta_{ij}(\cdot)| < \infty \ (i \in \overline{1, n}; j \in \overline{1, n-p}).$$

It is supposed that $A(\cdot) \in Z_1 \cup Z_3$, $A^*(\cdot) \in Z_1 \cup Z_3$, where Z_1 — class of matrices with the following properties: the first p elements of superdiagonal with index k are sign-definite and elements pleaced higher are sufficiently small. Class Z_3 contains matrices with small elements placed lower sign-definite elements of superdiagonal with index k and above $p+1$ line. If $k > p$ then too sufficiently small elements $(p \times p)$-square are placed in left upper angle of matrix. The special forms of quadratic Lyapunov functions are considered. With its help we begin with definition of matrix D for which $z(t) \to 0$ for $t \to \infty$ exponentially. Then we constructed matrix S for which vectors y and x have too this property. Refs 3.

Keywords: uncertain systems, output stabilization, global exponential stability, abserver.

References

1. Zhai Jun-yong, Ai Wei-ging, Fei Shu-min, "Global output feedback stabilization for a class of uncertain nonlinear systems", *IET Control Theory Appl.* **7**(2), 305–313 (2013).

2. Li Ji, Qian Chunjiang, Ding Shihong, "Global finite-time stabilization by output feedback for a class of uncertain nonlinear systems", *International Journal of Control*, http://dx.doi.org|10.1080|00207179.2010.511658.

3. Zakharenkov M., Zuber I., Gelig A., "Stabilization of New Classes of Uncertain Systems", *MICNON-2015*. St. Petersburg, June, 24–26 (2015).